Cours d’intégration pour l’agrégation

Pierre Bousquet

Chapitre 1

Les séries sont des intégrales

1.1 Introduction : l'équation de la chaleur sur un segment

On considère l'équation de la chaleur sur le segment $[0,1]$ avec condition initiale et condition aux limites. Plus précisément, notons $Q =]0,1[\times]0,+\infty[$. Il s'agit de trouver une fonction $u \in C^0(\overline{Q})$ telle que $u \in C^\infty(Q)$ et

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{x^2} u = 0 & \text{dans } Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{pour } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = h(x) & \text{pour } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Ici, h est une fonction donnée telle que $h \in C^0([0,1])$, $h \in C^1(]0,1[)$ et $h(0) = h(1) = 0$.

La stratégie consiste à prolonger h par imparité puis $2-$périodicité en une fonction $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Par imparité, les coefficients de Fourier de $\tilde{h}$ sont donnés par

$$a_n(\tilde{h}) = 0 \quad , \quad b_n(\tilde{h}) = 2\int_0^1 \tilde{h}(t) \sin n\pi t \, dt.$$

On note pour simplifier $b_n := b_n(\tilde{h})$. La série de Fourier de $\tilde{h}$ est alors donnée par

$$\tilde{h}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\tilde{h}) \sin n\pi x.$$

De plus, la série numérique $\sum_n b_n$ converge absolument, et donc la série de Fourier de $\tilde{h}$ converge normalement vers h. On pose alors (voir [6, Chapitre IV, section VI, paragraphe 3])

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Pour montrer que cette série est bien convergente sur Q, et que sa somme vérifie les hypothèses de régularité requises, on décide de la considérer ici comme une intégrale et de lui appliquer les théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

1.2 Mesures et intégrales sur $\mathbb{N}$

Sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, est une tribu (ou encore une σ algèbre) puisqu'il contient l'ensemble vide, est stable par réunion dénombrable, et par passage au complémentaire. On appelle $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la *tribu discrète* sur $\mathbb{N}$. Noter que pour tout ensemble mesurable $(Y, \mathcal{Y})$, toute fonction $f : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (Y, \mathcal{Y})$ est mesurable, puisque l'image réciproque par f d'un élément de $\mathcal{Y}$ est dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

On considère sur l'ensemble mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ la *mesure de comptage* $\mu_{\mathbb{N}}$: pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\mu_{\mathbb{N}}(A)$ est défini comme le cardinal de A (si A est une partie infinie, on pose $\mu_{\mathbb{N}}(A) = +\infty$). Il s'agit bien d'une application à valeurs dans $[0, +\infty]$ qui vaut 0 sur l'ensemble vide et qui est σ additive (la mesure de comptage d'une union dénombrable disjointe de parties de $\mathbb{N}$ est égale à la somme des mesures de ces parties).

Noter que pour cette mesure, le seul ensemble négligeable (i.e. contenu dans un ensemble de mesure nulle) est l'ensemble vide.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Commençons par les fonctions simples positives, c'est-à-dire les fonctions $s : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ qui prennent un nombre fini de valeurs. A chaque fonction simple s correspond une partition de $\mathbb{N}$ en un nombre fini de parties disjointes non vides $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathbb{N}$ et m réels positifs $a_1, \ldots, a_m$ distincts tels que $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$. Son intégrale est donc (par définition même de l'intégrale d'une fonction simple)

$$\int_{\mathbb{N}} s(n)\, d\mu_{\mathbb{N}}(n) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i). \tag{1.1}$$

Noter que cette intégrale peut être égale à $+\infty$. C'est le cas si et seulement si l'un des $\mu(A_i) = +\infty$ avec $a_i \neq 0$.

Poursuivons avec l'intégrale d'une fonction positive $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ (rappelons que sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, toutes les fonctions sont mesurables). Par définition, il s'agit de

$$\int_{\mathbb{N}} f(n)\, d\mu_{\mathbb{N}}(n) = \sup_{\substack{s:\mathbb{N}\to[0,+\infty] \\ \text{simple, } s \leqslant f}} \int_{\mathbb{N}} s(n)\, d\mu(n).$$

Pour établir le lien entre les séries à termes positifs et l'intégrale, on peut s'appuyer sur le théorème de convergence monotone.

Proposition 1 *Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs et $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ défini par $f(n) = u_n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} f(n)\, d\mu_{\mathbb{N}}(n).$$

Preuve : Soit $N \geqslant 1$. En notant $\chi_{\{n\}}$ la fonction caractéristique du singleton $\{n\}$, la linéarité de l'intégrale implique

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n \int_{\mathbb{N}} \chi_{\{n\}}(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m) = \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} u_n \chi_{\{n\}}(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \chi_{\{n\}}(m) = \sum_{n=0}^{N} u_m \chi_{\{n\}}(m) = u_m \sum_{n=0}^{N} \chi_{\{n\}}(m) = u_m \chi_{\{0,\ldots,N\}}(m) = f(m)\chi_{\{0,\ldots,N\}}(m).$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_{\mathbb{N}} f(m)\chi_{\{0,\ldots,N\}}(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m). \tag{1.2}$$

On pose $f_N(m) = f(m)\chi_{\{0,\dots,N\}}(m)$. La suite $(f_N)_{N\geqslant 0}$ est une suite croissante de fonctions positives et qui converge simplement vers f. Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{\mathbb{N}} f(m)\chi_{\{0,\dots,N\}}(m)\,d\mu_{\mathbb{N}}(m) = \int_{\mathbb{N}} f(m)\,d\mu_{\mathbb{N}}(m).$$

En passant à la limite dans (1.2), on obtient ainsi l'égalité demandée.

□

Enfin, une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est intégrable si $|f| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ est d'intégrale finie. C'est alors aussi le cas de $f^+ = \max(f, 0)$ et de $f^- = \max(-f, 0)$ et l'intégrale de f est par définition

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_{\mathbb{N}} = \int_{\mathbb{N}} f^+\,d\mu_{\mathbb{N}} - \int_{\mathbb{N}} f^-\,d\mu_{\mathbb{N}}.$$

Finalement, le lien entre l'intégrale d'une fonction sur $\mathbb{N}$ et les séries est possible pour les séries absolument convergentes.

Proposition 2 *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. On définit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $f(n) = u_n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $\mathbb{N}$ et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} f(n)\,d\mu_{\mathbb{N}}(n).$$

Preuve : La première partie de l'énoncé est une conséquence directe de la Proposition 1. Pour montrer la deuxième partie, il suffit de remarquer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

avec $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (observer d'abord que l'égalité est vraie pour les sommes partielles).

□

Remarque 1 *De même qu'on interprète la somme d'une série comme une intégrale, on peut voir la somme d'une famille sommable (indexée par $\mathbb{Z}$ ou tout autre ensemble dénombrable) comme une intégrale.*

Remarque 2 *On définit la notion de série semi-convergente (c'est une série qui n'est pas absolument convergente, mais dont la suite des sommes partielles néanmoins converge). On ne définit pas de notion analogue dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. En revanche, on définit bien des intégrales semi-convergentes dans le cadre de l'intégrale de Riemann.*

1.3 Théorème de Lebesgue pour les séries

Une fois établie l'identité des séries absolument convergentes avec les intégrales sur $\mathbb{N}$, on peut interpréter la plupart des théorèmes classiques sur les séries comme des applications immédiates des théorèmes de Lebesgue.

Voici une conséquence du théorème de convergence monotone.

Proposition 3 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\sum_n f_n$ une série de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu(x) = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,d\mu(x).$$

(l'égalité a lieu dans $[0, +\infty]$).

Exercice 1 *Soit* $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une suite double à termes positifs. On suppose que pour tout* k, *la suite* $(u_{n,k})_n$ *est croissante. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,k}.$$

Dans le même esprit, le lemme de Fatou permet de résoudre l'exercice suivant :

Exercice 2 *Soit* $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une suite double à termes positifs. Alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\liminf_{n\to+\infty} u_{n,k} \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}.$$

Enfin, le théorème de convergence dominée implique le théorème d'inversion suivant :

Proposition 4 *Soit* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré et* $\sum f_n$ *une série de fonctions mesurables intégrables. On suppose que* $x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|$ *est intégrable. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu(x) = \int_X\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,d\mu(x).$$

Exercice 3 *Soit* $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une suite double à termes réels. On suppose qu'il existe une suite* (v_k) *telle que* $|u_{n,k}|\leqslant v_k$ *pour tout* n,k *et vérifiant de plus* $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k < +\infty$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,k}.$$

On peut également interpréter les propositions 3 et 4 comme des conséquences du théorème de Fubini. Rappelons en particulier qu'étant donné un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$, la mesure produit $\mu\otimes\mu_{\mathbb{N}}$ définie sur la tribu engendrée par les pavés de la forme $A\times B$ pour tout $A\in X$ et $B\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vérifie

$$\mu\otimes\mu_{\mathbb{N}}(A\times B) = \mu(A)\mu_{\mathbb{N}}(B).$$

En particulier, lorsque $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_{\mathbb{N}})$, la mesure produit $\mu_{\mathbb{N}}\otimes\mu_{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est encore la mesure de comptage, qui à une partie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ associe son cardinal.

Le théorème de Fubini est un outil extrêmement puissant dans la théorie des séries. En voici un autre exemple.

Définition 1 *On considère deux séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *à coefficients dans* $\mathbb{C}$. *On définit leur produit de Cauchy comme étant la série de terme général*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Quand le produit de Cauchy est-il une série convergente ? Et quand la somme de cette-dernière est-elle égal au produit des sommes des deux séries ?

Théorème 1 *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy est une série absolument convergente et on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Preuve : On interprète l'énoncé dans le cadre plus général de la mesure de Lebesgue. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Alors le théorème de Fubini montre que

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

est intégrable et de plus

$$\left(\int_X f\, d\mu(x)\right)\left(\int_Y g\, d\nu(y)\right) = \int_{X\times Y} f(x)g(y)\, d(\mu\otimes\nu)(x, y).$$

Avec $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$, et $f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$, on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m)g(n)\, d(\mu_{\mathbb{N}}\otimes\mu_{\mathbb{N}})(m, n).$$

Par le théorème de convergence dominée, le membre de droite est égal à

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m)g(n)\chi_{A_N}(m, n)\, d(\mu_{\mathbb{N}}\otimes\mu_{\mathbb{N}})(m, n)$$

où $A_N := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m + n \leqslant N\}$. On écrit

$$f(m)g(n)\chi_{A_N}(m, n) = \sum_{(m',n')\in A_N} f(m')g(n')\chi_{\{(m,n)\}}(m', n').$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m)g(n)\chi_{A_N}(m, n)\, d(\mu_{\mathbb{N}}\otimes\mu_{\mathbb{N}})(m, n)\\ &\quad= \sum_{(m',n')\in A_N} f(m')g(n') \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \chi_{\{(m,n)\}}(m', n')\, d(\mu_{\mathbb{N}}\otimes\mu_{\mathbb{N}})(m, n) = \sum_{(m',n')\in A_N} f(m')g(n').\end{aligned}$$

Et cette dernière somme peut se réécrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{N-k}$. On a ainsi

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{N-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{N-k}.$$

Pour s'assurer que la série du membre de droite converge absolument, il suffit de répéter l'argument précédent en remplaçant a_n, b_n par $|a_n|, |b_n|$.

□

1.4 Théorèmes de régularité des intégrales à paramètres

Le théorème de continuité sous le signe intégral possède la version suivante pour les séries :

Proposition 5 *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite de nombres positifs (α_n) telle que*

1) $\sum_n \alpha_n < \infty$,

2) $|f_n(t)| \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $t \in I$.

Alors pour tout $t \in I$, la série $\sum f_n(t)$ converge absolument et la fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est continue.

Remarque 3 *1. On prend le plus souvent $\alpha_n := |f_n|_\infty$. Si les hypothèses du corollaire sont vraies, on dit que la série des (f_n) converge normalement.*

2. En fait, il suffit que la série des (f_n) converge uniformément pour que la fonction définie par la série soit continue.

3. On peut de même considérer des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$. Le même énoncé est valable en remplaçant l'intervalle I par A.

Pour la dérivabilité des séries, on peut utiliser la proposition suivante :

Proposition 6 *Soit f_n une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite de nombres positifs (α_n) telle que*
1) $\sum_n \alpha_n < \infty$,
2) $|f_n(t)| + |f_n'(t)| \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $t \in I$.
Alors pour tout $t \in I$, la série $\sum f_n(t)$ converge absolument et la fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est dérivable sur I, de dérivée $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)$.

Remarque 4 *Là encore, on a un résultat un peu plus fin sur le versant des séries : si la série de fonctions converge simplement et la série des dérivées converge uniformément, alors la somme est dérivable sur I.*

Remarque 5 *On peut également traiter les fonctions de plusieurs variables définies comme somme d'une série. Pour cela, on utilise qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est de classe C^k sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur C^k. Dans le cas où f s'écrit sous la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^k, il suffit donc d'après la proposition 6 de trouver une suite une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum_n \alpha_n < \infty$ et pour tout $\ell \leqslant k$, pour tout $i_1, \ldots, i_\ell$,

$$\forall x \in \Omega, \quad |\partial^\ell_{x_{i_1}\ldots x_{i_\ell}} f_n(x)| \leqslant \alpha_n.$$

Enfin, pour l'holomorphie :

Proposition 7 *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite de nombres positifs (α_n) telle que*
1) $\sum_n \alpha_n < \infty$,
2) $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $z \in \Omega$.
Alors pour tout $z \in \Omega$, les séries $\sum f_n(z)$, $\sum f_n'(z)$ convergent absolument et la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est holomorphe sur Ω de dérivée

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$$

Remarque 6 *Mais vous aurez deviné que la convergence uniforme de la série, au lieu de normale, suffit pour que la somme soit holomorphe.*

Exercice 4 *Montrer que la série $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$. Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$ (on pourra calculer sa somme).*

Exercice 5 *On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum nxe^{-nx^2}$.*

1) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}^*$.

2) On note f sa somme. Déterminer $\int_a^x f(t)\,dt$ pour $0 < a < x$ et en déduire f.

1.5 Conclusion pour l'équation de la chaleur

Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : (x,t) \mapsto b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et vérifie ponctuellement l'équation de la chaleur. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $(t,x) \in]\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\left|\partial^k_{t^k}\partial^\ell_{x^\ell} u_n(x,t)\right| \leqslant \left|b_n(-n^2\pi^2)^k(n\pi)^\ell e^{-n^2\pi^2 t}\right| = |b_n| n^{2k+\ell}\pi^{2k+\ell}e^{-n^2\pi^2\varepsilon}.$$

La série $\sum_n b_n$ étant absolument convergente, il suit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| n^{2k+\ell}\pi^{2k+\ell}e^{-n^2\pi^2\varepsilon} < +\infty.$$

Par le théorème de dérivation sous le signe $\sum$ (voir remarque 5), on en déduit que la fontion $(x,t) \mapsto \sum_{n=0}^\infty u_n(x,t)$ est bien définie sur $\mathbb{R}\times]\varepsilon, +\infty[$ et de classe C^∞ sur cet ensemble. Comme ε est arbitraire, u est bien défini et de classe C^∞ sur Q. De plus, on peut dériver termes à termes :

$$\partial_t u - \partial^2_{x^2} u = \sum_{n=0}^{+\infty} \partial_t u_n - \partial^2_{x^2} u_n = 0.$$

La continuité de u sur $\overline{Q}$ résulte du théorème de continuité sous le signe $\sum$ (voir aussi remarque 3). Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0,t) = u_n(1,t) = 0$, on obtient la condition au limite : $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Enfin, la condition initiale est vérifiée par définition des coefficients b_n.

Remarque 7 *L'équation de la chaleur sur un segment peut constituer un développement pour les leçons 209, 222, 241, 246.*

1.6 Appendice : Boréliens et arithmétique dans $[0, \infty]$

La droite réelle achevée est l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux symboles ∞ et $-\infty$. On prolonge l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ à la droite réelle achevée de manière naturelle.

Un intervalle ouvert de $[0,\infty]$ est soit un intervalle ouvert (usuel) de $[0,\infty[$, soit un intervalle de la forme $]a,\infty]$ avec $0 \leqslant a < \infty$, soit $[0,\infty]$. On appelle ouvert de $[0,\infty]$ une réunion quelconque d'intervalles ouverts de $[0,\infty]$. Ces ouverts engendrent la tribu des boréliens sur $[0,\infty]$. C'est aussi la tribu engendrée par les intervalles de $[0,\infty[$ et le singleton $\{\infty\}$.

Sur $[0,\infty]$, on prolonge l'addition en posant $a + \infty = \infty + a = \infty$ pour tout $0 \leqslant a \leqslant \infty$. L'addition est continue (l'image réciproque d'un ouvert de $[0,\infty]$ est un ouvert de $[0,\infty]$), donc mesurable.

Sur $[0,\infty]$, on prolonge la multiplication en posant pour tout $0 \leqslant a \leqslant \infty$

$$a.\infty = \infty.a = \begin{cases} \infty \text{ si } 0 < a \leqslant \infty, \\ 0 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

Le produit n'est pas continu mais il est mesurable (car continu sur chaque sous-ensemble mesurable $]0,\infty]\times]0,\infty]$, $\{0\} \times [0,\infty]$, $[0,\infty] \times \{0\}$ et donc mesurable sur leur réunion).

On vérifie que ces ces deux opérations conservent les propriétés usuelles de commutativité, d'associativité , de distributivité sur $[0,\infty]$. Elles préservent l'ordre. En revanche, $a+b = a+c$ implique $b = c$ seulement si a est fini. De même, $ab = ac$ n'entraîne $b = c$ que si $0 < a < \infty$.

Chapitre 2

Convolution et régularisation

Dans toute la suite, $\mathbb{R}^n$ est muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. Sur l'ensemble des fonctions boréliennes, on définit la relation d'équivalence $f \underset{p.p.}{\sim} g$, qui signifie que les fonctions boréliennes f et g sont égales hors d'un borélien de mesure nulle. La classe d'équivalence de f pour cette relation est donc l'ensemble des fonctions boréliennes égales à f hors d'un borélien de mesure nulle. On fera très souvent l'abus de notation de confondre une fonction et sa classe. Ce sera typiquement le cas lorsqu'on considèrera des éléments des espaces de Lebesgue L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Au sens strict, ces éléments sont des classes de fonctions, et non des fonctions à proprement parler.

Cet abus de langage est légitime chaque fois que les relations, les propriétés, les identités énoncées ne dépendent pas du choix du représentant dans la classe. Il arrivera même parfois qu'on manipule des fonctions f qui ne sont pas définies partout, mais seulement hors d'un borélien de mesure nulle. On peut alors étendre la fonction f par une valeur arbitraire pour obtenir une fonction borélienne définie partout, et toutes les propriétés liées à la théorie de l'intégrale ne dépendront pas de l'extension choisie.

2.1 Convolution

On se donne deux fonctions f, g boréliennes sur $\mathbb{R}^n$ (ou éventuellement des classes de fonctions, modulo la relation *être égal presque partout*).

2.1.1 Mesurabilité

Supposons dans un premier temps f et g à valeurs dans $[0, +\infty]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est borélienne à valeurs dans $[0, +\infty]$. On peut donc considérer son intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\, dt =: f * g(x).$$

Remarque 8 *Si $\tilde{f} \underset{p.p.}{\sim} f$ et $\tilde{g} \underset{p.p.}{\sim} g$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g(x) = \tilde{f} * \tilde{g}(x)$. La convolution ne dépend donc pas du choix du représentant dans la classe de fonctions. Pour alléger la présentation, on ne formulera plus ce type de remarque mais le lecteur est encouragé à apaiser ses scrupules chaque fois qu'un tel abus de langage sera fait...*

Par le théorème de Fubini-Tonnelli appliqué à la fonction borélienne positive $(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$, la fonction $x \mapsto f * g(x)$ est borélienne à valeurs dans $[0, +\infty]$. Comme $[0, +\infty[$ est un ouvert de $[0, +\infty]$, l'ensemble

$$D(f * g) = \{x \in \mathbb{R}^n : f * g(x) < +\infty\} = (f * g)^{-1}([0, +\infty[)$$

est un borélien.

Supposons maintenant que les fonctions f et g prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. En appliquant ce qui précède aux fonctions $|f|$ et $|g|$, on voit que l'ensemble $D(f * g)$ des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\,dt < +\infty$ est un borélien, et sur cet ensemble, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On peut alors définir

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Le théorème de Fubini affirme en outre que la fonction

$$x \mapsto f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt$$

est borélienne sur $D(f * g)$.

Remarque 9 *1. Lorsque $|f| * |g|(x) < +\infty$, $|f * g(x)| \leqslant |f| * |g|(x)$:*

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\,dt = |f| * |g|(x).$$

2. *Lorsque $|f| * |g|(x) < +\infty$, le changement de variable $t' = x - t$ permet de voir que $f * g(x) = g * f(x)$.*
3. *Si f est nulle hors de A et g est nulle hors de B, alors $f * g$ est définie et nulle hors de $A + B$. En effet, on a d'abord*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\,dt = \int_B |f(x-t)g(t)|\,dt$$

puis on observe que si $x \notin A + B$ et $t \in B$, alors $x - t \notin A$.

2.1.2 Intégrabilité

Proposition 8 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

Preuve : Supposons $p < \infty$. En écrivant $|g(t)| = |g(t)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)||g(t)|\,dt \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p |g(t)|\,dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|\,dt \right)^{1/p'}$$

et donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)||g(t)|\,dt \right)^p \leqslant \|g\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p |g(t)|\,dt.$$

Comme conséquence de la section précédente, les fonctions positives $(|f| * |g|)^p$ et $|f|^p * |g|$ sont boréliennes. En intégrant, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)||g(t)|\,dt \right)^p dx \leqslant \|g\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p |g(t)|\,dt \right) dx. \tag{2.1}$$

Le théorème de Fubini-Tonnelli appliqué à la fonction borélienne positive $(x,t) \mapsto |f(x-t)|^p |g(t)|$ implique

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p |g(t)|\,dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p\,dx \right) dt.$$

Par invariance par translation de la mesure de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p |g(t)| \, dt \right) dx = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p}^p.$$

En reportant dans (2.1), il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)||g(t)| \, dt \right)^p dx \leqslant \|g\|_{L^1}^{p-1} \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p}^p$$

d'où

$$\||f| * |g|\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

La fonction borélienne positive $(|f| * |g|)^p$ est d'intégrale finie, donc finie presque partout. Donc $|f| * |g|$ est aussi finie presque partout. Donc d'après la section précédente, $f * g$ définit (à un borélien de mesure nulle près) une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^n$. En écrivant $|f * g| \leqslant |f| * |g|$, on obtient

$$\|f * g\|_{L^p} = \||f * g|\|_{L^p} \leqslant \||f| * |g|\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$$

ce qui conclut le cas $p < \infty$.

Le cas $p = \infty$ est une conséquence de l'inégalité

$$|f(x-t)g(t)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} |g(t)|$$

valable pour presque tout (x, t). On conclut en intégrant par rapport à t.

□

Exercice 6 *Montrer que l'application* $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \mapsto f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *est bilinéaire, symétrique, continue et associative.*

Exercice 7 *On suppose* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. *Montrer que*

1. *la fonction* $f * g$ *est bien définie p.p. et est bornée,*

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

2. *la fonction* $f * g$ *admet un représentant continu,*
3. *si* $1 < p < \infty$, $f * g$ *tend vers* 0 *à l'infini.*

2.2 Approximation

Proposition 9 *On suppose que* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *et que* g *ainsi que toutes ses dérivées partielles* $\partial_i g$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *sont bornées sur* $\mathbb{R}^n$. *Alors* $f * g$ *définit une fonction* $C^1(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\partial_i (f * g) = f * \partial_i g \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Preuve : On identifie f à une application intégrable définie partout. Pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto g(x-t)f(t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ de dérivées partielles $x \mapsto \partial_i g(x-t)f(t)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $t \mapsto g(x-t)f(t)$ (resp. $t \mapsto \partial_i g(x-t)f(t)$) est borélienne et dominée par la fonction intégrable $t \mapsto \|g\|_{L^\infty} |f|$ (resp. $t \mapsto \|\partial_i g\|_{L^\infty} |f|$) qui ne dépend pas de x.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on en déduit que l'application $g * f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(x-t)f(t)\,dt$ est bien définie et C^1 sur $\mathbb{R}^n$, de dérivées partielles

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i g(x-t)f(t)\,dt.$$

□

Remarque 10 *Si g est seulement continue et bornée, le théorème de continuité sous le signe intégral montre que $f * g$ définit une fonction continue.*

En observant que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{1\leqslant p\leqslant\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$, les Propositions 8 et 9 impliquent :

Corollaire 1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^\infty \cap \bigcap_{1\leqslant p\leqslant\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Définition 2 (Approximation de l'identité) *Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est une approximation de l'identité si*

1. *$\varphi_k \geqslant 0$,*
2. *$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$,*
3. *$\forall \eta > 0$, $\int_{|x|>\eta} \varphi_k(x)\,dx \to 0$ quand $k \to +\infty$.*

Exemple 1 *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue positive d'intégrale 1. On pose $\varphi_k(x) = k^n\varphi(kx)$, $k \in \mathbb{N}$. Alors φ_k est continue, positive et d'intégrale 1 (par le changement de variable $y = kx$). De plus, pour tout $\eta > 0$,*

$$\int_{|x|>\eta} \varphi_k(x)\,dx = \int_{|y|>k\eta} \varphi(y)\,dx$$

qui tend bien vers 0 par le théorème de convergence dominée.

Théorème 2 *Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ et $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité, alors $(f * \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^n$ vers f.*

Remarque 11 *La fonction $f * \varphi_k$ est bien définie comme convolée d'une fonction L^1 et d'une fonction L^∞, et c'est même une fonction bornée et continue par la Remarque 10.*

Preuve du Théorème 2 : Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $|x-y| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, en utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$,

$$\begin{aligned} |f * \varphi_k(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k(t)\,dt - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\varphi_k(t)\,dt \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé $\varphi_k \geqslant 0$. On décompose l'intégrale du membre de droite en deux morceaux :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt &= \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt \\ &\quad + \int_{|t|\geqslant\eta} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt. \end{aligned}$$

On estime le premier morceaux en utilisant l'uniforme continuité de f :

$$\begin{aligned}\int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt &\leqslant \varepsilon \int_{|t|<\eta} \varphi_k(t)\,dt \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(t)\,dt = \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour le deuxième morceaux, on majore $|f(x-t) - f(x)|$ par $2\|f\|_{L^\infty}$:

$$\int_{|t|\geqslant\eta} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt \leqslant 2\|f\|_{L^\infty} \int_{|t|\geqslant\eta} \varphi_k(t)\,dt.$$

Comme $(\varphi_k)_k$ est une partition de l'unité, on en déduit qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (indépendant de x) tel que pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\int_{|t|\geqslant\eta} \varphi_k(t)\,dt \leqslant \varepsilon,$$

de sorte que

$$\int_{|t|\geqslant\eta} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt \leqslant 2\|f\|_{L^\infty}\varepsilon.$$

En recollant les morceaux, il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $k \geqslant k_0$

$$\begin{aligned}|f * \varphi_k(x) - f(x)| &\leqslant \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt \\ &\quad + \int_{|t|\geqslant\eta} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t)\,dt \\ &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_{L^\infty}\varepsilon = (1 + 2\|f\|_{L^\infty})\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, $(f * \varphi_k)_k$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^n$.

□

Une version locale de la preuve précédente montre aussi que

Théorème 3 *Si f est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^n$ et $\{\varphi\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité, alors $(f * \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ vers f.*

Théorème 4 *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leqslant p < \infty$, et $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, alors $(f * \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

La preuve s'appuie sur la continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$:

Lemme 1 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Alors la fonction $\theta : t \mapsto \|f(t + \cdot) - f(\cdot)\|_{L^p}$ est uniformément continue.*

Ce lemme lui-même requiert la densité des fonctions continues à support compact $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $1 \leqslant p < \infty$. Ce-dernier résultat peut-être obtenu soit comme conséquence de la régularité de la mesure de Lebesgue (voir par exemple [3, Théorème 5.20]), soit comme corrolaire du théorème de Lusin (voir par exemple [5, Théorème 3.14]).

Preuve du Lemme 1 : Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon.$$

Soit $R > 0$ tel que la boule B_R de rayon R et centrée en 0 contienne le support de g. Comme pour tout $|t| < 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $t + x \in B_R$ seulement si $x \in B_{R+1}$, on en déduit

$$\|g(t+\cdot) - g(\cdot)\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |g(t+x) - g(x)|^p \, dx = \int_{B_{R+1}} |g(t+x) - g(x)|^p \, dx.$$

Comme g est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|s| < \eta$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|g(s+x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|B_{R+1}|^{1/p}}.$$

Donc pour tout $t, t' \in \mathbb{R}^n$, $|t - t'| < \min(1, \eta)$,

$$\|g(t+\cdot) - g(t'+\cdot)\|_{L^p}^p \leqslant |B_{R+1}| \frac{\varepsilon^p}{|B_{R+1}|} = \varepsilon^p. \tag{2.2}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{array}{rcl} |\theta(t) - \theta(t')| & = & |\|f(t+\cdot) - f(\cdot)\|_{L^p} - \|f(t'+\cdot) - f(\cdot)\|_{L^p}| \\ & \leqslant & \|f(t+\cdot) - f(t'+\cdot)\|_{L^p} \\ & \leqslant & \|f(t+\cdot) - g(t+\cdot)\|_{L^p} + \|g(t+\cdot) - g(t'+\cdot)\|_{L^p} \\ & & +\|g(t'+\cdot) - f(t'+\cdot)\|_{L^p}. \end{array}$$

Par invariance par translation de la mesure de Lebesgue,

$$\|f(t+\cdot) - g(t+\cdot)\|_{L^p} = \|f(t'+\cdot) - g(t'+\cdot)\|_{L^p} = \|g(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^p}$$

et par choix de g, cette quantité est $\leqslant \varepsilon$. Ainsi, en utilisant (2.2), il vient pour tout $|t - t'| < \min(1, \eta)$,

$$|\theta(t) - \theta(t')| \leqslant 2\varepsilon + \|g(t+\cdot) - g(t'+\cdot)\|_{L^p} \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

ce qui achève la preuve du lemme.

□

Preuve du Théorème 4 : Comme dans la preuve du Théorème 2, le fait que φ_k soit positive et d'intégrale 1 permet d'écrire pour pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} |f * \varphi_k(x) - f(x)| & = & \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k(t) \, dt - f(x) \right| \\ & = & \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\varphi_k(t) \, dt \right| \\ & \leqslant & \int_{\mathbb{R}^n} |(f(x-t) - f(x))\varphi_k(t)| \, dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|\varphi_k(t) \, dt. \end{array}$$

Par l'inégalité de Jensen [1] appliquée à la mesure de probabilité $\varphi_k(t)\,dt$ avec la fonction convexe $t \mapsto |t|^p$,

$$|f * \varphi_k(x) - f(x)|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \varphi_k(t) \, dt.$$

1. L'inégalité qui suit peut aussi se montrer en utilisant l'inégalité de Hölder.

Par le théorème de Fubini-Tonnelli appliqué à la fonction mesurable positive $(x, y) \mapsto |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_k(y)$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * \varphi_k(x) - f(x)|^p \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx \, \varphi_k(t) \, dt \right).$$

On introduit la fonction $\theta(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx$ de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * \varphi_k(x) - f(x)|^p \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \theta(-t) \varphi_k(t) \, dt = \theta * \varphi_k(0).$$

D'après le lemme, θ est uniformément continue. De plus, en utilisant l'inégalité $|a+b|^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ valable pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a par invariance de la mesure de Lebesgue par translation :

$$|\theta(t)| \leqslant 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x+t)|^p + |f(x)|^p \right) \, dx = 2^p \|f\|_{L^p}^p.$$

On peut donc appliquer le théorème 2 à la fonction uniformément continue bornée θ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * \varphi_k(x) - f(x)|^p \, dx \leqslant \theta * \varphi_k(0) \to \theta(0) = 0, \quad k \to +\infty.$$

ce qui montre que $(f * \varphi_k)_k$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

□

Corollaire 2 *Les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve : Comme les fonctions $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer qu'on peut approcher toute fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, introduisons une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive et non nulle. Quitte à la multiplier par une constante, on peut aussi supposer que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. On pose alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Alors $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est une partition de l'unité constituée de fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Comme $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f_\varepsilon := f * \varphi_\varepsilon$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Comme f et φ_ε sont à support compact, $f * \varphi_\varepsilon$ est encore à support compact. Enfin, comme $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la Proposition 9 implique que $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ce qui conclut la preuve.

□

2.3 Appendice : ensembles et fonctions boréliennes et Lebesgue mesurables

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 3 *Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit* négligeable *s'il est contenu dans un ensemble mesurable de mesure nulle $\mu(A) = 0$.*

Ainsi, un ensemble négligeable n'est pas forcément mesurable.

Exercice 8 *Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. En particulier, dans $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue, un ensemble dénombrable est négligeable.*

Définition 4 *On dit que $\mathcal{A}$ est complète si tout ensemble négligeable est mesurable.*

On note

$$\overline{\mathcal{A}} = \{E \subset X : \text{il existe } E_-, N \in \mathcal{A} \text{ tels que } \mu(N) = 0 \text{ et } E_- \subset E \subset E_- \cup N\}.$$

Théorème 5 *La famille de parties $\overline{\mathcal{A}}$ est une tribu complète et μ admet une et une seule extension $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ qui soit une mesure sur $\overline{\mathcal{A}}$.*

On dit que $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ est la complétion de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

La preuve du Théorème 5 peut être traitée sous forme d'exercice, voir [3, Exercice 2.33].

Définition 5 *La tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ (l'ensemble des parties Lebesgue mesurables) est obtenue par complétion de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

On utilise la tribu de Lebesgue pour s'assurer que tous les ensembles négligeables sont mesurables. Il est possible de montrer que la plupart des ensembles Lebesgue mesurables ne sont pas boréliens, par exemple par un argument de cardinalité, voir [5, Remarques 2.21]. Par ailleurs, il est difficile de construire des ensembles qui ne soient pas Lebesgue mesurables. Cependant, l'axiome du choix permet de montrer qu'il en existe, voir [5, Théorème 2.22].

Remarque 12 *Rappelons également que l'image d'un borélien par une application borélienne (même continue, même linéaire) n'est pas un borélien en général. Considérons par exemple la projection $\Pi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x \in \mathbb{R}$. Il n'est pas vrai*[2] *que la projection d'un ensemble borélien de $\mathbb{R}^2$ soit un borélien de $\mathbb{R}$. En revanche, l'image par Π d'un ensemble borélien est Lebesgue mesurable*[3]*. Notons enfin que la projection d'un ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}^2$ n'est pas toujours un ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}$.*

Pour ce-dernier point, on peut donner un argument simple. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble qui n'est pas Lebesgue mesurable et $N = \{0\}$. Alors le produit $A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est contenu dans l'ensemble négligeable $\mathbb{R} \times \{0\}$. Comme la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est complète, on en déduit que $A \times \{0\}$ est Lebesgue mesurable dans $\mathbb{R}^2$. Pourtant, sa première projection $\Pi(A \times \{0\}) = A$ n'est pas Lebesgue mesurable.

Une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est borélienne si l'image réciproque de tout *borélien* de $\mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$. Elle est Lebesgue mesurable si l'image réciproque de tout *borélien* de $\mathbb{R}$ est une partie Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}^N$.

Remarque 13 *On peut construire un homéomorphisme $f : [0, 1] \to [0, 1]$ et un ensemble de mesure de Lebesgue nulle X tel que $f^{-1}(X)$ ne soit pas Lebesgue mesurable. Il est donc préférable de* ne pas *définir une fonction mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) comme une fonction dont l'image réciproque de tout ensemble Lebesgue mesurable soit Lebesgue mesurable.*

Dans le cadre du théorème de Fubini, mentionnons une difficulté liée à la complétion. Le produit de deux espaces mesurés complets n'est pas toujours complet. Observons par exemple le cas de la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble qui n'est pas Lebesgue mesurable. Comme on l'a vu dans l'argument suivant la Remarque 12, $A \times \{0\}$ est Lebesgue mesurable, c'est-à-dire dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Si $A \times \{0\}$ appartenait à $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$, alors[4] A appartiendrait à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, d'où la contradiction. En conclusion, $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. En revanche, on a bien $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Il s'agit d'un résultat délicat à démontrer.
3. Résultat également difficile à prouver
4. On utilise ici que si $A, B \subset \mathbb{R}$ vérifient $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})$, alors A et B appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, voir [5, Théorème 8.2].

Dans le théorème de Fubini, il faut donc prendre des précautions lorsqu'on l'applique avec des fonctions qui sont Lebesgue mesurables, mais pas nécessairement boréliennes, en mettant partout des *presque partout* ; pour un énoncé précis, voir [5, Théorème 8.12]. De manière équivalente, on peut se ramener systématiquement à des fonctions boréliennes, en utilisant le fait qu'une fonction Lebesgue mesurable est égale hors d'un ensemble négligeable, à une fonction borélienne, voir [5, Lemme 1, page 206].

Chapitre 3

Applications de la convolution

3.1 Convolution et équations aux dérivées partielles

Une bonne référence pour ce qui suit est [4, Chapitre 2, Théorème 1].

On définit sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ la fonction

$$\Phi(x) := \frac{-1}{2\pi} \ln |x|.$$

Ici, $|x|$ désigne la norme euclidienne de x. En passant en coordonnées polaires, on voit que Φ est dans tous les $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $p \geqslant 1$. On note également

Lemme 2 *La fonction Φ est harmonique sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.*

Preuve : On se souvient que $\partial_i |x| = \frac{x_i}{|x|}$, $i = 1, 2$. Etant donné une fonction $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, on obtient donc

$$\partial_i(g(|x|)) = g'(|x|)\frac{x_i}{|x|} \quad , \quad \partial_{ii}(g(|x|)) = g''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + g'(|x|)\frac{|x| - x_i \frac{x_i}{|x|}}{|x|^2}.$$

En sommant sur $i = 1, 2$, il vient

$$\Delta(g(|x|)) = \sum_{i=1}^{2} \left(g''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + g'(|x|)\frac{|x| - x_i \frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} \right) = g''(|x|) + \frac{g'(|x|)}{|x|}.$$

Lorsqu'on prend $g(t) = \ln t$, on obtient $\Delta(g(|x|)) = 0$, comme attendu.

□

Théorème 6 *Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$. Alors $u := \Phi * f$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et*

$$-\Delta u = f \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Preuve :

Etape 1 Observons que la convolution est bien définie. Cela ne découle pas immédiatement du chapitre précédent car Φ n'est dans aucun $L^p(\mathbb{R}^2)$, $p \geqslant 1$. Comme f est à support compact, il existe $L > 0$ tel que f s'annule hors de la boule $B(0, L)$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Alors la fonction $y \mapsto \Phi(x - y)f(y)$ est nulle hors de $B(0, L)$. Comme la fonction $\Phi(x - \cdot)$ est intégrable sur tout compact, et que f est bornée, on en déduit que la fonction $y \mapsto \Phi(x - y)f(y)$ est intégrable. Ainsi, la convolution $\Phi * f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et on a par changement de variables

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y)f(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^2\backslash\{0\}} \Phi(y)f(x - y)\, dy.$$

Etape 2 Etablissons à présent la régularité de u. La fonction $h : (y,x) \mapsto \Phi(y)f(x-y)$ est C^∞ sur $(\mathbb{R}^2\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ avec pour tout $i,j \in \{1,2\}$,

$$|\partial_i h(y,x)| \leqslant |\Phi(y)||\partial_i f|(x-y),$$

$$|\partial_{ij} h(y,x)| \leqslant |\Phi(y)||\partial_{ij} f|(x-y).$$

Soit $R > 0$. Alors pour tout $x \in B(0,R)$, $f(x-y) = 0$ dès que $y \notin B(0,R+L)$. Ainsi

$$|\partial_i h(y,x)| + |\partial_{ij} h(y,x)| \leqslant 2|\Phi(y)|\|f\|_{C^2}\chi_{B(0,R+L)}(y),$$

où $\chi_{B(0,R+L)}$ désigne la fonction caractéristique de la boule $B(0,R+L)$. Comme la fonction $y \mapsto |\Phi(y)|\chi_{B(0,R+L)}(y)$ est intégrable sur $B(0,R+L)$, le théorème de dérivation sous le signe intégral implique que u est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et de plus

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y)\Delta f(x-y)\,dy.$$

Etape 3 Montrons enfin que $-\Delta u = f$. On écrit $\Delta u(x) = I_\varepsilon + J_\varepsilon$, avec

$$I_\varepsilon := \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta f(x-y)\,dy \quad , \quad J_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta f(x-y)\,dy.$$

Alors

$$|I_\varepsilon| \leqslant C\|f\|_{C^2(\mathbb{R}^2)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\,dy \leqslant C\varepsilon^2|\ln\varepsilon|. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, par intégration par parties (voir au besoin la section appendice de ce chapitre),

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta f(x-y)\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)} \langle \nabla\Phi(y), \nabla f(x-y)\,dy \\
&\quad\quad + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(\sigma)\partial_\nu f(x-\sigma)\,d\sigma \\
&=: K_\varepsilon + L_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ν désignant la normale unitaire rentrante sur $\partial B(0,\varepsilon)$. On vérifie que

$$|L_\varepsilon| \leqslant \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(\sigma)|\,d\sigma \leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|.$$

Une autre intégration par parties pour le terme K_ε donne

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)} \Delta\Phi(y)f(x-y)\,dy - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_\nu\Phi(\sigma)f(x-\sigma)\,d\sigma \\
&= -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \partial_\nu\Phi(\sigma)f(x-\sigma)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Ici, on a utilisé le fait que Φ est une fonction harmonique sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Maintenant, $\nabla\Phi(y) = \frac{-1}{2\pi}\frac{y}{|y|^2}$ et $\nu = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$ sur $\partial B(0,\varepsilon)$. Donc $\partial_\nu\Phi(y) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$. Il vient donc

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{|\partial B(x,\varepsilon)|}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(\sigma)\,d\sigma.$$

Ainsi,

$$|K_\varepsilon + f(x)| = \frac{1}{|\partial B(x,\varepsilon)|} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |f(\sigma) - f(x)|\, d\sigma.$$

Par continuité de f, ce dernier terme tend vers 0, ce qui conclut la preuve.

□

Remarque 14 *Cette preuve montre en fait que $-\Delta\Phi = \delta_0$ sur $\mathbb{R}^2$ au sens des distributions (ici, δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0).*

Les fonctions harmoniques vérifient une propriété très importante : la propriété de la moyenne.

Proposition 10 *Si $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est harmonique, alors*

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r(\cos\theta, \sin\theta))\, d\theta.$$

Preuve : Soit

$$\phi(r) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u\, d\sigma.$$

Alors par le théorème de dérivation sous le signe intégral (cas d'une fonction C^1 en ses deux variables intégrée sur un segment), on a

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \nabla u(x + r(\cos\theta, \sin\theta), (\cos\theta, \sin\theta) \rangle\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(x,r)} \partial_\nu u\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne, ν désigne la normale sortante. Ainsi, en utilisant que div $\nabla u = \Delta u$, on obtient

$$\phi'(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy = 0.$$

Donc ϕ est constante et $\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = u(x)$, ce qui achève la preuve.

□

On peut en déduire qu'une fonction harmonique est en fait C^∞.

Proposition 11 *Si une fonction continue $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété de la valeur moyenne sur toute boule $B(x,r) \subset \mathbb{R}^2$, alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

Preuve : On introduit une approximation de l'identité $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ radiale, c'est-à-dire de la forme $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\rho(|x|/\varepsilon)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $\varepsilon > 0$. Ici, ρ est choisi $C_c^\infty(\mathbb{R})$, à valeurs positives, nul [1] dans un voisinage de 0. De plus, on exige $\int_0^\infty r\rho(r)\, dr = 1/(2\pi)$. Cela garantit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \eta_\varepsilon(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon^2} \rho\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^\infty \rho(r) r\, dr = 1.$$

1. Cette condition, liée au fait que $|\cdot|$ n'est pas différentiable en 0, garantit que η_ε est néanmoins lisse au voisinage de 0, puisqu'elle y coïncide avec la fonction nulle.

Soit $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon$. Alors $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \eta_\varepsilon(y) u(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right) u(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,r)} u(\sigma)\, d\sigma \right) dr \\
&= \frac{2\pi}{\varepsilon^2} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r\, dr \\
&= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)\, dy = u(x).
\end{aligned}$$

Donc $u_\varepsilon = u$ sur $\mathbb{R}^2$ ce qui implique que u est C^∞.

□

Dans le même esprit, on peut étudier l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ et [4, Chapitre 2] reste une excellente référence. Plus précisément, on définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$ la fonction

$$\Phi(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Il est facile de vérifier que pour tout $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,t)\, dx = 1.$$

On définit alors pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, la fonction

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy$$

qui est C^∞ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et est solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$:

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

Si de plus g est continue, alors le prolongement de u par g à $\mathbb{R} \times \{0\}$ est continu sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.

3.2 Convolution de mesures et indépendance

Définition 6 (Convolution de mesures) *Soit μ et ν deux mesures finies (positives) sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. On définit la convolution de μ et ν comme étant la fonction $\mu * \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to [0,+\infty]$ définie par*

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \chi_A(x+y)\, d\mu \otimes \nu(x,y) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Proposition 12 *Avec les notations de la définition précédente,*

1. *la fonction $\mu * \nu$ est une mesure finie,*
2. *pour tout $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\, d\mu * \nu = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi(x+y)\, d\mu \otimes \nu(x,y), \tag{3.2}$$

3. *si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu * \nu$ est une probabilité,*
4. *si $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sont positives et sommables, et $\mu = f\lambda_N$, $\nu = g\lambda_N$ (où λ_N désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$), on a $\mu * \nu = (f * g)\lambda_N$.*

Preuve : Notons $U : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\chi_A \circ U$ est mesurable positive et on peut donc définir $\mu * \nu(A) \in [0, \infty]$. Si $A = \emptyset$, alors $\chi_A \equiv 0$ et donc $\mu * \nu(\emptyset) = 0$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints, alors $\chi_{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{A_n}$ et donc par le théorème de convergence monotone, $\mu * \nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu * \nu(A_n)$. Par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{A-y}(x)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{A-x}(y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x). \tag{3.3}$$

En particulier, si $A = \mathbb{R}^N$,

$$\mu * \nu(\mathbb{R}^N) = \mu(\mathbb{R}^N)\nu(\mathbb{R}^N), \tag{3.4}$$

et donc $\mu * \nu$ est une mesure finie.

L'identité (3.2) est vraie par définition lorsque φ est la fonction caractéristique d'un borélien, et donc par linéarité lorsque φ est une fonction simple, et donc par le théorème de convergence monotone lorsque φ est mesurable positive, puis en décomposant toute fonction borélienne bornée en partie positive et négative, on obtient (3.2) en toute généralité.

Si μ et ν sont des probabilités, alors (3.4) montre qu'il en est de même pour $\mu * \nu$.

Enfin, si $\mu = f\lambda_N$, $\nu = g\lambda_N$, alors par (3.3)

$$\begin{aligned}
\mu * \nu(A) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x+y) f(x)\, dx \right) g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x) f(x-y)\, dx \right) g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_A f(x-y)\, dx \right) g(y)\, dy \\
&= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé le théorème de Fubini, qui est bien licite puisque par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_A |f(x-y)|\, dx \right) |g(y)|\, dy \leqslant \|f\|_{L^{\mathbb{R}^N}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

Ainsi, $f\lambda_N * g\lambda_N = (f * g)\lambda_N$.

□

Proposition 13 *Le produit de convolution de deux mesures finies est commutatif, associatif, a pour neutre la masse de Dirac δ_0 en 0. De plus, pour toutes mesures μ, ν, κ, pour tout $\alpha \in [0, 1]$,*

$$\mu * (\alpha\nu + (1-\alpha)\kappa) = \alpha\mu * \nu + (1-\alpha)\mu * \kappa.$$

Preuve : La commutativité est une conséquence de (3.3). Si μ, ν, κ sont trois mesures positives finies, alors par (3.3) et le théorème de Fubini, pour tout borélien A,

$$\begin{aligned}
(\mu * \nu) * \kappa(A) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x+y)\, d(\mu * \nu)(x) \right) d\kappa(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x_1 + x_2 + y)\, d\mu(x_1) \right) d\nu(x_2) \right) d\kappa(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{3N}} \chi_A(x+y+z)\, d(\mu \otimes \nu \otimes \kappa)(x, y, z) = \mu * (\nu * \kappa)(A).
\end{aligned}$$

Par ailleurs,
$$\mu * \delta_0(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x+y)\, d\mu(x) \right) d\delta_0(y) = \mu(A)$$
ce qui montre que δ_0 est un neutre pour la convolution. Enfin, pour tout μ, ν, κ, pour tout $\alpha \in [0,1]$, en notant $U(x,y) = x+y$,
$$\begin{aligned}
\mu * (\alpha\nu + (1-\alpha)\kappa)(A) &= (\mu \otimes (\alpha\nu + (1-\alpha)\kappa)(U^{-1}(A))) \\
&= (\alpha\mu \otimes \nu + (1-\alpha)\mu \otimes \kappa)(U^{-1}(A)) \\
&= \alpha(\mu \otimes \nu)(U^{-1}(A)) + (1-\alpha)(\mu \otimes \kappa)(U^{-1}(A)) \\
&= \alpha\mu * \nu(A) + (1-\alpha)\mu * \nu(A),
\end{aligned}$$
ce qui achève la preuve.

□

Remarque 15 *Comme le produit de convolution est commutatif, on peut définir le produit $\mu_1 * \cdots * \mu_k$ sans ambiguïté. En fait,*
$$\mu_1 * \cdots * \mu_k(A) = \int_{\mathbb{R}^{kN}} \chi_A(x_1 + \cdots + x_k)\, d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k)(x_1, \ldots, x_k).$$

Désormais, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Proposition 14 *Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. La loi de la somme $X+Y$ est donnée par le produit de convolution $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y$ des lois $\mathbb{P}^X$ et $\mathbb{P}^Y$.*

Preuve : Par définition,
$$\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x+y)\, d(\mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y)(x,y).$$
Par indépendance,
$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x+y)\, d(\mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x+y) d\mathbb{P}^{(X,Y)}(x,y) \quad = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A \circ U(x,y) d\mathbb{P}^{(X,Y)}(x,y),$$
où $U(x,y) = x+y$. Par le théorème de transfert, ce dernier terme est
$$\mathbb{E}(\chi_A \circ U(X,Y)) = \mathbb{P}(U(X,Y) \in A) = \mathbb{P}(X+Y \in A),$$
d'où la proposition.

□

Exemple 2
1. *La convolée de deux masses de Dirac $\delta_x * \delta_y$ est la masse de Dirac δ_{x+y}.*
2. *Soient X et Y indépendantes, où X suit la loi de Poisson de paramètre λ (c'est-à-dire $\mathbb{P}([X = k]) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$) et Y la loi de Poisson de paramètre λ'. Alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.*

On pourra insérer l'exemple suivant ([2, Exercice 2.15]) dans les leçons 236, 239, 263.

Exemple 3 *Soient X et Y deux v.a.i. sur $\mathbb{R}$ de même loi de densité $\gamma(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Alors le produit XY a la densité $\frac{2}{\pi^2}\frac{\ln|x|}{x^2-1}$, $\ln|X|$ a la densité f donnée par $f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{e^x+e^{-x}}$. On en déduit un calcul du produit de convolution :*
$$f * f(x) = \frac{4}{\pi^2}\frac{x}{e^x + e^{-x}}.$$

3.3 D'autres développements pour les intégrales à paramètres

La méthode de Laplace [6, Chapitre IX, Section 6.1] permet d'obtenir des développements asymptotiques pour des fonctions définies à partir d'une intégrale. Elle s'appuie sur la formule de Taylor avec reste intégral. Elle peut apparaître dans les leçons 218, 224, 228, 239.

Les fonctions Gamma et d'Airy sont deux célèbres fonctions définies comme intégrales à paramètres, voir [6, Chapitre VI].

3.4 Appendice : la formule de Stokes sur le disque

On définit $\Phi : (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. C'est une application C^∞ sur son domaine. Comme le théorème de changement de variables dans une intégrale multiple exige des C^1 difféomorphismes, on va être amené à restreindre Φ à un sous-domaine. En effet, la différentielle de Φ est

$$D\Phi(r,\theta) : (t,\mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto (t\cos\theta - r\mu\sin\theta, t\sin\theta + r\mu\cos\theta).$$

La jacobienne de Φ dans la base canonique est donc

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Le jacobien est r. En particulier, le jacobien ne s'annule que pour $r = 0$. Le théorème d'inversion locale implique alors que pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ (noter qu'on a exclu $r = 0$), Φ est un C^1 difféomorphisme d'un VOISINAGE V de (r,θ) sur $\Phi(V)$. Un difféomorphisme local ne suffit pas pour appliquer le théorème de changement de variables. Un difféomorphisme global est nécessaire. On a donc naturellement recours au théorème d'inversion globale, qui exige non seulement que Φ ait une différentielle inversible en tout point de son domaine, mais aussi que Φ soit injective sur son domaine. On avait déjà restreint le domaine initial de Φ à $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Il va falloir encore en enlever pour assurer l'injectivité (mais bien sûr, on veut en enlever le minimum, pour que le changement de variables en coordonnées polaires puisse s'appliquer sur un maximum de domaines).

Si $(r,\theta),(r',\theta') \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ vérifient $r\cos\theta = r'\cos\theta', r\sin\theta = r'\sin\theta'$, alors en élevant au carré ces deux égalités et en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient $r = r'$. Ainsi, $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$. On voit donc que si on restreint Φ à $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, l'application Φ devient injective. On a enlevé 0 et π pour que le domaine de Φ soit un ouvert : le théorème d'inversion (locale ou globale) s'applique à une fonction définie sur un ouvert.

En conclusion, on obtient que Φ est un C^∞ difféomorphisme de l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ sur son image (dont on sait seulement pour l'instant que c'est un ouvert, parce que l'image d'un ouvert par un difféomorphisme, et même par un homéomorphisme, est un ouvert !).

Déterminons à présent l'image de Φ, c'est-à-dire l'ensemble $U := \Phi(]0,+\infty[\times]0,2\pi[)$ (on en aura besoin pour appliquer le théorème de changement de variables). Un dessin nous suggère que $U = \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}^+ \times \{0\})$. Montrons-le. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}^+ \times \{0\})$. Posons $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $X := \frac{x}{r}, Y := \frac{y}{r}$ (noter que $r \neq 0$ puisque $(x,y) \neq (0,0)$). Alors $X^2 + Y^2 = 1$. Donc il existe un unique $\theta \in [0,2\pi[$ tel que $X = \cos\theta, Y = \sin\theta$. Mais $\theta \neq 0$ car $(x,y) \notin \mathbb{R}^+ \times \{0\}$. Ainsi, il existe bien $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ tel que $\Phi(r,\theta) = (x,y)$. Donc U contient $\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}^+ \times \{0\})$. Réciproquement, si $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\}$ et s'il existe $r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$ tels que $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, on prétend que $r = 0$ ou bien $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. En effet, on a forcément $x^2 + y^2 = r^2$. Si $r = 0$ c'est terminé. Sinon, le fait que $y = 0$ et $x > 0$ implique bien que $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. On a montré que $U = \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}^+ \times \{0\})$.

En résumé, Φ est un C^1 difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ sur U de jacobien r. On peut donc l'utiliser comme changement de variable.

Pour tout $R > 0$, pour toute fonction $f \in L^1(B(0,R))$, on a (en utilisant le fait que $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue bidimensionnelle)

$$\int_{B(0,R)} f(x)\,dx = \int_{B(0,R)\cap U} f(x)\,dx$$
$$= \int_{\Phi^{-1}(B(0,R)\cap U)} f(\Phi(r,\theta))r\,dr\,d\theta = \int_{r=0}^{R} r\,dr \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta.$$

Dans la dernière ligne, on a aussi utilisé le théorème de Fubini (qu'il est légitime d'utiliser ici : pour le voir, il suffit de commencer par écrire ce qui précède avec $|f|$ au lieu de f et d'utiliser le fait que $f \in L^1(B(0,R))$). Parfois, on écrit

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta = \int_{S^1} f(r\sigma)\,d\sigma,$$

où S^1 désigne le cercle unité.

Exercice 9 *Pour quelles valeurs de $a > 0$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^a}$ est-elle intégrable sur $B(0,1)$? sur $\mathbb{R}^2\backslash B(0,1)$? sur $\mathbb{R}^2$?*

Sur le cercle $S^1(0,r)$ de centre 0 et de rayon $r > 0$, on écrit $\int_{S^1(0,r)} f(\sigma)\,d\sigma = r\int_{S^1} f(r\sigma)\,d\sigma = r\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$. On en déduit la formule de Stokes suivante :

Proposition 15 *Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout $R > 0$,*

$$\int_{B(0,R)} g(x)\nabla f(x)\,dx = \int_{\partial B(0,R)} g(\sigma)f(\sigma)\nu_\sigma\,d\sigma - \int_{B(0,R)} f(x)\nabla g(x)\,dx, \tag{3.5}$$

où pour tout $\sigma \in \partial B(0,R)$, $\nu_\sigma = \frac{\sigma}{|\sigma|}$.

Preuve : Il s'agit d'une égalité entre intégrales vectorielles, définies coordonnées par coordonnées. Introduisons pour tout $(r,\theta) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}$, la base orthonormée (u_r, u_θ) définie par

$$u_r := D\Phi(r,\theta)(1,0) \quad , \quad u_\theta := \frac{1}{r}D\Phi(r,\theta)(0,1).$$

Posons ensuite $h(r,\theta) = f(\Phi(r,\theta))$ et de même $k(r,\theta) = g(\Phi(r,\theta))$. On a alors

$$\partial_r h(r,\theta) = \langle\nabla f(\Phi(r,\theta)), u_r\rangle \quad , \quad \partial_\theta h(r,\theta) = r\langle\nabla f(\Phi(r,\theta)), u_\theta\rangle.$$

On en déduit pour tout $x \in U$

$$\nabla f(x) = \partial_r h(r,\theta)u_r + \frac{1}{r}\partial_\theta h(r,\theta)u_\theta.$$

Il est sous-entendu dans les lignes précédentes que u_r, u_θ sont évalués au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par passage en coordonnées polaires, il vient

$$\int_{B(0,R)} g(x)\nabla f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} u_r\,d\theta \int_0^R rk(r,\theta)\partial_r h(r,\theta)\,dr + \int_0^R dr \int_0^{2\pi} k(r,\theta)\partial_\theta h(r,\theta)u_\theta\,d\theta.$$

Par intégrations par parties, on a

$$\int_0^R rk(r,\theta)\partial_r h(r,\theta)\,dr = Rk(R,\theta)h(R,\theta) - \int_0^R (k(r,\theta)h(r,\theta) + r\partial_r k(r,\theta)h(r,\theta))\,dr.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi} u_r \, d\theta \int_0^R rk(r,\theta)\partial_r h(r,\theta)\, dr = \int_{\partial B(0,R)} f(\sigma)g(\sigma)\nu_\sigma \, d\sigma \\ - \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (k(r,\theta)h(r,\theta) + r\partial_r k(r,\theta)h(r,\theta))u_r \, d\theta.$$

De même, par intégrations par parties, cette fois par rapport à θ, on obtient

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} k(r,\theta)\partial_\theta h(r,\theta) u_\theta \, d\theta = - \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \partial_\theta k(r,\theta)h(r,\theta)u_\theta \, d\theta \\ + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R k(r,\theta)h(r,\theta)u_r \, dr.$$

(le terme de bord s'annule par 2π périodicité et on a aussi utilisé que $\partial_\theta u_\theta = -u_r$). En sommant ces deux quantités, on a finalement

$$\int_{B(0,R)} g(x)\nabla f(x)\, dx = \int_{\partial B(0,R)} f(\sigma)g(\sigma)\nu_\sigma \, d\sigma - \int_{B(0,R)} f(x)\nabla g(x)\, dx.$$

□

En prenant le produit scalaire de (3.5) avec les vecteurs de la base canonique e_1, e_2, on obtient pour $i = 1, 2$:

$$\int_{B(0,R)} g(x)\partial_i f(x)\, dx = \int_{\partial B(0,R)} g(\sigma)f(\sigma)\langle \nu_\sigma, e_i\rangle \, d\sigma - \int_{B(0,R)} f(x)\partial_i g(x)\, dx.$$

Appliquant cette identité aux deux composantes d'une fonction vectorielle $F = (f_1, f_2)$ puis en sommant les deux égalités obtenues, il vient finalement

$$\int_{B(0,R)} g(x) \text{ div } F(x)\, dx = \int_{\partial B(0,R)} g(\sigma)\langle F(\sigma), \nu_\sigma\rangle \, d\sigma - \int_{B(0,R)} \langle \nabla g(x), F(x)\rangle \, dx.$$

On rappelle que l'opérateur div est défini par div $F(x) = \partial_1 f_1(x) + \partial_2 f_2(x)$.

Tous les calculs précédents peuvent être généralisés sans difficulté au cas où le disque $B(0, R)$ est remplacé par un anneau $B(0, R)\backslash B(0, r)$, voire au cas de l'extérieur d'une boule $\mathbb{R}^2\backslash B(0, R)$. C'est ce dernier cas qui a été utilisé dans la première section.

Chapitre 4

Convergences

Dans tout ce chapitre, on se donne une espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dans le cas où on considère un espace de probabilités, on adoptera la notation $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ (on suppose donc que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$).

Une bonne référence pour tout ce chapitre est [3].

4.1 Convergence p.p. et convergence en mesure

Proposition 16 *On suppose $\mu(X) < \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ convergeant presque partout vers une fonction f. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. La suite de fonctions $(\chi_{[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \chi_{[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]} \leqslant 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable puisque X est de mesure finie. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_X \chi_{[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]} = \lim_{n\to+\infty} \mu([|f_n - f| \geqslant \varepsilon]),$$

ce qui achève la preuve.

□

Voici une amélioration de la proposition 16.

Théorème 7 (Egorov) *On suppose $\mu(X) < \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ convergeant presque partout vers une fonction f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $X\backslash A$.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$A_{n,j} = [|f - f_n| \geqslant \frac{1}{j}] \quad \text{et} \quad B_{n,j} = \cup_{p\geqslant n} A_{p,j}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $(B_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Comme $\mu(B_{0,j}) < \infty$, on peut donc écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_{n,j}) = \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}).$$

Or si $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant n$ tel que $|f(x) - f_p(x)| \geqslant \frac{1}{j}$ et donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $f(x)$, ce qui ne peut advenir que si x appartient à l'ensemble négligeable où f_n ne tend pas vers f. Donc $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}) = 0$.

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(B_{n,j}) \leqslant \varepsilon 2^{-j}$. Posons alors $A := \cup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n_j,j}$. D'une part, $\mu(A) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \mu(B_{n_j,j}) \leqslant \varepsilon$. D'autre part, pour tout $x \in A^c$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour tout $p \geqslant n_j$, on a $|f(x) - f_p(x)| < \frac{1}{j}$. De plus, n_j ne dépend pas de x. On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A^c.

□

Remarque 16 *Le théorème d'Egorov est faux lorsqu'on ne suppose plus l'ensemble de mesure finie. Considérer par exemple $f_n := \chi_{[n,+\infty[}$. Cette suite tend p.p. vers 0 mais pas en mesure, et donc pas uniformément hors d'aucun ensemble de mesure finie.*

Proposition 17 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ convergeant en mesure vers une fonction f. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f p.p.*

Preuve : On construit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\left[|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k+1}\right]\right) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \mu([|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k+1}]) < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli (rappelé ci-dessous) permet d'affirmer que

$$\mu\left(\cap_{k\in\mathbb{N}} \cup_{\ell\geqslant k} \left[|f_{n_\ell} - f| > \frac{1}{\ell+1}\right]\right) = 0.$$

Cela implique que pour presque tout $x \in X$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\ell \geqslant k$, $|f_{n_\ell}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\ell+1}$. Ainsi, $\lim_{\ell\to+\infty} f_{n_\ell}(x) = f(x)$, ce qui conclut la preuve.

□

Lemme 3 (Borel-Cantelli) *Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables de X telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$. Alors $\mu(\cap_{k\in\mathbb{N}} \cup_{\ell\geqslant k} A_\ell) = 0$.*

Preuve : Pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, $\mu(\cup_{\ell\geqslant k_0} A_\ell) \leqslant \sum_{\ell\geqslant k_0} \mu(A_\ell)$. Le membre de droite est le reste d'une série convergente, qui tend vers 0. Comme $\cap_{k\in\mathbb{N}} \cup_{\ell\geqslant k} A_\ell \subset \cup_{\ell\geqslant k_0} A_\ell$, on obtient

$$\mu(\cap_{k\in\mathbb{N}} \cup_{\ell\geqslant k} A_\ell) \leqslant \limsup_{k_0\to+\infty} \mu(\mu(\cup_{\ell\geqslant k_0} A_\ell) = 0.$$

Le lemme est démontré.

□

La convergence presque partout n'implique pas la convergence en mesure :

Exemple 4 (La bosse glissante) *On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p = 0, \ldots, 2^k - 1$ la fonction $f_{k,p} = \chi_{(p2^{-k},(p+1)2^{-k})}$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(k,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $p \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ et $n = 2^k + p$. On pose alors $g_n := f_{k,p}$. Alors $\|g_n\|_{L^1(0,1)} = 2^{-k}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_{L^1(0,1)} = 0$ mais $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas p.p. vers 0.*

4.2 Convergence dans L^1

Proposition 18 (Absolue continuité de l'intégrale de Lebesgue) *Soit $f \in L^1(X)$.*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(A) \leqslant \delta$, alors $\int_A |f| \leqslant \varepsilon$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(C) < +\infty$, $\sup_C |f| < \infty$ et $\int_{X\setminus C} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon$.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de convergence dominée, il existe $M > 0$ tel que $\int_{[|f|>M]} |f| \leqslant \varepsilon$. On pose $\delta := \varepsilon/M$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ tle que $\mu(A) < \delta$, on a

$$\begin{aligned}\int_A |f| &= \int_{A\cap[|f|>M]} |f| + \int_{A\cap[|f|\leqslant M]} |f| \\ &\leqslant \int_{[|f|>M]} |f| + M|A| \leqslant 2\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la première assertion.

Pour la preuve de la seconde assertion, on introduit pour tout $M > 0$ l'ensemble $C_M := [1/M \leqslant |f| \leqslant M]$. Alors $X\backslash C_M = [|f| < 1/M] \cup [|f| > M]$. Par le théorème de convergence dominée, il existe $M_0 > 0$ tel que $\int_{X\backslash C_{M_0}} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon$. Sur C_{M_0}, $|f| \leqslant M_0$. Enfin,

$$\frac{\mu(C_{M_0})}{M_0} \leqslant \int_{C_{M_0}} |f| \leqslant \int_X |f| < \infty,$$

ce qui montre que $\mu(C_{M_0}) < \infty$ et achève la preuve.

□

Remarque 17 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$ converge dans $L^1(X)$ vers une fonction f, alors la convergence a aussi lieu en mesure.*

Preuve : D'après l'inéaglité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mu([|f_n - f| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f|$$

et le membre de droite tend vers 0 par hypothèse.

□

Définition 7 *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_i)_{i\in I}$ est équiintégrable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mu(A) < \delta$, pour tout $i \in I$, on a $\int_A |f_i| \leqslant \varepsilon$.*

Théorème 8 (Vitali (pour la convergence en mesure)) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$ et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

1. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$en mesure,*
2. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable,*
3. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$.*

Alors $f \in L^1(X)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^1(X)$.

Preuve : Montrons d'abord que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^1(X)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mu(A) < +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $B \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mu(B) \leqslant \delta$, on a $\int_B |f_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mu\left(\left[|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}\right]\right) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Or $[|f_n - f_m| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mu(A)}] \subset [|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}] \cup [|f_m - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}]$. Donc pour tout $n, m \geqslant n_0$,

$$\mu\left(\left[|f_n - f_m| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mu(A)}\right]\right) \leqslant \mu\left(\left[|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}\right]\right) + \mu\left(\left[|f_m - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}\right]\right) \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

On en déduit

$$\int_{[|f_n - f_m| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mu(A)}]} |f_n| + |f_m| \leqslant 2\varepsilon.$$

Alors pour tout $n, m \geqslant n_0$,

$$\int_X |f_n - f_m| \leqslant \int_{[|f_n - f_m| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mu(A)}] \cup A^c} |f_n| + |f_m| + \int_{[|f_n - f_m| < \frac{\varepsilon}{\mu(A)}] \cap A} |f_n - f_m| \leqslant 5\varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1. Comme L^1 est un espace de Banach, elle converge vers une fonction $g \in L^1(X)$. Cela implique la convergence en mesure et donc $f = g$ p.p. En conclusion, $f \in L^1(X)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^1(X)$.

$\square$

Remarque 18 *La réciproque du théorème de Vitali (version convergence en mesure) est également vraie : si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(X)$ converge dans $L^1(X)$ vers une fonction $f \in L^1(X)$, alors les hypothèses du théorème de Vitali sont vérifiées.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_{L^1(X)} \leqslant \varepsilon$. Par absolue continuité de l'intégrale de Lebesgue (voir proposition 18), il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$, si $\mu(A) < \delta$, alors $\int_A |f| \leqslant \varepsilon$ et $\int_A |f_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \leqslant n_0$. De plus, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\int_A |f_n| \leqslant \int_X |f_n - f| + \int_A |f| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui montre l'équiintégrabilité.

Par le théorème de convergence dominée, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\int_{A^c} |f| \leqslant \varepsilon$ et pour tout $n \leqslant n_0$, $\int_{A^c} |f_n| \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$

$$\int_{A^c} |f_n| \leqslant \int_X |f_n - f| + \int_{A^c} |f| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui montre la propriété d'équipetitesse à l'infini.

$\square$

A l'aide de la proposition 16, on peut déduire du théorème de Vitali relatif à la convergence en mesure le théorème de Vitali relatif à la convergence p.p.

Théorème 9 (Vitali (pour la convergence p.p.)) *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(X)$ et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On suppose*

1. *la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f presque partout,*
2. *la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équiintégrable,*
3. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$.*

Alors $f \in L^1(X)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^1(X)$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$. Par le lemme de Fatou, cette inégalité est encore vraie pour f.

Par la proposition 16, la suite $(f_n|_A)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en mesure vers $f|_A$. Par le théorème de Vitali dans sa version convergence en mesure (théorème 8), on en déduit que $f|_A \in L^1(A)$ et $(f_n|_A)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f|_A$ dans $L^1(A)$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_{L^1(A)} \leqslant \varepsilon$. Ainsi

$$\int_X |f_n - f| \leqslant \int_A |f_n - f| + \int_{A^c} |f_n| + |f| \leqslant 3\varepsilon.$$

Donc $f = (f - f_n) + f_n$ est dans $L^1(X)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^1(X)$.

$\square$

Remarque 19 *On peut déduire du théorème de Vitali relatif à la convergence en mesure le théorème de convergence dominée.*

Proposition 19 (Réciproque du théorème de convergence dominée) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$ convergeant dans $L^1(X)$ vers une fonction $f \in L^1(X)$. Alors il existe $g \in L^1(X)$ et une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_{n_k}| \leqslant g$ p.p.*

Preuve : Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$ converge dans $L^1(X)$, elle est de Cauchy et on peut construire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

On pose aussi $f_{n_{-1}} = 0$. La série $\sum_{k\geqslant -1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ est absolument convergente dans $L^1(X)$. Comme $L^1(X)$ est complet, on peut définir sa somme $g := \sum_{k=-1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ comme un élément de $L^1(X)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_{n_k}| \leqslant |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| + \cdots + |f_{n_0} - f_{n_{-1}}| \leqslant g.$$

La proposition est démontrée.

□

4.3 Convergence dans les espaces de Lebesgue

Un lemme de compacité $L^p - L^q$ (qu'on pourra insérer dans les leçons 203, 234, 235, 241, 262) :

Lemme 4 **On suppose** *$\mu(X) < \infty$. Soit $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^q(X)$, qui converge en mesure vers f. Alors $f \in L^q(X)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(X)$.*

Preuve : La première assertion résulte du lemme de Fatou. Pour la seconde, on écrit pour $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f|^p &\leqslant \int_{|f_n - f|\leqslant\varepsilon} |f_n - f|^p + \int_{|f_n - f|>\varepsilon} |f_n - f|^p \\ &\leqslant \varepsilon^p \mu(X) + \|f_n - f\|^p_{L^q(X)} |[f_n - f > \varepsilon]|^{1-\frac{p}{q}},\end{aligned}$$

où la seconde ligne résulte de l'inégalité de Hölder. Par l'inégalité de Minkowski, $\|f_n - f\|_{L^q(X)} \leqslant \|f_n\|_{L^q(X)} + \|f\|_{L^q(X)}$. Donc

$$\int_X |f_n - f|^p \leqslant \varepsilon^p \mu(X) + 2^{p-1}(\|f_n\|^p_{L^q(X)} + \|f\|^p_{L^q(X)}) |[f_n - f > \varepsilon]|^{1-\frac{p}{q}}.$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} |[f_n - f > \varepsilon]| = 0$. On en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|^p \leqslant \varepsilon^p \mu(X).$$

Comme ε est arbitraire, on peut conclure.

□

Par une preuve analogue à celle de la remarque 17, on obtient

Remarque 20 *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ converge vers $f \in L^p(X)$ dans $L^p(X)$, alors elle converge en mesure.*

Théorème 10 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ convergeant p.p. vers une application mesurable f. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = 0$,

2. $f \in L^p(X)$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu$.

Preuve : Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = 0$. Alors en écrivant $|f|^p \leqslant 2^{p-1}(|f - f_n|^p + |f_n|^p)$, on voit que $f \in L^p(X)$. Ensuite par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \|f_n\|_{L^p(X)} - \|f\|_{L^p(X)} \right| \leqslant \|f_n - f\|_{L^p(X)}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)}$. Il suffit de prendre les puissances p pour conclure.

Réciproquement, si $f \in L^p(X)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu$, on applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions mesurables et positives : $g_n := 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Il vient

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} (2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left(2^{p-1} \int_X |f_n|^p + 2^{p-1} \int_X |f|^p - \int_X |f_n - f|^p \right).$$

En utilisant l'hypothèse de convergence p.p., on voit que le membre de gauche est égal à $2^p \int_X |f|^p$. Comme $\int_X |f_n|^p$ converge, le membre de droite peut se réécrire $2^p \int_X |f|^p + \liminf_{n\to+\infty} - \int_X |f_n - f|^p$. On en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|^p \leqslant 0,$$

ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = 0$.

□

Remarque 21 *Un développement possible pour les leçons 201, 205, 234, 241 est la complétude de L^p.*

4.4 Convergence en loi

Définition 8 (Convergence en loi) *On dit qu'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a.r. X si pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,* $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\varphi(X_n)) = \mathbb{E}(\varphi(X))$.

Proposition 20 *Dans la définition de la convergence en loi, on peut remplacer continue bornée par continue à support compact.*

Preuve : Il suffit de montrer que si pour tout $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\varphi(X_n)) = \mathbb{E}(\varphi(X))$, alors cela reste vrai pour tout $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R})$.

On introduit pour tout $p \in \mathbb{N}$ la fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_p(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-p-1, p+1], \\ 1 & \text{si } x \in [-p, p], \\ x + p + 1 & \text{si } x \in [-p-1, -p], \\ -x + p + 1 & \text{si } x \in [p, p+1]. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R})$. On écrit pour tout $p, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X_n)) - \varphi(X)\right) = \mathbb{E}\left((\varphi_p\varphi)(X_n) - (\varphi_p\varphi)(X)\right) + \mathbb{E}\left(((1-\varphi_p)\varphi)(X_n) - ((1-\varphi_p)\varphi)(X)\right).$$

D'où en utilisant que $1-\varphi_p \geqslant 0$, il vient

$$|\mathbb{E}\left(\varphi(X_n)\right)-\varphi(X))| \leqslant |\mathbb{E}\left((\varphi_p\varphi)(X_n)-(\varphi_p\varphi)(X)\right)| + \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\mathbb{E}\left((1-\varphi_p)(X_n)\right) + \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\mathbb{E}\left((1-\varphi_p)(X)\right). \quad (4.1)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction $|(1-\varphi_p)(X)|$ est bornée par 1 et converge p.p. vers 0, le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{p\to+\infty} \mathbb{E}(((1-\varphi_p)\varphi)(X)) = 0.$$

On fixe désormais $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\mathbb{E}((1-\varphi_{p_0})(X))| \leqslant \varepsilon$. Comme

$$\mathbb{E}\left((1-\varphi_{p_0})(X_n)\right) = 1-\mathbb{E}(\varphi_{p_0}(X_n))$$

et que $\varphi_{p_0} \in C_c^0$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left((1-\varphi_{p_0})(X_n)\right) = 1-\mathbb{E}\left(\varphi_{p_0}(X)\right) = \mathbb{E}\left((1-\varphi_{p_0})(X)\right).$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|\mathbb{E}((1-\varphi_{p_0}))(X_n))| \leqslant 2\varepsilon$. Enfin, comme $\varphi_{p_0}\varphi \in C_c^0$, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $|\mathbb{E}\left((\varphi_p\varphi)(X_n)-(\varphi_p\varphi)(X)\right)| \leqslant \varepsilon$. En utilisant (4.1) avec $p = p_0$ et $n \geqslant n_1$, on obtient

$$|\mathbb{E}\left(\varphi(X_n)\right)-\varphi(X))| \leqslant (1+3\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})})\varepsilon,$$

qui est le résultat attendu.

□

Proposition 21 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout point de continuité de la fonction de répartition F_X de X, $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(a) = F_X(a)$.*

Preuve : Supposons qu'en tout point de continuité de la fonction de répartition F_X de X, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(a) = F_X(a),$$

c'est-à-dire $P(X_n \leqslant a) \to P(X \leqslant a)$. On en déduit que si a, b sont deux points de continuité de F_X, alors quand $n \to +\infty$,

$$P_{X_n}(]a,b]) = P(X_n \leqslant b) - P(X_n \leqslant a) \to P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = P_X(]a,b]).$$

Soient $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions en escaliers à support compact dans $C_c^0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ et $a_0 < \dots < a_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\|\varphi - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Comme F_X est continue sauf en un nombre dénombrable de points, on peut supposer que chaque a_i est un point de continuité de F_X. Soit $\psi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$. Par linéarité,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi \, dP_{X_n} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i P_{X_n}(]a_{i-1},a_i]) \to \sum_{i=1}^{p} \alpha_i P_X(]a_{i-1},a_i]) = \int_{\mathbb{R}} \psi \, dP_X.$$

On en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi\,dP_{X_n}-\int_{\mathbb{R}}\varphi\,dP_X\right|\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}(\varphi-\psi)\,dP_{X_n}\right|+\left|\int_{\mathbb{R}}(\varphi-\psi)\,dP_X\right|\leqslant 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on en déduit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

Réciproquement, si $X_n\to X$ en loi, montrons que $P(X_n\leqslant a)\to P(X\leqslant a)$ pour tout point de continuité a de F_X. On introduit pour tout $\varepsilon>0$ les deux fonctions continues bornées suivantes :

$$\varphi_\varepsilon^-(x)=\begin{cases}1 & \text{si } t\leqslant a-\varepsilon,\\ -t+a & \text{si } a-\varepsilon\leqslant t\leqslant a\\ 0 & \text{si } t\geqslant a\end{cases}\quad,\quad \varphi_\varepsilon^+(x)=\begin{cases}1 & \text{si } t\leqslant a,\\ -t+a+\varepsilon & \text{si } a\leqslant t\leqslant a+\varepsilon\\ 0 & \text{si } t\geqslant a+\varepsilon.\end{cases}$$

Alors $\varphi_\varepsilon^-\leqslant\chi_{]-\infty,a]}\leqslant\varphi_\varepsilon^+$. On en déduit

$$\mathbb{E}(\varphi_\varepsilon^-(X_n))\leqslant\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X_n))\leqslant\mathbb{E}(\varphi_\varepsilon^+(X_n)).$$

Comme $\varphi_\varepsilon^\pm$ sont continues et bornées, on peut utiliser la définition de la convergence en loi pour obtenir :

$$\mathbb{E}(\varphi_\varepsilon^-(X))\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X_n))\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X_n))\leqslant\mathbb{E}(\varphi_\varepsilon^+(X)).$$

On utilise maintenant que $\varphi_\varepsilon^-\to\chi_{]-\infty,a[}$ et $\varphi_\varepsilon^+\to\chi_{]-\infty,a]}$ ponctuellement. De plus, les fonctions caractérisitiques sont bornées par 1 et les constantes sont intégrables sur un ensemble de mesure finie. Par le théorème de convergence dominée, il vient donc

$$\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a[}(X))\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X_n))\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X_n))\leqslant\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X)).$$

Mais a étant un point de continuité de F_X,

$$\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a[}(X))=P_X(X<a)=P_X(X\leqslant a)=\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X))=F_X(a).$$

Ainsi, $F_{X_n}(a)=\mathbb{E}(\chi_{]-\infty,a]}(X_n))$ converge vers $F_X(a)$, comme attendu.

□

Proposition 22 *Si une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend en probabilité vers une v.a.r. X, alors elle tend en loi vers celle-ci.*

Preuve : Soit $\varphi\in C_c^0(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathbb{E}(\varphi(X_n))$ tend vers $\mathbb{E}(\varphi(X))$. Soit $\varepsilon>0$. Comme φ est uniformément continue, il existe $\delta>0$ tel que $|\varphi(X_n)-\varphi(X)|\leqslant\varepsilon$ p.s. sur l'ensemble $[|X_n-X|\leqslant\delta]$. Alors

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(\varphi(X_n))-\mathbb{E}(\varphi(X))|&\leqslant\int_{[|X_n-X|<\delta]}|\varphi(X_n)-\varphi(X)|+\int_{[|X_n-X|\geqslant\delta]}|\varphi(X_n)|+|\varphi(X)|\\&\leqslant\varepsilon+2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\mathbb{P}(|X_n-X|\geqslant\delta).\end{aligned}$$

Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend en probabilité vers X, on en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty}|\mathbb{E}(\varphi(X_n))-\mathbb{E}(\varphi(X))|\leqslant\varepsilon.$$

On peut alors conclure puisque ε est arbitraire.

Proposition 23 *Si une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend en loi vers un nombre réel $a\in\mathbb{R}$, alors elle tend en probabilité vers ce nombre réel.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi \equiv 1$ sur $]-\infty, a-\varepsilon] \cup [a+\varepsilon, +\infty[$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X_n)).$$

Le membre de droite tend par hypothèse vers $\mathbb{E}(\varphi(a)) = 0$, ce qui conclut la preuve.

Exemple 5 *Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $X_n = (-1)^n X$. Alors X_n converge en loi vers X par symétrie de la loi normale centrée mais ne converge pas p.s. vers X et ne converge pas en probabilité vers X.*

Exemple 6 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, $x \in \mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On suppose que X_n est de loi δ_{x_n} et X est de loi δ_x. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.*

Exemple 7 *On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la v.a.r. de $[0,1]$ (muni de la mesure de Lebesgue restreinte) vers $\mathbb{R}$:*

$$X_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}-1} \chi_{[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}]}.$$

Alors pour tout $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) = \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi(1)$. Autrement dit, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$.

Exemple 8 *[1, Exemple V.1.3 (ii), Exemple V.4.5 (iii)] Soit X_i, $i \geqslant 1$ des variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle $\mathbb{P}([X_i > t]) = e^{-t}$, $t \geqslant 0$. Soit $M_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$. Alors*

1. *$M_n = \ln n + o(\ln n), n \to +\infty$ p.s.*
2. *$Z_n := M_n - \ln n$ converge en loi vers une variable Z de fonction de répartition $F^Z(t) = \exp(-e^{-t}), t \in \mathbb{R}$.*

Preuve : La première assertion est une conséquence du lemme de Borel-Cantelli. Par indépendance,

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant t) = \mathbb{P}(\cap_{1\leqslant i\leqslant n}[X_i \leqslant t]) = (1 - e^{-t})^n.$$

Soit $\varepsilon \in (0,1)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M_n \leqslant (1-\varepsilon)\ln n]) &= (1 - n^{-1+\varepsilon})^n \\
&= \exp(n \ln(1 - n^{-1+\varepsilon})) \\
&= \exp(-n^{\varepsilon}(1 + o(1))), n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n\geqslant 2} \mathbb{P}([M_n/\ln n \leqslant 1-\varepsilon]) < \infty$. Le lemme de Borel-Cantelli implique que p.s. $M_n/\ln n \geqslant 1-\varepsilon$ pour n assez grand. Donc p.s.,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln n} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M_n \geqslant (1+\varepsilon)\ln n]) &= 1 - \mathbb{P}([M_n \geqslant (1+\varepsilon)\ln n]) \\
&= 1 - (1 - n^{-1-\varepsilon})^n \\
&= 1 - \exp(n \ln(1 - n^{-1-\varepsilon})) \\
&= 1 - \exp(-n^{-\varepsilon}(1 + o(1))) \\
&= n^{-\varepsilon}(1 + o(1)), n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Soit $n_k = \lfloor (k+1)^\delta \rfloor$ avec $\delta > 1/\varepsilon$. Alors

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([M_{n_k} \geqslant (1+\varepsilon)\ln n_k]) < \infty.$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli, p.s.

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{M_{n_k}}{\ln n_k} \leqslant 1+\varepsilon,$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Comme $(M_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante,

$$\frac{M_n}{\ln n} \leqslant \frac{M_{n_{k+1}}}{\ln n_{k+1}} \frac{\ln n_{k+1}}{\ln n_k}.$$

En utilisant que $\lim_{k\to+\infty}(\ln n_k)/\ln n_{k+1} = 1$, on en déduit p.s.

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{M_n}{\ln n} \leqslant 1+\varepsilon,$$

Comme ε est arbitraire, on conclut que p.s.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{\ln n} = 1.$$

On montre à présent la deuxième assertion. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \geqslant e^{-t}$, $t + \ln n \geqslant 0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} F^{Z_n}(t) &= \mathbb{P}([\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \leqslant t + \ln n]) \\ &= (1 - \exp(-t - \ln n))^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)\right) = \exp(-e^{-t}) + o(1), n \to +\infty. \end{aligned}$$

□

Bibliographie

[1] P. Barbe, M. Ledoux, Probabilité, EDP Sciences, 2007.

[2] M. Cottrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre, Exercices de probabilités, Cassini, 1999.

[3] T. Gallouët, R. Herbin, Mesure, Intégration, Probabilités, Ellipses, 2013.

[4] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, **19**, AMS, 2010.

[5] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Dunod.

[6] C. Zuilly et H. Queffelec, Analyse pour l'agrégation, Dunod.