Chapitre 1

Sous-variétés

Dans toute la suite, on se donne trois entiers m, n, p tels que $1 \leq m, p \leq n$.

1.1 Définition d'une sous-variété

1.1.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 1 (Théorème d'inversion locale) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit $x_0 \in U$. On suppose que la différentielle $Df(x_0)$ de f en x_0 est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de x_0 et un voisinage ouvert $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ de $f(x_0)$ tel que f est un C^1 difféomorphisme de U_0 sur V_0.*

Théorème 2 (Théorème d'inversion globale) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On supppose que f est injective et que la différentielle de f en tout point de U est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert et f est un C^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

Dans toute la suite, on ne précisera pas systématiquement que $f(U)$ est un ouvert, autrement dit qu'un difféomorphisme envoie des ouverts sur des ouverts.

Définition 1 (Immersion) *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g : V \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On dit que g est une immersion si la différentielle de g est injective en tout point de V.*

Définition 2 (Submersion) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $h : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. On dit que h est une submersion si la différentielle de h est surjective en tout point de U.*

Les propositions qui suivent sont des applications faciles du théorème d'inversion locale.

Proposition 1 *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. Soient $y_0 \in V$ et $x_0 := g(y_0)$. On suppose que $\operatorname{rg} Dg(y_0) = m$. Alors il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V_0 de y_0 dans V et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on a*

$$x = g(y), y \in V_0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = (y, 0_{n-m}), x \in U_0.$$

En particulier, pour tout $y \in V_0$, $\varphi(g(y)) = (y, 0)$.

Preuve : On se ramène d'abord au cas où $x_0 = 0$. La matrice A de $Dg(y_0)$ dans les bases canoniques est de rang m. Par manipulation de lignes, on peut se ramener au cas où les $n-m$ dernières lignes de A sont nulles et donc les m premières forment une matrice inversible : il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A_0 \in GL_m(\mathbb{R})$ tels que

$$PA = \begin{bmatrix} A_0 \\ 0_{n-m,m} \end{bmatrix}.$$

On pose $G : (y,t) \in V \times \mathbb{R}^{n-m} \mapsto P \circ g(y) + (0,t) \in \mathbb{R}^n$. Alors $G \in C^1(V \times \mathbb{R}^{n-m})$ et la matrice de $DG(y_0, 0)$ est

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0_{m,n-m} \\ 0_{n-m,m} & I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert de $(y_0, 0)$ qu'on peut prendre de la forme $V_0 \times T \subset V \times \mathbb{R}^{n-m}$ (quitte à le réduire), un voisinage ouvert U de $x_0 = 0$ tel que G soit un C^1 difféomorphisme de $V_0 \times T$ sur U. On note $\varphi := G^{-1} \circ P$ et $U_0 = P^{-1}(U)$. Alors φ est bien un C^1 difféomorphisme de U_0 sur $\varphi(U_0) = V_0 \times T$. De plus, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Alors

$$x = g(y), y \in V_0 \Longleftrightarrow Px = G(y,0), (x,y) \in U_0 \times V_0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = (y,0), x \in U_0.$$

□

Proposition 2 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $h : U \to \mathbb{R}^p$ une application C^1. Soient $x_0 \in U$. On suppose que rg $Dh(x_0) = p$. Alors il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de x_0 et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$ tels que pour tout $x \in U_0$,*

$$h(x) = h(x_0) + \varphi(x)''.$$

où on note pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $z = (z', z'') \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$.

Preuve : On se ramène d'abord au cas où $x_0 = 0$. La matrice A de $Dh(0)$ dans les bases canoniques est de rang p. Par manipulation de colonnes, on peut se ramener au cas où les $n-p$ premières colonnes de A sont nulles et donc les p dernières forment une matrice inversible : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $A_0 \in GL_p(\mathbb{R})$ tels que

$$AQ = \begin{bmatrix} 0_{p,n-p} & A_0 \end{bmatrix}.$$

On pose $H : x = (x', x'') \in U \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \mapsto (x', h \circ Q(x)) \in \mathbb{R}^n$. Alors $H \in C^1(U)$ et la matrice de $DH(0)$ est

$$\begin{bmatrix} I_{n-p} & 0_{n-p,p} \\ 0_{p,n-p} & A_0 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U_1 de 0 tel que H soit un C^1 difféomorphisme de U_1 sur $H(U_1)$. On pose $U_0 = QU_1$ et $\varphi := H \circ Q^{-1} - (0, h(0))$. Alors φ est bien un C^1 difféomorphisme de U_0 sur $\varphi(U_0)$. De plus, soit $x \in U_0$. Alors $H(Q^{-1}(x)) = ((Q^{-1}(x))', h(x))$ donc $h(x) = H(Q^{-1}(x))'' = h(0) + \varphi(x)''$.

□

1.1.2 Graphe, paramétrisation, équation

Dans cette section, M désigne une partie de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3 *On dit que M est une sous-variété de dimension m si pour tout point $x \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant x et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U)$ tel que*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}).$$

On dit qu'un tel φ est une carte au voisinage de x_0.

Si M est à la fois une sous-variété de dimension m_1 et de dimension m_2, alors $m_1 = m_2$. En effet, fixons $x_0 \in M$. Il existe deux cartes $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ où U_1, U_2 sont deux voisinages ouverts de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, telles que

$$\varphi_1(U_1 \cap M) = \varphi_1(U_1) \cap (\mathbb{R}^{m_1} \times \{0_{n-m_1}\}) \quad \text{et} \quad \varphi_2(U_2 \cap M) = \varphi_2(U_2) \cap (\mathbb{R}^{m_2} \times \{0_{n-m_2}\}).$$

Posons $V = U_1 \cap U_2$. Alors $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est un C^1 difféomorphisme de $\varphi_1(V) \cap (\mathbb{R}^{m_1} \times \{0_{n-m_1}\}$ (qui s'identifie à un ouvert de $\mathbb{R}^{m_1}$) sur $\varphi_2(V) \cap (\mathbb{R}^{m_2} \times \{0_{n-m_2}\}$ (qui s'identifie à un ouvert de $\mathbb{R}^{m_2}$). On en déduit l'existence d'un C^1 difféomorphisme entre un ouvert de $\mathbb{R}^{m_1}$ et un ouvert de $\mathbb{R}^{m_2}$. Cela implique (en considérant la différentielle de ce difféomorphisme) un isomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^{m_1}$ et $\mathbb{R}^{m_2}$ et donc $m_1 = m_2$.

Proposition 3 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *l'ensemble M est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$,*
2) *pour tout $x_0 \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant x_0, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ et une application $g : V \to \mathbb{R}^n$ qui est une immersion C^1 et un homéomorphisme sur son image $g(V)$, tels que $U \cap M = g(V)$,*
3) *pour tout $x_0 \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant x_0 et une application $h : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ qui est une submersion C^1 tels que $U \cap M = h^{-1}(h(x_0))$.*

Preuve :

Preuve de $1) \Longrightarrow 2), 3)$ Soit $x_0 \in M$. Par définition d'une sous-variété, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U)$ tel que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$. Soit $\Pi_{n-m} : (x', x'') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \mapsto x'' \in \mathbb{R}^{n-m}$. On note $h = \Pi_{n-m} \circ \varphi$. Alors h est une submersion comme composée deL'ensemble $\varphi(U)$ est un ouvert connexe de $\mathbb{R}$ (car homéomorphe à un ouvert connexe), donc un intervalle ouvert, qui contient $\varphi(x)$. submersions, $h(x_0) = 0_{n-m}$ et $h^{-1}(\{0_{n-m}\}) = \{x \in U : \Pi_{n-m}(\varphi(x)) = 0\} = U \cap M$, ce qui prouve 3).

Pour obtenir 2), on pose $V := \{y \in \mathbb{R}^m : (y, 0) \in \varphi(U)\}$ et $g(y) := \varphi^{-1}(y, 0), y \in V$. Autrement dit, $g = \varphi^{-1} \circ i$ avec $i : y \in \mathbb{R}^m \mapsto (y, 0) \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, g est une immersion injective comme composée d'immersions injectives. Elle est donc bijective et continue sur son image $g(V) = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})) = U \cap M$. L'inverse de g est $\Pi_m \circ \varphi|_{U \cap M}$ qui est bien continu (ici, $\Pi_m : (x', x'') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \mapsto x' \in \mathbb{R}^m$).

Preuve de $2) \Longrightarrow 1)$ C'est la seule partie un peu subtile de la preuve : il faut comprendre pourquoi on a besoin de savoir que g est un homéomorphisme sur son image. Soit $y_0 \in V$ tel que $g(y_0) = x_0$. Par la proposition 1, il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ qu'on peut supposer inclus dans U, un voisinage ouvert $V_0 \subset V$ de y_0 dans $\mathbb{R}^m$ et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on a

$$x = g(y), y \in V_0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = (y, 0_{n-m}), x \in U_0.$$

Comme g est un homéomorphisme sur son image, $g(V_0)$ est un ouvert de $g(V)$ (pour la topologie induite) : il existe $\tilde{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ ouvert tel que $g(V_0) = \tilde{U}_0 \cap g(V) = \tilde{U}_0 \cap U \cap M$. On pose $U_1 := U_0 \cap \tilde{U}_0$. Montrons que $\varphi(U_1 \cap M) = \varphi(U_1) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$. Soit $x \in U_1 \cap M$. Alors il existe $y \in V_0$ tel que $x = g(y)$ et donc $\varphi(x) = (y, 0_{n-m})$. Ainsi, $\varphi(U_1 \cap M) \subset \varphi(U_1) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$. Réciproquement, si $x \in U_1$ est tel que $\Pi_{n-m}(\varphi(x)) = 0$, alors il existe $y \in V_0$ tel que $x = g(y)$. Donc $x \in M$, ce qui implique $\varphi(x) \in \varphi(U_1 \cap M)$.

Preuve de $3) \implies 1)$ Par la proposition 2, il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de x_0 et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$ tels que pour tout $x \in U_0$, $h(x) = h(x_0) + \Pi_{n-m}(\varphi(x))$. Soit $x \in U_0 \cap M$. Alors $h(x) = h(x_0)$ donc $\varphi(x) \in \mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}$. Ainsi, $\varphi(U_0 \cap M) \subset \varphi(U_0) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$. Réciproquement, soit $x \in U_0$ tel que $\varphi(x) \in \mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}$. Alors $h(x) = h(x_0)$ donc $x \in U_0 \cap M$. Ainsi, $\varphi(U_0) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}) \subset \varphi(U_0 \cap M)$, ce qui achève la preuve.

$\square$

Exercice 1 *Soit $G : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ une application C^1 sur l'ouvert V. Montrer que l'ensemble $M := \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : x'' = G(x')\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 2 *Montrer que la sphère S^{n-1} centrée en 0 et de rayon 1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.*

Exercice 3 *Soit $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$. Montrer que $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$.*

Exercice 4 *Soit $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application C^1 sur l'ouvert U. On suppose que pour tout $x \in U$ tel que $h(x) = 0$, le rang de $Dh(x)$ est p. Montrer que pour tout $x \in h^{-1}(0)$, il existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que le rang de $Dh(y)$ est p pour tout $y \in V$. En déduire que $h^{-1}(0)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*

On présente maintenant deux contre-exemples. Soit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$. Montrons que A n'est pas une sous-variété de dimension 1. On considère $A_0 := A \setminus \{(0,0)\}$. Alors pour tout voisinage U de $(0,0)$, $A_0 \cap U$ contient 4 composantes connexes. On conclut par le lemme suivant :

Lemme 1 *Soit M une sous-variété de dimension 1 dans $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $(M \setminus \{x\}) \cap U$ a exactement 2 composantes connexes.*

Preuve : il existe un ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U)$ tel que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0_{n-1}\})$. Quitte à réduire U, on peut supposée que $\varphi(U)$ est une boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en $\varphi(x)$. On en déduit $\varphi(U \cap (M \setminus \{x\})) = \varphi(U) \cap ((\mathbb{R} \times \{0_{n-1}\}) \setminus \{\varphi(x)\})$. L'ensemble $(\mathbb{R} \times \{0_{n-1}\}) \setminus \{\varphi(x)\}$ est constituée de 2 demi-droites ouvertes de même sommet $\varphi(x)$ et disjointes. On en déduit que $\varphi(U) \cap ((\mathbb{R} \times \{0_{n-1}\}) \setminus \{\varphi(x)\})$ a exactement 2 composantes connexes. Comme φ est un homéomorphisme, on en déduit que $U \cap (M \setminus \{x\})$ a exactement 2 composantes connexes.

$\square$

Exercice 5 *Soit $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Montrer que B n'est pas une sous-variété.*

Ainsi, les coniques ou les quadriques ne sont pas toutes des sous-variétés.

Pour le contre-exemple suivant, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2 *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m. Alors M est localement fermé ; autrement dit, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de x tel que $M \cap U$ est un fermé de U : il existe un fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $M \cap U = F \cap U$.*

Preuve : il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U)$ tel que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$. Comme φ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$ et que $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$ est un fermé de $\varphi(U)$, on en déduit que $M \cap U$ est un fermé de U.

$\square$

Exercice 6 *1. Etudier la courbe paramétrée*

$$t \in]-1,+\infty[\mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

et la dessiner.

2. Est-ce une sous-variété ?

Exercice 7 *Soit α un irrationnel dans $\mathbb{R}$. On note $g : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, \cos \alpha t, \sin \alpha t)$.*

1. *Montrer que g est une immersion injective. Dans la suite de l'exercice, on montre que $g(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété.*
2. *Montrer que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *En déduire que $g(\mathbb{R})$ est dense dans $T^2 := S^1 \times S^1$.*
4. *On suppose par l'absurde que $g(\mathbb{R})$ est une sous-variété. En utilisant le lemme précédent, montrer que pour tout $x \in g(\mathbb{R})$, il existe $r_x > 0$ tel que $g(\mathbb{R}) \cap B(x, r_x) = T^2 \cap B(x, r_x)$.*
5. *Montrer que dans la question précédente, on peut en fait prendre r_x indépendant de x.*
6. *Conclure.*

1.1.3 Des exemples en algèbre linéaire

Exercice 8 *1) Montrer que l'application $A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A \in Sym_n(\mathbb{R})$ est lisse et calculer sa différentielle. En déduire que le groupe orthogonal $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.*

2) On rappelle que l'exponentielle $Exp : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ est lisse, et qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que Exp soit un difféomorphisme de U sur son image. Montrer qu'il existe un ouvert V contenant 0 dans l'espace vectoriel des matrices antisymétriques tel que $Exp|_V$ soit une immersion injective qui est un homéomorphisme sur un voisinage ouvert de I_n dans $O(n)$.

Exercice 9 *1) Montrer que l'application $A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$ est lisse et calculer sa différentielle. En déduire que le groupe spécial linéaire $Sl(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.*

2) Montrer qu'il existe un ouvert V contenant 0 dans l'espace vectoriel des endomorphismes à trace nulle tel que $Exp|_V$ soit une immersion injective qui est un homéomorphisme sur un voisinage ouvert de I_n dans $Exp(V) = Sl(n)$.

1.2 Espace tangent à une sous-variété

1.2.1 Définition d'un espace tangent

Définition 4 *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in M$. On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur tangent à x en M s'il existe $\delta > 0$ et une application dérivable $c :]-\delta, \delta[\to M$ tels que $c(0) = x$ et $c'(0) = v$.*

Dans toute la suite, M désigne une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m.

Proposition 4 *Soit $x \in M$. L'ensemble E_x des vecteurs tangents à M en x est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension m.*

Preuve : il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U)$ tel que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$. On va montrer que $E_x = D\varphi^{-1}(\varphi(x))(\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$, ce qui impliquera que E_x est isomorphe au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}$.

Soit $v \in E_x$. Il existe $\delta > 0$ et une application dérivable $c :]-\delta, \delta[\to M$ tels que $c(0) = x$ et $c'(0) = v$. Quite à réduire $\delta > 0$, on peut supposer que $c(]-\delta, \delta[) \subset U$. Donc pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $\varphi(c(t)) \in \mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}$. En dérivant en 0, il vient $D\varphi(x)(v) = D\varphi(c(0))(c'(0)) = (\varphi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}$ (car cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, en particulier, il est fermé). Donc $D\varphi(x)(E_x) \subset \mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}$.

Réciproquement, soit $w \in \mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(\varphi(x), \delta||w||) \subset \varphi(U)$. On définit $c(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + tw)$ qui a bien un sens pour tout $t \in]-\delta, \delta[$. Alors $c(t) \in U \cap M$, $c(0) = x$. Donc $c'(0) \in E_x$. Comme $c'(0) = D\varphi^{-1}(\varphi(x))(w)$, $E_x \supset D\varphi^{-1}(\varphi(x))(\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$, ce qui conclut la preuve.

$\square$

Exercice 10 *Soit $C := \{(t, |t|) : t \in \mathbb{R}\}$. Calculer l'ensemble des vecteurs tangents à C en $(0, 0)$. En déduire que C n'est pas une sous-variété.*

Définition 5 *Le plan tangent à M en $x \in M$ est le sous-espace affine : $x + E_x$. On le notera $T_x M$.*

Il est intéressant de voir comment calculer le plan tangent à une sous-variété définie (localement) par paramétrisation. S'il existe une immersion $g : V \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(V) = M \cap U$, où (V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$), alors pour tout $y \in V$, $T_{g(y)}M = g(y) + Dg(y)(\mathbb{R}^m)$. Pour le voir, soit $v \in \mathbb{R}^m$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $g(y + tv)$ est bien défini et appartient à $M \cap U$. On en déduit $Dg(y)(v) \in E_{g(y)}$. Ainsi $Dg(y)(\mathbb{R}^m) \subset E_{g(y)}$. On a en fait égalité pour raison de dimension et donc $T_{g(y)}M = g(y) + Dg(y)(\mathbb{R}^m)$.

Lorsque la sous-variété est définie par des équations au voisinage d'un point $x \in M$, il existe une submersion $h : U \to \mathbb{R}^p$, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de x telle que $M \cap U = h^{-1}(\{0_p\})$. Alors pour toute courbe $c :]-\delta, \delta[\to M \cap U$ vérifiant $c(0) = x$, on a $h \circ c = 0$ sur $]-\delta, \delta[$. En dérivant en 0, il vient $Dh(c(0))(c'(0)) = 0$. Donc $E_x \subset \ker Dh(x)$. On a en fait égalité pour raison de dimension et donc $T_x M = x + \ker Dh(x)$.

Exercice 11 *Calculer le plan tangent en un point de S^2.*

1.2.2 Théorème des extrema liés

Théorème 3 *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f, h_1, \dots, h_p : U \to \mathbb{R}$ des applications $C^1(U)$. On définit l'ensemble des contraintes $N := \{x \in U : h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0\}$. On suppose qu'il existe $x_0 \in N$ tel que pour $x \in N$, $f(x_0) \leq f(x)$. Si les vecteurs $\nabla h_1(x_0), \dots, \nabla h_p(x_0) \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla h_1(x_0) + \cdots \lambda_p \nabla h_p(x_0).$$

Preuve : Comme les applications $\nabla h_i : U \to \mathbb{R}^n$ sont continues, il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de x_0 tel que pour tout $x \in U_0$, les vecteurs $\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x) \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants. On prétend que $N_0 := N \cap U_0$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. En effet, posons $h := (h_1, \dots, h_p)$. Alors pour tout $x \in N_0$, la matrice de $Dh(x)$ dans les bases canoniques a pour vecteurs lignes les vecteurs $\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x)$. Comme ils sont linéairement indépendants, la matrice de $Dh(x)$ est de rang p. Donc h est une submersion en tout point de $N_0 = \{x \in U_0 : h(x) = 0\}$, ce qui permet de conclure.

Ainsi, $f|_{N_0}$ atteint un minimum en x_0. Soit $\delta > 0$ et $c :]-\delta, \delta[\to N_0$ une application différentiable telle que $c(0) = x_0$. Alors $f \circ c(t) \geq f \circ c(0)$ pour tout $t \in]-\delta, \delta[$. On en déduit $Df(x_0)(c'(0)) = 0$. Il vient donc $Df(x_0)|_{E_{x_0}} = 0$. Comme $E_{x_0} = \ker Dh(x_0) = \cap_{i=1}^p \ker Dh_i(x_0)$, on en déduit

$$\cap_{i=1}^p \ker Dh_i(x_0) \subset \ker Df(x_0)$$

ce qui permet de conclure.

□

Au cas où la fin de la preuve serait trop elliptique, rappelons le résultat classique suivant :

Lemme 3 *Soient $l, l_1, \ldots, l_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des formes linéaires. On suppose que*

$$\cap_{i=1}^{p} \textit{ker}\, l_i \subset \textit{ker}\, l.$$

Alors $l \in$ vect $(l_1, \ldots, l_p)$.

Preuve : Soit A la matrice dont les lignes sont formées par les coefficients des l_i dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le noyau de A s'identifie à $\cap_{i=1}^{p}$ ker l_i. Soit B la matrice formée en rajoutant à A une $(p+1)^{ième}$ ligne, formée par l. L'hypothèse du lemme dit que le noyau de B est égal au noyau de A. Donc le rang de B est égal au rang de A. Donc la dernière ligne de B est combinaison linéaire des précédentes.

□

1.2.3 Lemme de Morse

Pour montrer le lemme de Morse, on aura besoin du résultat suivant :

Lemme 4 *Soit $S \in Sym_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. On définit $f_s : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T SA \in Sym_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage ouvert U de S dans $Sym_n(\mathbb{R})$ et une application lisse $g : U \to M_n(\mathbb{R})$ telle que $g(S) = I_n$ et pour tout $R \in U$,*

$$R = g(R)^T Sg(R).$$

Preuve : L'application f_S est quadratique, donc C^∞ et $Df_S(A)(H) = H^T SA + A^T SH$. Montrons que $Df_S(I_n)$ est surjective : soit $L \in Sym_n(\mathbb{R})$. Posons $H := \frac{1}{2}S^{-1}L$. Alors $Df_S(I_n)(H) = L$, ce qui prouve la surjectivité de $Df_S(I_n)$. Soit A un supplémentaire de ker $Df_S(I_n)$ dans $M_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n. En appliquant le théorème d'inversion locale à $f_S|_A$ au voisinage de I_n, on obtient qu'il existe un voisinage ouvert V de I_n dans A et un voisinage ouvert U de $S = f_S(I_n)$ dans $Sym_n(\mathbb{R})$ tel que $f_S|_A$ est un C^∞ difféomorphisme de V sur U. On pose $g := (f_S|_A)^{-1}$ qui sera bien une application C^∞ sur U. De plus $g(S) = I_n$ et pour tout $R \in U$, soit $L := g(R) \in A$. La relation $f_S(L) = R$ s'écrit $L^T SL = R$, i.e. $R = g(R)^T Sg(R)$.

□

Lemme 5 (Lemme de Morse) *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application C^3 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que $0 \in U$ est un point critique non dégénéré : $Df(0) = 0$ et la forme quadratique définie par sa matrice $\nabla^2 f(0)$ est non dégénérée. On note $(p, n-p)$ la signature de $\nabla^2 f(0)$. Alors il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de 0 et un C^1 difféomorphisme $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$, où $\varphi(U_0)$ est un voisinage ouvert de $0 = \varphi(0)$, tel que pour tout $x \in \varphi(U_0)$,*

$$f(\varphi^{-1}(x)) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2.$$

Preuve : Soit $r > 0$ tel que $\overline{B(0,r)} \subset U$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in B(0,r)$ (et en tenant compte du fait que $Df(0) = 0$), on a

$$f(x) = f(0) + x^T h(x) x$$

où

$$h(x) = \int_0^1 (1-t) \nabla^2 f(tx)\, dt.$$

Ici $\nabla^2 f(tx)$ désigne la hessienne de f écrite dans la base canonique, et x^T, x sont identifiés à leur vecteur coordonnées dans la base canonique. La fonction h est donc à valeurs dans $Sym_n(\mathbb{R})$ et vérifie $h(0) = \frac{1}{2}\nabla^2 f(0)$. Par théorème de dérivation des intégrales à paramètres (la fonction $(t,x) \mapsto \nabla^2 f(tx)$ est C^1 sur chaque $[0,1] \times \overline{B(0,r')}$ pour tout $r' < r$), la fonction h est C^1 sur $B(0,r)$. Par le lemme 4, il existe un voisinage ouvert W de $S := \frac{1}{2}\nabla^2 f(0)$ dans $Sym_n(\mathbb{R})$ et une application lisse $g : W \to M_n(\mathbb{R})$ tels que pour tout $R \in W$, $R = g(R)^T S g(R)$ et $g(S) = I_n$. Quitte à diminuer r, on peut supposer que $h(B(0,r)) \subset W$. On peut donc écrire pour tout $x \in B(0,r)$,

$$f(x) = f(0) + x^T g(h(x))^T S g(h(x)) x.$$

Notons

$$S_0 := \begin{bmatrix} I_p & \\ & I_{n-p} \end{bmatrix}.$$

Comme S et S_0 sont congruentes, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P^T S_0 P$. Posons $\varphi(x) = Pg(h(x))x$, $x \in B(0,r)$. Alors $f(x) = f(0) + \varphi(x)^T S_0 \varphi(x)$. Il reste à montrer que φ est un C^1 difféomorphisme sur un voisinage de 0. Par la règle de la chaîne, on a

$$g(h(x)) = g(h(0)) + Dg(h(0)) \circ Dh(0)(x) + O(|x|^2).$$

Donc

$$\varphi(x) = Pg(h(x))(x) = Pg(h(0))x + PDg(h(0))[Dh(0)(x)](x) + O(|x|^2)$$

soit encore (en utilisant $g(h(0)) = I_n$ et $\varphi(0) = 0$)

$$\varphi(x) = \varphi(0) + Px + O(|x|^2).$$

Finalement $D\varphi(0) = P$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale pour conclure.

□

1.2.4 Position d'une hypersurface par rapport à un plan tangent

Pour étudier la position d'une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$) par rapport à son plan tangent, il est commode de décrire localement cette hypersurface comme le graphe d'une fonction :

Lemme 6 *Soit M une sous-variété de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in M$. Alors, après permutation éventuelle des coordonnées, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ de la forme $U = U' \times U'' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ et une application $G \in C^1(U', U'')$ tels que pour tout $x = (x', x'') \in U$, on a*

$$x \in M \iff x'' = G(x').$$

Preuve : Il existe un voisinage ouvert U_0 de x dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion $h \in C^1(U_0, \mathbb{R}^{n-m})$ telle que $M \cap U_0 = h^{-1}(0)$. Après permutation éventuelle des coordonnées, on peut supposer que les $n-m$ dernières colonnes de $Dh(x)$ forment une matrice inversible. Le lemme est alors une conséquence du théorème des fonctions implicites.

□

Avant de poursuivre, signalons que toute la théorie qui précède (section 1 et 2) reste vrai en remplaçant C^1 par C^k : on peut parler de variété C^k, etc... C'est une conséquence du fait que si f est un C^1 difféomorphisme de classe C^k, alors l'inverse est automatiquement de classe C^k (on peut le voir sur l'expression de la différentielle de l'inverse).

Donnons-nous à présent une surface S dans $\mathbb{R}^3$ de classe C^3 (c'est-à-dire une sous-variété de classe C^3 de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$). Soit $A \in S$. Etudions la position de S par rapport à son plan tangent. Après translation, on peut supposer que $A = (0,0,0)$. Après rotation, on peut supposer que le plan tangent en A est le plan horizontal : $T_0S = \{(x,y,z) : z = 0\}$. En reprenant la preuve du lemme précédent et ses notations, on a donc que $\ker Dh(0) = T_0S$, donc la dernière colonne de $Dh(0)$ est non nulle. On n'a pas besoin de permuter de coordonnées pour écrire qu'au voisinage de A, S est donné par l'équation d'un graphe de la forme $z = f(x,y)$. Quitte à le réduire, on peut écrire un tel voisinage sous la forme : $U_0 \times]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, U_0 étant un voisinage ouvert de 0 et $\epsilon > 0$.

Supposons que f ne soit pas dégénérée en $(0,0)$: $\nabla^2 f(0,0)$ est inversible. Soit $(p, 2-p)$ la signature de $\nabla^2 f(0,0)$. D'après le lemme de Morse, il existe deux voisinages ouverts $U \subset U_0$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que $f \circ \varphi^{-1}(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^p X_i^2 - \sum_{i=p+1}^2 X_i^2$, pour tout $(X_1, X_2) \in V$. On définit le difféomorphisme $\Phi : (x,y,z) \in U \times \mathbb{R} \mapsto (\varphi(x,y), z)$. Alors

$$\Phi(S \cap (U \times]-\epsilon, \epsilon[)) = (V \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \cap \Sigma \quad , \quad \Sigma := \{(X_1, X_2, X_3) : X_3 = \sum_{i=1}^{p} X_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2} X_i^2\}.$$

Ainsi, au voisinage de A, S est difféomorphe à Σ. De plus, Φ stabilise T_0S. On en déduit

- si la forme quadratique $\nabla^2 f(0,0)$ a pour signature $(1,1)$ ou $(-1,-1)$, alors S est (localement) d'un seul côté de son plan tangent,
- si la forme quadratique $\nabla^2 f(0,0)$ a pour signature $(1,-1)$, alors S traverse son plan tangent.