Chapitre 1

Etude des séries : méthodes de comparaison

1.1 Séries numériques

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé complet. Pour montrer qu'une série $\sum a_n$ à coefficients dans E converge, il suffit de montrer qu'elle converge absolument (ce qui signifie que la série $\sum ||a_n||$ converge). On est donc souvent ramené à montrer la convergence de séries à termes positifs. On présente dans cette section quelques critères de convergence pour de telles séries.

1.1.1 Comparaison de séries à termes positifs

Commençons par une observation él'ementaire : une série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suites des sommes partielles $(\sum_{m=0}^{n} u_m)_{n\geq 0}$ est bornée (pourquoi ?). On en déduit

Proposition 1 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $0 \leq u_n \leq v_n$.*

1. *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,*
2. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Dans la même veine, on a :

Proposition 2 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose $u_n \sim v_n$, $n \to +\infty$. Alors*

1. *les deux séries sont de même nature,*
2. *si elles sont convergentes, les restes sont équivalents : $\sum_{m=n}^{+\infty} u_m \sim \sum_{m=n}^{+\infty} v_m$, $n \to +\infty$,*
3. *si elles sont divergentes, les suites des sommes partielles sont équivalentes : $\sum_{m=0}^{n} u_m \sim \sum_{m=0}^{n} v_m$, $n \to +\infty$.*

Exercice 1 *1) Démontrer la proposition précédente.*

2) Donner un contrexemple au théorème lorsqu'on ne fait plus d'hypothèse sur les signes de u_n et v_n.

3) On considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha > 0$.

a) On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$. En déduire un équivalent du reste de la série.

b) On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} \sim (1-\alpha)n^{-\alpha}$. En déduire un équivalent de la somme partielle de la série.

c) Que dire pour $\alpha = 1$? (on pourra montrer que $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$).

Exercice 2 *Le théorème précédent a deux frères jumeaux où on remplace $\sim$ par o et O. Les énoncer puis les prouver.*

1.1.2 Règle de D'Alembert

Proposition 3 *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}_+^*$.*

1. *Si $\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\liminf_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Exercice 3 *Démontrer la proposition précédente.*

Lorsqu'on n'est dans aucun des deux cas donnés par la règle de D'Alembert, il faut y aller voir de plus près :

Exercice 4 *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}_+^*$.*
1) On suppose qu'il existe une suite (v_n) dans $\mathbb{R}_+^*$ telle qu'à partir d'un certain rang n_0,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
2) Soit α_n tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha_n}{n}.$$

Montrer que
1) si $\liminf \alpha_n > 1$, la série $\sum u_n$ converge,
2) si $\limsup \alpha_n < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
(on pourra considérer $v_n = 1/n^l$ avec l convenablement choisi).
3) L'objet de cette question est de montrer que si (u_n) est une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}),$$

alors il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.
a) On pose $a_n = n^\alpha u_n$. Montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + O(\frac{1}{n^2})$.
b) On pose $\gamma_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$. Montrer que $1 + \gamma_n > 0$ puis que

$$\ln a_n = \ln a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 + \gamma_k).$$

c) Montrer que la série $\sum \ln(1 + \gamma_n)$ est convergente. Conclure.
4) Soient a et b deux réels qui ne sont pas des entiers négatifs et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \left(\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} \right)^\lambda.$$

Discuter la nature de la série $\sum u_n$.

1.1.3 Comparaison séries-intégrales

Proposition 4 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante (et donc mesurable). Alors la série $\sum f(n)$ converge ssi l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ est finie.*

1. *En cas de convergence, on a l'encadrement du reste :*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. *En cas de divergence, on a un équivalent sur les sommes partielles :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \int_0^n f(x)\,dx, \quad n \to +\infty.$$

Exercice 5 *1) Démontrer la proposition précédente.*
2) Appliquer ce qui précède aux fonctions

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, x > 0.$$

En déduire le critère de convergence pour une série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1.1.4 Quelques classiques

Exercice 6 (Séries et sommes partielles) *1) Etudier la série de terme général $u_n := \dfrac{1}{n(n+1)}$.*

2) Etudier la suite $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ pour $n \geq 1$ (considérer la série de terme général $u_n = S_n - S_{n-1}$, $u_1 = 1$.)

Exercice 7 *Le but de cet exercice est d'obtenir un développement limité de*

$$\sigma_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad n \geq 1$$

en l'infiniment petit $1/n$.

1) On pose $u_1 = 1$ puis $u_k := \sigma_k - \sigma_{k-1}$.

a) Montrer que $u_n \sim \dfrac{-1}{2n^2}$.

b) En déduire que (σ_n) converge. On note γ sa limite (la constante d'Euler).

2) a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

b) En déduire que $\gamma - \sigma_n \sim \dfrac{-1}{2n}$ puis que

$$\sigma_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

3) On pose $\tau_n := \sigma_n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$ puis $v_n = \tau_n - \tau_{n-1}$.

a) Montrer que $v_n \sim \dfrac{1}{6n^3}$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$

c) En déduire que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Exercice 8 *1) En procédant comme à l'exercice précédent, montrer la convergence de la suite*

$$S_n := (n + \frac{1}{2}) \ln n - n - \ln n!.$$

On note L sa limite.

2) En déduire que

$$n! \sim e^{-L} n^{n+1/2} e^{-n}.$$

3) Trouver un équivalent de $L - S_n$ puis un développement limité de $n!$ à l'ordre 1 en $1/n$.

Exercice 9 *Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$.*

1) Si la série $\sum u_n$ converge, construire une suite (λ_n) de $\mathbb{R}^+$ telle que (λ_n) est croissante et diverge et la série $\sum \lambda_n u_n$ converge.

2) Si la série $\sum u_n$ diverge, construire une suite (λ_n) de $\mathbb{R}^+$ telle que (λ_n) décroît vers 0 et la série $\sum \lambda_n u_n$ diverge.

1.2 Une série est une intégrale !

Pour les paragraphes qui suivent, une bonne référence est [3], Chapitre 1.

1.2.1 Théorie de la mesure

Définition 1 *Soit X un ensemble. Une* tribu *$\mathcal{A}$ sur X est une collection de parties de X qui vérifient :*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

2) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,

3) $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.

On obtient une définition équivalente en remplaçant 2) par la stabilité par intersection dénombrable (pour le voir, utiliser 3) et le fait que le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires). On dit que le couple $(X, \mathcal{A})$ est un *espace mesurable* et tout élément de $\mathcal{A}$ est appelée une partie mesurable de X.

L'exemple fondamental pour la suite est

$$X = \mathbb{N} \,, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

On vérifie bien qu'il s'agit d'une tribu, appelée la *tribu* discrète sur $\mathbb{N}$. On peut aussi considérer la tribu discrète sur n'importe quel ensemble.

Vous avez déjà rencontré au moins la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Elle est définie comme étant l'intersection de toutes les tribus qui contiennent les ouverts de $\mathbb{R}$ (on vérifie facilement qu'une intersection quelconque de tribus est une tribu).

Dans la suite, on considèrera aussi l'ensemble $[0, +\infty]$, où on définit un ouvert comme un ensemble qui s'écrit comme une réunion quelconque d'intervalles de la forme $]a, b[$ ($0 < a < b < +\infty$) ou $[0, b[$ ou $]a, +\infty]$. On peut alors considérer la tribu des boréliens sur $[0, +\infty]$.

Définition 2 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On dit que $\mu : X \to [0, +\infty]$ est une* mesure *si*

1) $\mu(\emptyset) = 0$,

2) μ *est* σ *additive : si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille de parties disjointes de* $\mathcal{A}$, *alors*

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Ici, la mesure qui nous intéresse est la *mesure de comptage* $\mu_{\mathbb{N}}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\mu_{\mathbb{N}}(A)$ est défini comme le cardinal de A (si A est une partie infinie, on pose $\mu_{\mathbb{N}}(A) = +\infty$). Noter que pour cette mesure, le seul ensemble négligeable (i.e. contenu dans un ensemble de mesure nulle) est l'ensemble vide.

Bien sûr, vous connaissez aussi la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens.

Définition 3 *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *et* $(Y, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables. On dit qu'une fonction* $f : X \to Y$ *est mesurable si pour tout* $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

On se souvient notamment que si $(Y, \mathcal{B})$ est $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens (ou plus généralement un espace métrique), alors une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Ici, le plus souvent, $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, de sorte que *toutes* les fonctions $f : X \to Y$ sont mesurables (quel que soit l'espace mesurable $(Y, \mathcal{B})$).

1.2.2 Théorie de l'intégrale

Dans la suite (sauf mention explicite du contraire), $\mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ sont munis de la tribu des boréliens.

Définition 4 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. On dit que* $s : X \to [0, +\infty[$ *est une* fonction simple *si c'est une fonction mesurable qui prend un nombre fini de valeurs.*

En notant $a_1, \ldots, a_m$ les valeurs (distinctes) de s, on a donc $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ où $A_i := s^{-1}(\{a_i\})$ est mesurable (puisque s est mesurable) et χ_{A_i} est la fonction caractéristique de l'ensemble A_i qui est mesurable (car A_i est mesurable !). Les ensembles A_i sont disjoints et de réunion X. Noter cependant qu'on peut écrire d'une infinité de manières la fonction$s$ sous la forme $\sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$, avec une famille d'ensembles mesurables B_j disjoints et de réunion X (il suffit par exemple de "redécouper" les ensembles A_i définis précédemment).

Lorsque $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$, à chaque fonction simple s correspond une partition de $\mathbb{N}$ en un nombre fini de parties disjointes non vides $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathbb{N}$ et m réels positifs $a_1, \ldots, a_m$ distincts tels que $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$.

Définition 5 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $s : X \to [0, +\infty[$ *une fonction simple. On écrit comme ci-dessus* $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$. *On définit alors l'intégrale de* s *par*

$$\int_X s(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i). \tag{1.1}$$

Noter que cette intégrale peut être égale à $+\infty$. C'est le cas si et seulement si l'un des $\mu(A_i) = +\infty$ avec $a_i \neq 0$.

Si l'on écrit s sous une autre forme $s = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$, avec une famille d'ensembles mesurables B_j disjoints et de réunion X, on a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j). \tag{1.2}$$

Pour le montrer, on observe d'abord que pour tout i, j, $a_i \mu(A_i \cap B_j) = b_j \mu(A_i \cap B_j)$: si $A_i \cap B_j = \emptyset$, alors $\mu(A_i \cap B_j) = 0$ et l'égalité est vraie ; si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, soit $x \in A_i \cap B_j$. Alors $s(x) = a_i = b_j$ et de nouveau l'égalité est vraie.

On note aussi que pour tout i, A_i est la réunion disjointe des $A_i \cap B_j$, $1 \leq j \leq n$, et donc $\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j)$.

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \mu(A_\cap B_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(A_\cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j).$$

La preuve de (1.2) est achevée. On voit donc qu' on peut appliquer la formule (1.1) à n'importe quelle écriture de s sous la forme $\sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ pourvu que les ensembles mesurables B_j soient disjoints, de réunion X.

On en déduit la linéarité de l'intégrale pour les fonctions simples :

Proposition 5 *Si s_1, s_2 sont deux fonctions simples et $\lambda \geq 0$, alors*

$$\int_X (\lambda s_1 + s_2)(x)\, d\mu(x) = \lambda \int_X s_1(x)\, d\mu(x) + \int_X s_2(x)\, d\mu(x).$$

Preuve : On écrit $s_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ et $s_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$, avec les A_i disjoints et de réunion X et de même pour B_j. On a $\chi_{A_i} = \sum_j \chi_{A_i \cap B_j}$. Ainsi,

$$s_1 = \sum_{i,j} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad , \quad s_2 = \sum_{i,j} b_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

On en déduit : $\lambda s_1 + s_2 = \sum_{i,j} (\lambda a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}$ et donc par définition de l'intégrale d'une fonction simple

$$\int_X (\lambda s_1 + s_2)(x)\, d\mu(x) = \sum_{i,j} (\lambda a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} \lambda a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j).$$

On a ensuite

$$\sum_{i,j} \lambda a_i \mu(A_i \cap B_j) = \lambda \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) = \lambda \sum_i a_i \mu(A_i) = \lambda \int_X s_1(x)\, d\mu(x)$$

et de même pour $\sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j)$. Il vient finalement

$$\int_X (\lambda s_1 + s_2)(x)\, d\mu(x) = \lambda \int_X s_1(x)\, d\mu(x) + \int_X s_2(x)\, d\mu(x).$$

$\square$

Comme application de la proposition précédente, on a

Exercice 10 *Si $s = \sum_{k=1}^{p} c_k C_k$, où les C_k ne sont pas nécessairement disjoints, et pas forcément de réunion X, montrer que*

$$\int_X s(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k \mu(C_k).$$

L'intérêt des fonctions simples est illustré par la proposition suivante :

Proposition 6 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante de fonctions simples $(s_n)_{n\geq 1}$ qui converge simplement vers f sur X.*

Preuve : Soit $n \geq 1$. On pose

$$A_n^i := \{x \in X, \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}\}\,, i \in \{0, \dots, n2^n - 1\}\,,\ \ A_n^{n2^n} = X \setminus \left(\cup_{i=0}^{n2^n-1} A_n^i\right).$$

et $s_n := \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n}\chi_{A_n^i} + n\chi_{A_n^{n2^n}}$. Alors pour tout n, s_n est bien une fonction simple et sur l'ensemble $\{x : f(x) < n\}$, on a

$$0 \leq s_n(x) \leq f(x) \leq s_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

Montrons que cela implique que la suite (s_n) converge simplement vers f. Soit $x \in X$ et $\epsilon > 0$. Supposons d'abord que $f(x) < +\infty$. Alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $f(x) < n_0$ et $1/2^{n_0} < \epsilon$. On a donc $|f(x) - s_n(x)| \leq 1/2^n < \epsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Supposons maintenant que $f(x) = +\infty$. Alors pour tout n, $s_n(x) = n$. D'où la convergence simple encore dans ce cas.

Montrons enfin que la suite est croissante. Soit $x \in X$ et $n \geq 1$. Si $f(x) \geq n+1$, alors $s_n(x) = n$ et $s_{n+1}(x) = n+1$ donc $s_n(x) < s_{n+1}(x)$. Si $f(x) < n+1$, alors soit $i \in \{0, (n+1)2^{n+1} - 1\}$ tel que $i/2^{n+1} \leq f(x) < (i+1)/2^{n+1}$. On a alors $s_{n+1}(x) = i/2^{n+1}$. De plus, en écrivant $i = 2j + \alpha$ pour $j \geq 0$, et $\alpha \in \{0, 1\}$ selon que i est pair ou impair, on a $j/2^n \leq f(x) < (j+1)/2^n$ et alors $s_n(x) = j/2^n \leq i/2^{n+1}$, i.e. $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

□

On peut définir l'intégrale d'une fonction positive comme un élément de $[0, +\infty]$.

Définition 6 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On définit*

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sup_{\substack{s: X \to [0,+\infty[\\ \textit{simple}\ , s \leq f}} \int_X s(x)\, d\mu(x).$$

Définition 7 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est intégrable (ou sommable) si $|f|$ est d'intégrale finie. C'est alors aussi le cas de $f^+ = \max(f, 0)$ et de $f^- = \max(-f, 0)$. On définit alors l'intégrale de f par*

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f^+(x)\, d\mu(x) - \int_X f^-(x)\, d\mu(x).$$

1.3 Théorèmes de Lebesgue appliqués aux séries

Beaucoup de propriétés de l'intégrale de Lebesgue (par exemple la linéarité) peuvent être établies à partir de la Proposition 6 et du théroème FONDAMENTAL suivant :

Théorème 1 *[Théorème de convergence monotone] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu(x).$$

Une première conséquence du théorème de convergence monotone est la linéarité de l'intégrale :

Proposition 7 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*
i) Soient $f_1, f_2 : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $\lambda \geq 0$. Alors

$$\int_X (\lambda f_1(x) + f_2(x))\, dx = \lambda \int_X f_1(x)\, dx + \int_X f_2(x)\, dx.$$

ii) Soient $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_X (\lambda f_1(x) + f_2(x))\, dx = \lambda \int_X f_1(x)\, dx + \int_X f_2(x)\, dx.$$

Preuve (esquisse) : On montre le premier point en approchant f_1, f_2 par des suites croissantes de fonctions simples (Proposition 6), on utilise la linéarité de l'intégrale pour les fonctions simples (Proposition 5) et on passe à la limite grâce au théorème de convergence monotone.

Pour le second point, on décompose $f_i = f_i^+ - f_i^-$, $i = 1, 2$ et on écrit la linéarité pour f_i^+ et f_i^-.

□

Avec le théorème de convergence monotone, on peut aussi montrer qu'une série à termes positifs est l'intégrale d'une fonction positive :

Proposition 8 *Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs. On définit $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ par $f(n) = u_n$, $n \in \mathbb{N}$. On a alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} f(n)\, d\mu_{\mathbb{N}}(n).$$

Preuve : Soit $N \geq 1$. On a par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n \int_{\mathbb{N}} \chi_{\{n\}}(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m) = \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} u_n \chi_{\{n\}}(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \chi_{\{n\}}(m) = u_m \chi_{\{0,\ldots,N\}}(m) = f(m)\chi_{\{0,\ldots,N\}}(m).$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_{\mathbb{N}} f(m)\chi_{\{0,\ldots,N\}}(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m). \tag{1.3}$$

On pose $f_N(m) = f(m)\chi_{\{0,\ldots,N\}}(m)$. La suite $(f_N)_{N\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives et qui converge simplement vers f. Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} f(m)\chi_{\{0,\ldots,N\}}(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m) = \int_{\mathbb{N}} f(m)\, d\mu_{\mathbb{N}}(m).$$

En passant à la limite dans (1.3), on obtient ainsi l'égalité demandée.

□

Proposition 9 *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. On définit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $f(n) = u_n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $\mathbb{N}$ et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} f(n)\, d\mu_{\mathbb{N}}(n).$$

Preuve : La première partie de l'énoncé est une conséquence directe de la Proposition 8. Pour montrer la deuxième partie, il suffit de remarquer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

avec $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (observer d'abord que l'égalité est vraie pour les sommes partielles).

$\square$

Remarque 1 *De même qu'on interprète la somme d'une série comme une intégrale, on peut voir la somme d'une famille sommable (indexée par $\mathbb{Z}$ ou tout autre ensemble dénombrable) comme une intégrale.*

Remarque 2 *On définit la notion de série semi-convergente (c'est une série qui n'est pas absolument convergente, mais dont la suite des sommes partielles néanmoins converge). On ne définit pas de notion analogue dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. En revanche, on définit bien des intégrales semi-convergentes dans le cadre de l'intégrale de Riemann.*

Corollaire 1 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\sum f_n$ une série de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, d\mu(x).$$

(l'égalité a lieu dans $[0, +\infty]$).

Ce corollaire du Théorème de convergence monotone est aussi un cas particulier du théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 11 *Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double à termes positifs. On suppose que pour tout k, la suite $(u_{n,k})_n$ est croissante. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to+\infty} u_{n,k}.$$

Théorème 2 *[Lemme de Fatou] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu(x) \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x).$$

Exercice 12 *Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double à termes positifs. Alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \liminf_{n\to+\infty} u_{n,k} \le \liminf_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}.$$

Théorème 3 *[Théorème de convergence dominée] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables intégrables. On suppose qu'il existe une fonction sommable g telle que $|f_n(x)| \le g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu(x).$$

Corollaire 2 *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $\sum f_n$ une série de fonctions mesurables intégrables. On suppose que $x\mapsto \sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|$ est intégrable. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu(x)=\int_X\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,d\mu(x).$$

Noter que par le Corollaire 1, l'hypothèse est équivalente à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X |f_n(x)|\,d\mu(x)<+\infty$. Le corollaire peut aussi être vu comme un cas particulier du théorème de Fubini.

Exercice 13 *Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double à termes réels. On suppose qu'il existe une suite (v_k) telle que $|u_{n,k}|\leq v_k$ pour tout n,k et vérifiant de plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k<+\infty$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}u_{n,k}=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to+\infty}u_{n,k}.$$

1.4 Théorème de Fubini appliqué aux séries

On se donne deux espaces mesurés $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$, que l'on suppose σ finis : il existe $(A_n)\subset\mathcal{A}$ telle que $X=\cup A_n$ et pour tout n, $\mu(A_n)<\infty$, et de même pour ν.

Définition 8 *Sur $X\times Y$, on définit la tribu produit, que l'on note $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, comme l'intersection de toutes les tribus contenant les pavés, c'est-à-dire les ensembles de la forme $A\times B$, avec $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$.*

Lorsque $(X,\mathcal{A},\mu)=(Y,\mathcal{B},\nu)=(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_{\mathbb{N}})$, alors $X\times Y=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. La tribu produit contient tous les $\{(m,n)\}$ pour $m,n\in\mathbb{N}$ et donc est égale à $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ (pour le voir, utiliser qu'elle doit être stable par réunion dénombrable).

Théorème 4 *[Théorème de Fubini-Tonelli] Soit $f:X\times Y\to[0,+\infty]$ une fonction mesurable positive. Alors*

- *p.p. $x\in X$, $y\in Y\mapsto f(x,y)$, et p.p. $y\in Y$, $x\in X\mapsto f(x,y)$ sont des fonctions mesurables,*
- *$x\mapsto\displaystyle\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$, $y\mapsto\displaystyle\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont des fonctions mesurables,*

De plus, il existe une unique mesure sur $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$, notée $\mu\otimes\nu$ telle que pour tout f mesurable positive, on a

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x)$$
$$=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y).$$

En particulier, pour tout $A\in\mathcal{A}$, et pour tout $B\in\mathcal{B}$, on a

$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B).$$

Cette observation permet de voir que lorsque $(X,\mathcal{A},\mu)=(Y,\mathcal{B},\nu)=(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_{\mathbb{N}})$, la mesure produit sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est encore la mesure de comptage, qui à une partie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ associe son cardinal.

En appliquant le Théorème 4 à $(Y,\mathcal{B},\nu)=(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_{\mathbb{N}})$, on retrouve le Corollaire 1.

Théorème 5 *Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) f est intégrable sur $X \times Y$,

2) $\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty$,

3) $\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < +\infty$,

Si l'une des conditions précédentes est vérifiée, on a alors

1) p.p. $x \in X$, $y \in Y \mapsto f(x,y)$, et p.p. $y \in Y$, $x \in X \mapsto f(x,y)$ sont des fonctions mesurables,

2) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$, $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sont des fonctions mesurables,

et on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

En appliquant ce théorème à $(Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$, on retrouve le Corollaire 2.

Définition 9 *On considère deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On définit leur produit de Cauchy comme étant la série de terme général*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Quand le produit de Cauchy est-il une série convergente ? Et quand la somme de cette-dernière est-elle égal au produit des sommes des deux séries ?

Théorème 6 *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy est une série absolument convergente et on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Preuve : On interprète l'énoncé dans le cadre plus général de la mesure de Lebesgue. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions sommables. Alors le théorème de Fubini montre que

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

est sommable et de plus

$$\left(\int_X f\, d\mu(x) \right) \left(\int_Y g\, d\nu(y) \right) = \int_{X\times Y} f(x)g(y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y).$$

Avec $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$, et $f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$, on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m)g(n)\, d(\mu_{\mathbb{N}} \otimes \mu_{\mathbb{N}})(m,n).$$

Par le théorème de convergence dominée, le membre de droite est égal à

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m)g(n)\chi_{A_N}(m,n)\, d(\mu_{\mathbb{N}} \otimes \mu_{\mathbb{N}})(m,n)$$

où $A_N := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : m+n \leq N\}$. On écrit

$$f(m)g(n)\chi_{A_N}(m,n) = \sum_{(m',n')\in A_N} f(m')g(n')\chi_{\{(m,n)\}}(m',n').$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m)g(n)\chi_{A_N}(m,n)\, d(\mu_{\mathbb{N}}\otimes\mu_{\mathbb{N}})(m,n) &= \sum_{(m',n')\in A_N} f(m')g(n') \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \chi_{\{(m,n)\}}(m',n')\, d(\mu_{\mathbb{N}}\otimes\mu_{\mathbb{N}})(m,n) \\ &= \sum_{(m',n')\in A_N} f(m')g(n').\end{aligned}$$

Et cette dernière somme peut se réécrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{N-k}$. On a ainsi

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{N-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{N-k}.$$

□

Exercice 14 *1) Soient z, t dans $\mathbb{C}$. Montrer que*

$$\exp(z+t) = \exp z \exp t.$$

2) Montrer que le théorème précédent devient faux si on suppose seulement que les séries sont convergentes (prendre e.g. $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. On pourra remarquer que si $1 \leq k \leq n-1$, alors $\ln k \ln(n-k) \leq (\ln n)^2$).

1.5 La théorie des intégrales à paramètres appliquée aux séries

On rappelle les trois théorèmes sur la régularité des intégrales à paramètres (voir [4]). Ici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Théorème 7 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
1) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable,
2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur I,
3) il existe $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que pour tout $t \in I$, pour tout $x \in X$, $|f(t,x)| \leq g(x)$.
Alors
1) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable,
2) la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue sur I.

Théorème 8 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
1) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable,
2) il existe $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que pour tout $t \in I$, pour tout $x \in X$, $|f(t,x)| \leq g(x)$,
3) pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I de dérivée notée $\dfrac{\partial f}{\partial t}$,
4) il existe une fonction $h : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que pour tout $x \in X$, pour tout $t \in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq |h(x)|$.

Alors

1) *pour tout* $t \in I$, *les fonctions* $x \mapsto f(t,x)$ *et* $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ *sont dans* $L^1(X)$,

2) *la fonction* $t \mapsto \displaystyle\int_X f(t,x)\,d\mu(x)$ *est dérivable sur* I *de dérivée :*

$$t \mapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x).$$

Théorème 9 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que :*

1) *pour tout* $z \in \Omega$, *la fonction* $x \mapsto f(z,x)$ *est mesurable,*

2) *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $z \mapsto f(z,x)$ *est holomorphe sur* Ω,

3) *il existe* $g : X \to \mathbb{R}$ *intégrable telle que pour tout* $z \in \Omega$, *pour tout* $x \in X$, $|f(z,x)| \leq g(x)$.

Alors

1) *pour tout* $z \in \Omega$, *les fonctions* $x \mapsto f(z,x)$ *et* $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial z}(z,x)$ *sont intégrables,*

2) *la fonction* $z \mapsto \displaystyle\int_X f(z,x)\,d\mu(x)$ *est holomorphe sur* Ω, *de dérivée :*

$$z \mapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x).$$

Remarque 3 *Pour obtenir le troisième théorème à partir du premier, il suffit de remplacer* I *par* Ω *et 'continue' par 'holomorphe'. De plus, pour démontrer qu'une fonction définie comme une intégrale à paramètres est dérivable, il est plus simple de démontrer qu'elle est holomorphe (lorsqu'elle est effectivement holomorphe !)*

Remarque 4 *Dans les trois énoncés précédents, on peut au besoin considérer l'intégrale sur* $X \setminus N$ *au lieu de* X, *pour n'importe quelle partie* N *négligeable (i.e. de mesure nulle). Cela ne modifie pas la valeur de l'intégrale. Cette remarque est à manier avec précaution : la partie* N *qu'on enlève ne doit pas dépendre du paramètre* t *ou* z, *elle doit être la même pour toutes les valeurs du paramètre considérées.*

Remarque 5 *La continuité, la dérivabilité, l'holomorphie sont des propriétés locales : elles sont vraies sur* I, *respectivement* Ω, *si elles sont vraies sur un voisinage de chaque point de* I, *respectivement de* Ω. *Il est parfois plus commode d'obtenir une majoration sur un sous-ensemble des paramètres que sur l'ensemble des paramètres tout entier.*

On peut alors appliquer ces trois théorèmes au cas où $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$. On obtient successivement :

Corollaire 3 *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues sur un intervalle* I. *On suppose qu'il existe une suite de nombres positifs* (α_n) *telle que*

1) $\sum_n \alpha_n < \infty$,

2) $|f_n(t)| \leq \alpha_n$ *pour tout* $n \geq 1$ *et pour tout* $t \in I$.

Alors pour tout $t \in I$, *la série* $\sum f_n(t)$ *converge absolument et la fonction* $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ *est continue.*

Remarque 6

1) *On prend le plus souvent* $\alpha_n := |f_n|_\infty$. *Si les hypothèses du corollaire sont vraies, on dit que la série des* (f_n) *converge normalement.*

2) *En fait, comme on le verra dans le chapitre suivant, il suffit que la série des* (f_n) *converge uniformément pour que la fonction définie par la série soit continue.*

Corollaire 4 *Soit f_n une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une suite de nombres positifs (α_n) telle que*

1) $\sum_n \alpha_n < \infty$,

2) $|f_n(t)| + |f_n'(t)| \leq \alpha_n$ *pour tout* $n \geq 1$ *et pour tout* $t \in I$.

Alors pour tout $t \in I$, la série $\sum f_n(t)$ converge absolument et la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est dérivable sur I, de dérivée $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)$.

Remarque 7 *Là encore, on a un résultat un peu plus fin : si la série de fonctions converge simplement et la série des dérivées converge uniformément, alors la somme est dérivable sur I.*

Corollaire 5 *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite de nombres positifs (α_n) telle que*

1) $\sum_n \alpha_n < \infty$,

2) $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ *pour tout* $n \geq 1$ *et pour tout* $z \in \Omega$.

Alors pour tout $z \in \Omega$, les séries $\sum f_n(z)$, $\sum f_n'(z)$ convergent absolument et la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est holomorphe sur Ω de dérivée

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$$

Remarque 8 *Mais vous aurez deviné que la convergence uniforme de la série, au lieu de normale, suffit pour que la somme soit holomorphe.*

Exercice 15 *Montrer que la série $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[, a > 0$. Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$ (on pourra calculer sa somme).*

Exercice 16 *On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum nxe^{-nx^2}$.*

1) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}^*$.

2) On note f sa somme. Déterminer $\int_a^x f(t)\,dt$ et en déduire f.

1.6 Produits infinis

Soit (z_n) une suite d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$. On dit que le produit infini $\prod z_n$ converge si la suite (P_n) définie par $P_n = \prod_{k=0}^n z_k$ admet une limite non nulle. Dans tous les autres cas, on dit que le produit diverge. La suite (P_n) est appelée la suite des produits partiels. En cas de convergence, on note $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ la limite.

Exercice 17 *Soit (z_n) une suite dans $\mathbb{R}_+^*$.*

1) Montrer que le produit $\prod z_n$ converge si et seulement si $\sum \ln z_n$ converge. Dans ce cas,

$$\prod_{n=0}^{\infty} z_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \ln z_n\right).$$

2) Soit $u_n := z_n - 1$. On suppose que la suite (u_n) est de signe constant. Montrer que la convergence de $\prod z_n$ est équivalente à la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 18 *Soit (u_n) dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Montrer que*

1) *Le produit $\prod(1+u_n)$converge ssi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall N \leq n < p, \text{ on a } \left| \prod_{k=n+1}^{p} (1+u_k) - 1 \right| \leq \epsilon.$$

2) *Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors le produit $\prod(1+u_n)$ converge.*

3) *Applications : nature de*

$$\prod(1-z^n)\ ,\ \prod \frac{1}{1-z^n}\ ,\ \prod(1+z^{n^2}).$$

Exercice 19 1) *Montrer que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est une partie infinie de $\mathbb{N}$, et en déduire qu'il existe une bijection $n \mapsto p_n$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{P}$.*

2) *Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n \geq n+2$. En déduire que pour tout $\alpha > 1$, le produit infini $\prod(1 - \frac{1}{p_n^\alpha})$ converge.*

3) *Montrer que pour tout $\alpha > 1$,*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-1}.$$

4) *Montrer que le produit infini $\prod \left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)$ diverge. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$.*

Chapitre 2

Etude des séries : méthodes de compensation

Dans ce chapitre, on étudie deux situations où il est possible d'établir la convergence d'une série numérique qui n'est pas absolument convergente, ou la convergence uniforme d'une série de fonctions qui n'est pas normalement convergente. On commence par rappeler l'importance de la convergence uniforme pour établir la continuité ou la différentiabilité d'une fonction.

2.1 Convergence uniforme

2.1.1 Différents types de convergence

On considère une suite de fonctions $f_n : X \to Y$ où X est un ensemble et $(Y, || \cdot ||)$ un evn.

On dit que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : X \to Y$ si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ converge (dans Y !) vers $f(x)$.

On dit que la convergence est uniforme lorsque pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in X$, $||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon$.

On dit que la série des f_n converge normalement lorsque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in X} ||f_n(x)|| < \infty.$$

Exercice 20 *1) Donner un exemple d'une suite de fonctions qui converge simplement mais pas uniformément.*

2) Donner un exemple d'une série de fonctions qui converge uniformément mais pas normalement.

3) Montrer qu'une série de fonctions qui convergent normalement converge uniformément.

Exercice 21 *Etudier la convergence uniforme de (f_n) lorsque*

1) $f_n(x) = nxe^{-nx} \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) pour $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & si\ 0 \leq x < n \\ 0 \quad si\ x \geq n. \end{cases}$$

Exercice 22 *Etudier la convergence (simple, normale, uniforme) de la série d'applications $\sum f_n$ lorsque*

1) $f_n(x) = -th\,(x + n) + th\,n$, $x \in \mathbb{R}$,

2) $f_n(x) = (-1)^n e^{-nx}/n$, $x \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Continuité

Proposition 10 *Soient X et Y deux espace vectoriels normés et Ω un ouvert de X. Soit $f_n : \Omega \to Y$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction $f : \Omega \to Y$. Alors f est continue.*

Exercice 23 *1) Démontrer la proposition précédente.*

2) Donner un exemple d'une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction discontinue.

3) Donner et prouver l'énoncé correspondant pour les séries.

Exercice 24 (Théorème de Dini) *Soient $a < b$ et (f_n) une suite d'applications continues sur $[a, b]$ qui converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction continue f. Montrer alors que la convergence est uniforme sous l'une des deux conditions suivantes.*

1) On suppose que la suite (f_n) est croissante : $\forall x, \forall n, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Indication : soit $\epsilon > 0$.

1. *Montrer qu'on peut supposer $f = 0$. On suppose donc désormais $f = 0$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $E_n := \{x : f_n(x) > -\epsilon\}$. Montrer que (E_n) forme un recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts de $[a, b]$.*
3. *Conclure.*

2) On suppose que chaque f_n est croissante. Indication : soit $\epsilon > 0$.

1. *Montrer qu'il existe $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ tels que $\forall i = 0, \ldots, n-1$, $0 \leq f(a_{i+1}) - f(a_i) \leq \epsilon$.*
2. *Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \forall i = 0, \ldots, n-1$, $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \epsilon$.*
3. *Justifier que pour tout $x \in [a_i, a_{i+1}]$, $f_n(a_i) - f(a_{i+1}) \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(a_{i+1}) - f(a_i)$ puis conclure.*

Exercice 25 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{n^3}$. Etudier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.*

2.1.3 Dérivation

Proposition 11 *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. On considère une suite (f_n) de fonctions différentiables sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. On suppose que (f_n) converge simplement sur Ω vers une fonction f et que (Df_n) converge uniformément sur Ω vers une fonction $F : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Alors f est différentiable, de différentielle F.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. Comme (Df_n) converge uniformément sur Ω vers une fonction F, on peut écrire le critère de Cauchy uniforme : il existe $N > 0$ tel que pour tout $p, q \geq N$,

$$\sup_{x \in \Omega} ||Df_p(x) - Df_q(x)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \leq \epsilon.$$

En particulier (pour $p \to +\infty$, $q = N$), $\sup_{x \in \Omega} ||F(x) - Df_N(x)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \leq \epsilon$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à $h \mapsto f_p(x + h) - f_q(x + h)$ (ici, on utilise l'hypothèse Ω convexe), on obtient pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^m$ tel que $x + h \in \Omega$,

$$|(f_p(x + h) - f_p(x)) - (f_q(x + h) - f_q(x))| = |(f_p(x + h) - f_q(x + h)) - (f_p(x) - f_q(x))|$$

$$\leq \sup_{y \in \Omega} ||Df_p(y) - Df_q(y)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} |h| \leq \epsilon |h|.$$

En faisant $p \to \infty$ et en prenant $q = N$, il vient

$$|(f(x+h) - f(x)) - (f_N(x+h) - f_N(x))| \leq \epsilon |h|.$$

On fixe $x \in \Omega$. Par différentiabilité de f_N, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|h| < \eta$, $x + h \in \Omega$ et

$$|f_N(x+h) - f_N(x) - Df_N(x)(h)| \leq \epsilon |h|.$$

Ainsi,

$$|f(x+h) - f(x) - F(x)(h)| \leq |(f(x+h) - f(x)) - (f_N(x+h) - f_N(x))|$$

$$+ |f_N(x+h) - f_N(x) - Df_N(x)(h)| + |F(x)(h) - Df_N(x)(h)| \leq 3\epsilon |h|,$$

ce qui montre que f est différentiable, de différentielle F.

□

Exercice 26 *1) Réécrire la proposition lorsque $m = p = 1$. Dans ce contexte, en donner une preuve plus simple lorsqu'on suppose de plus les f_n continûment différentiables.*

2) Montrer que dans la proposition précédente, la suite (f_n) converge en fait unifomément vers f sur tout borné de Ω.

3) Trouver une suite de fonctions dérivables (f_n) sur un intervalle de $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f qui n'est pas dérivable.

Exercice 27 *1) On introduit pour $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que*

$$\lim_{x \to 1, x > 1} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \right) = \gamma,$$

où γ est la constante d'Euler.

2) On pose, pour $x > 0$, $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^{-x}$. Montrer que $\phi(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$. En étudiant ϕ, déterminer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

Exercice 28 *1) Dire pour quelles valeurs du couple $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$ est convergente. On suppose maintenant $t > 0$ et on note $P(t, x)$ le nombre $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$.*

2) Vérifier que $P(t, x)$ est réel. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} P(t, x)\, dx$.

3) Montrer que la fonction P définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est indéfiniment différentiable, et écrire ses dérivées partielles $\frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \partial x^q} P(t, x)$ sous forme de sommes de séries.

4) Calculer $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$.

Remarque 9 *On rappelle pour mémoire que la limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe.*

2.2 Séries alternées

Le théorème des séries alternées permet d'établir la convergence uniforme d'une série de fonctions, car il donne une majoration uniforme du reste.

Définition 10 *On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels est une série alternée si*

1. *u_n est de la forme $(-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$,*
2. *(a_n) est décroissante,*
3. *(a_n) tend vers 0.*

Proposition 12 *Une série alternée converge. De plus, le reste est 'majoré par le dernier terme négligé' : pour tout $n \geq 1$,*

$$|\sum_{p\geq n} u_n| \leq |u_{n-1}|.$$

Exercice 29 *1) Démontrer le théorème des séries alternées.*

2) Montrer par des contrexemples que les hypothèses 2 et 3 dans la définition des séries alternées sont nécessaires.

2) Discuter la nature de la série $\sum u_n$ pour

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \ (\alpha > 0) \ \ , \ \ u_n = (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n^s} \ \ (s > 0).$$

Exercice 30 *Pour tout $t \in]-1,1[$, on pose pour $n \geq 1$*

$$u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}.$$

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout compact de $]-1,1[$. On note S sa somme.

2) Montrer que $\lim_{t\to 1} S(t) = +\infty$.

3) Montrer que

$$S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{1-t^{k+1}}.$$

4) On pose $v_k(t) := \dfrac{(-1)^k t^{k+1}}{1+t+\cdots+t^k}$. Montrer que $\sum v_k$ converge uniformément sur $[0,1[$.

5) Montrer que $(1-t)S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$. En déduire que

$$S(t) \sim \frac{\ln 2}{1-t} \quad t \to 1.$$

2.3 Transformation d'Abel

La transformation d'Abel peut être utilisée pour démontrer la convergence d'une série qui ne converge pas absolument, ou obtenir une majoration uniforme du reste d'une série de fonctions qui ne converge par normalement.

Lemme 1 *Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq q$. Soient (a_n), (b_n) deux suites à coefficients complexes. On note $A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$, $m \geq 0$. Alors*

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n = A_q b_q - A_p b_{p+1} - \sum_{n=p+1}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

Preuve : On écrit $a_n = A_n - A_{n-1}$. Il vient

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p+1}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p+1}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p+1}^{q} A_{n-1} b_n = \sum_{n=p+1}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1}$$

$$= \sum_{n=p+1}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_p b_{p+1}.$$

□

Il y a une analogie (profonde) entre la transformation d'Abel sur les séries et l'intégration par parties. Dans cette analogie, la somme est une intégrale, de sorte que A_n peut être vue comme une 'primitive discrète' de a_n, et $b_{n+1} - b_n$ comme une 'dérivée discrète' de b_n.

Voici un critère de convergence qui peut se démontrer à l'aide de la transformation d'Abel :

Proposition 13 *Soient $x_0 \geq 0$ et $f : [x_0, \infty) \to \mathbb{C}$, de classe C^1. On suppose que l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et que*

$$\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)|\, dt < \infty.$$

Alors la série $\sum f(n)$ est convergente.

Preuve : Avec les notations du Lemme 1, on pose $a_n = 1$, $b_n = f(n)$. On a (pour $p = 0$ et $q = N$)

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = N f(N) - \sum_{n=1}^{N-1} n(f(n) - f(n+1)) = N f(N) - \sum_{n=1}^{N-1} n \int_{n}^{n+1} f'(t)\, dt$$

$$= N f(N) - \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n}^{n+1} [t] f'(t)\, dt = N f(N) - \int_{1}^{N} [t] f'(t)\, dt, \tag{2.1}$$

en notant $[t]$ la partie entière de t. Dans la suite, on note $\{t\}$ la partie fractionnaire de t.

Par intégration par parties, on a

$$\int_0^N f(t)\, dt = N f(N) - \int_0^N t f'(t)\, dt.$$

On en déduit

$$N f(N) = \int_0^N f(t)\, dt + \int_0^N t f'(t)\, dt.$$

On injecte cette égalité dans (2.1) pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)\, dt + \int_0^N t f'(t)\, dt - \int_1^N [t] f'(t)\, dt = \int_0^N f(t)\, dt + \int_0^N \{t\} f'(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Comme $|\{t\} f'(t)| \leq |f'(t)|$, on en déduit aussitôt la proposition.

□

Exercice 31 *En utilisant la proposition précédente (et aussi (2.2)), déterminer la nature des séries suivantes :*

$$\sum \frac{\cos \ln n}{n} \quad , \quad \sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}.$$

Exercice 32 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge sous l'une des deux conditions suivantes :*

1) La suite (v_n) est dans $\mathbb{R}_*^+$ et décroît vers 0, et la suite des sommes partielles de (u_n) est bornée.

2) La suite (v_n) est dans $\mathbb{R}_*^+$ et décroissante et la série $\sum u_n$ converge.

Soit $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. Etablir la convergence des séries

$$\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha} \ , \ \sum \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}.$$

Exercice 33 *Soit $\sum c_n$ une série convergente.*

1) Montrer que la fonction

$$g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} t^n$$

est définie et continue.

2) On suppose que les c_n sont positifs. Etablir que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

3) Désormais, on ne suppose plus que les c_n sont positifs, mais on se propose de montrer que l'égalité précédente reste vraie.

a) Soit $X > 0$. On pose $f(X) = \int_0^X e^{-t} g(t)\, dt$. Montrer que $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \phi_n(X)$ où

$$\phi_n(X) = 1 - e^{-X}\left(1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}\right).$$

b) Montrer que la série $\sum c_n \phi_n(X)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (penser à la transformation d'Abel).

c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt$ converge, et que sa valeur est $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Chapitre 3

Espaces de suites

Les espaces de suites permettent d'illustrer les notions (abstraites) d'analyse fonctionnelle. Vous ne devez donc pas hésiter à puiser abondamment dans cet ensemble d'exemples pour vos leçons d'analyse fonctionnelle.

3.1 Les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$

3.1.1 Définition

Définition 11 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. On note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, ou plus simplement $\mathcal{L}^p(X)$, l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que $|f|^p$ soit intégrable. De plus, on introduit*

$$||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 12 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, ou plus simplement $\mathcal{L}^\infty(X)$, l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles qu' il existe $M \geq 0$ vérifiant*

$$\mu(\{x : |f(x)| \geq M\}) = 0.$$

De plus, on introduit

$$||f||_\infty = \inf\{M \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| \geq M\}) = 0\}.$$

Proposition 14 (Inégalité de Hölder) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Proposition 15 (Inégalité de Minkowski) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Comme pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a aussi $||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p$, on en déduit que $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel. On a très envie de dire que $|| \cdot ||_p$ est une norme sur $\mathcal{L}^p$. Malheureusement, il n'est pas vrai que $||f||_p = 0$ implique $f = 0$. En revanche,

Lemme 2 *Si $||f||_p = 0$, alors f est nulle hors d'un ensemble négligeable.*

Le lemme qui précède conduit à introduire la relation d'équivalence suivante : on dit que deux fonctions mesurables $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont égales presque partout si elles sont égales hors d'un ensemble négligeable. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables, qu'on note ici $f \sim_{p.p.} g$.

On observe que si $f \sim_{p.p.} g$, alors $||f||_p = ||g||_p$.

Définition 13 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ par la relation d'équivalence $\sim_{p.p}$. Pour chaque élément $[f] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, (ici, $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $[f]$ est la classe des fonctions égales presque partout à f), on continue à noter $||[f]||_p$ pour désigner $||f||_p$ (cette quantité ne dépend pas du choix du représentant de la classe).*

En pratique, pour simplifier les notations, on confondra souvent un élément de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ (une classe de fonctions donc !) avec une fonction mesurable (l'un des représentants quelconques de cette classe).

Tout ce qui précède permet d'établir le

Théorème 10 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La fonction $||\cdot||_p$ est une norme sur l'espace vectoriel $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Définition 14 *Lorsqu'on prend $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$, on note $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$ sous la forme plus usuelle $\ell^p(\mathbb{N})$.*

De manière explicite, lorsque $1 \le p < \infty$, $\ell^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\ge0}$ telles que

$$||(u_n)_{n\ge0}||_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 34 *Montrer que si $(u_n)_{n\ge0} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, alors*

$$||(u_n)_{n\ge0}||_\infty = \sup_{n\ge0} |u_n|.$$

3.1.2 Complétude

Théorème 11 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach.*

Exercice 35 *Montrer directement (i.e. sans utiliser le théorème précédent) que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.*

3.1.3 Dualité

On rappelle que si $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Banach, alors le dual de E, noté E^*, est l'ensemble des formes linéaires $\zeta : E \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur E. De plus, on introduit

$$||\zeta||_* := \sup_{||e||\le1} |\zeta(e)|.$$

Alors $||\cdot||_*$ est une norme sur E^* et $(E^*, ||\cdot||_*)$ est un espace de Banach.

On applique ces notions aux espaces L^p.

Théorème 12 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note $p' = \frac{p}{p-1}$. On considère l'application*

$$\Phi : f \in L^p(X) \mapsto \Phi_f \in (L^{p'}(X))^*$$

défini pour tout $g \in L^{p'}(X)$ par

$$\Phi_f(g) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x).$$

Alors

- *pour tout $f \in L^p(X)$, $g \in L^{p'}(X)$, la quantité $\Phi_f(g)$ a bien un sens,*
- *pour tout $f \in L^p(X)$, la forme linéaire Φ_f est bien continue sur $L^{p'}(X)$,*
- *l'application Φ est linéaire et isométrique : pour tout $f \in L^p(X)$,*

$$||\Phi_f||_{(L^{p'}(X))^*} = ||f||_{L^p(X)},$$

- *si $1 < p < \infty$ ou bien si $p = +\infty$ et X est σ fini, l'application Φ est bijective.*

Ce théorème justifie souvent le raccourci suivant : $L^{p'}$ est le dual de L^p. Cela signifie simplement que l'application Φ du théorème précédent est un isomorphisme isométrique. Seule la surjectivité de Φ est délicate à prouver.

Exercice 36 *Démontrer le théorème précédent dans le cas $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$.*

3.2 Le cas particulier $p = 2$

Définition 15 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Sur $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, on considère l'application*

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x).$$

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, et pour tout $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Ainsi, $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ a une structure d'espace de Hilbert.

Exercice 37 (ORAL 2012) *On considère l'ensemble $h_2(\mathbb{N})$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ telles que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (nu_n)^2 < \infty.$$

1) *Montrer que $h_2(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N})$.*
2) *On introduit sur $h_2(\mathbb{N})$ l'application*

$$N : (u_n)_{n\geq 0} \mapsto \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} (nu_n)^2}.$$

Montrer que N est une norme et que $h_2(\mathbb{N})$ muni de cette norme est complet.

2) *Montrer que la boule unité fermée dans $(h_2(\mathbb{N}), N)$ est un compact de $(\ell^2(\mathbb{N}), ||\cdot||_2)$ (on pourra considérer une suite de la boule unité fermée dans $(h_2(\mathbb{N}), N)$ et utiliser un procédé d'extraction diagonale).*

Remarque 10 *L'espace $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ (défini de manière analogue à $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$) joue un rôle essentiel dans la théorie des séries de Fourier. On se souvient en effet (?) qu'une fonction $f \in L^2(0,2\pi)$ est la somme de sa série de Fourier dans $L^2(0,2\pi)$. Cette phrase signifie précisément ceci : si on note $c_n(f), n \in \mathbb{Z}$ les coefficients de Fourier de f, et $s_N(f)(t) = \sum_{|n|\leq N} c_n(f)e^{int}$ les sommes partielles associées, alors la limite de*

$$||f - s_N(f)||_{L^2(0,2\pi)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t) - s_N(f)(t)|^2\, dt}$$

quand $N \to +\infty$, existe et vaut 0. De plus (égalité de Parseval),

$$\frac{1}{2\pi}||f||^2_{L^2(0,2\pi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

On rappelle aussi pour mémoire que si f est maintenant une fonction 2π périodique, continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

3.3 Les cas particuliers $p = 1$ et $p = \infty$

Définition 16 *On note $c(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites convergentes, $c_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites convergeant vers 0 et $\ell^\infty_c(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.*

Ces deux ensembles de suites, qui sont contenus dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, sont munis de la norme $||\cdot||_\infty$.

Exercice 38 *1) Montrer que les espaces normés c et c_0 sont des espaces de Banach, mais pas ℓ^∞_c.*
2) Prouver que c_0^* est isométrique à ℓ^1.
3) Caractériser c^*.

Exercice 39 *Montrer que c_0 et ℓ^1 sont séparables (i.e. contiennent une partie dense dénombrable) mais que ℓ^∞ ne l'est pas.*

3.4 Procédé diagonal et théorème d'Ascoli

Pour montrer l'existence de solutions à des équations différentielles ordinaires ou à des équations aux dérivées partielles, les suites de fonctions jouent un rôle essentiel . Il est souvent utile de pouvoir en extraire des sous-suites convergentes (la limite étant précisément une solution de l'équation considérée). Le théorème d'Ascoli est parfois sollicité à cet effet. Pour le démontrer, on a besoin d'introduire le procédé diagonal.

Etant donné un nombre *fini* de suites d'éléments de $[0,1]$, il est banal de trouver une extraction commune à toutes ces suites pour les faire converger. C'est nettement moins évident lorsqu'on a un nombre dénombrable de suites. Le procédé diagonal est là pour ça.

Lemme 3 *[Procédé diagonal] Pour tout $i \geq 0$, on se donne une suite $(u^i_n)_{n\geq 0}$ dans l'espace métrique compact X. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (on note aussi $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$) telle que pour tout $i \geq 0$, la suite $(u^i_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge dans X.*

Preuve : Rappelons avant de commencer que si $\psi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$, alors $\psi(n) \geq n$ pour tout $n \geq 0$.

Comme $(u^0_n)_{n\geq 0}$ est une suite de X compact, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $(u^0_{\varphi_0(n)})_{n\geq 0}$ converge. Supposons construites $\varphi_0, \ldots, \varphi_k : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}, k \geq 0$, telles que $(u^i_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(n)})_{n\geq 0}$ converge pour tout $0 \leq i \leq k$. Alors on définit $\varphi_{k+1} : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $(u^{k+1}_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_{k+1}(n)})_{n\geq 0}$ converge (ce qui est possible puisque $(u^{k+1}_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)})_{n\geq 0}$ est une suite du compact X). On a ainsi construit par récurrence pour tout $i \geq 0$, une fonction $\varphi_i : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $(u^i_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(n)})_{n\geq 0}$ converge.

On pose pour tout $n \geq 0$,

$$\varphi(n) := \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n).$$

D'abord, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. En effet, soit $n \geq 0$. Alors $\varphi_{n+1}(n+1) > \varphi_{n+1}(n) \geq n$ d'où

$$\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) < \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)),$$

c'est-à-dire $\varphi(n) < \varphi(n+1)$.

Ensuite, pour tout $i \geq 0$, $(u^i_{\varphi(n)})_{n\geq i}$ est une suite extraite de $(u^i_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(n)})_{n\geq 0}$. En effet, soit $i \geq 0$ fixé. Pour tout $n \geq i$,

$$\varphi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(\varphi_{i+1\circ\cdots\circ}\varphi_n(n)) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(m_n)$$

en posant $m_n := \varphi_{i+1\circ\cdots\circ}\varphi_n(n)$. La suite $(m_n)_{n\geq i}$ est strictement croissante et

$$(u^i_{\varphi(n)})_{n\geq i} = (u^i_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(m_n)})_{n\geq i}$$

est donc convergente comme suite extraite d'une suite convergente.

□

A la place de l'hypothèse X compact, on aurait pu exiger que pour tout $i \geq 0$, toute suite extraite de $(u^i_n)_{n\geq 0}$ admette une sous-suite convergente.

Le procédé diagonal intervient de façon cruciale dans la preuve du théorème d'Ascoli.

Théorème 13 (Ascoli) *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions d'un espace métrique (X, d) séparable (i.e. contenant une partie dense dénombrable), vers un espace métrique compact (Y, δ).*

On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est équicontinue : pour tout $x \in X$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $y \in B(x, \eta)$, on a $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. .

Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ et $f : X \to Y$ continue telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact vers f : pour tout compact $K \subset X$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in K$, on a $\delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Preuve : Soit $D := \{d_i\}_{i\geq 0}$ une famille dense dénombrable de X. On applique le procédé diagonal (lemme 3) à la famille de suites $(f_n(d_i))_{n\geq 0}$, $i \geq 0$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \geq 0$, la suite $(f_{\varphi(n)}(d_i))_{n\geq 0}$ converge vers un élément de Y noté $f(d_i)$.

Soit $x \in X$. On montre que la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans Y. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \eta)$, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\delta(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(y)) \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Comme D est dense dans X, il existe $d_i \in D \cap B(x, \eta)$. Enfin, comme $(f_{\varphi(n)}(d_i))_{n\geq 0}$ converge, c'est une suite de Cauchy et donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, on a $\delta(f_{\varphi(p)}(d_i), f_{\varphi(q)}(d_i)) \leq \varepsilon$. Aninsi, pour tout $p, q \geq n_0$, on a

$$\delta(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(q)}(x)) \leq \delta(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(p)}(d_i)) + \delta(f_{\varphi(p)}(d_i), f_{\varphi(q)}(d_i)) + \delta(f_{\varphi(q)}(d_i), f_{\varphi(q)}(x)) \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi, $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans Y compact donc complet. Elle converge donc vers un élément de Y noté $f(x)$.

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans (3.1), on obtient que f est continue et $\{f_n\}_{n\geq 0} \cup \{f\}$ est équicontinue.

On montre enfin la convergence uniforme sur tout compact. Soit $K \subset X$ compact et $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ donné par l'équicontinuité de $\{f_n\}_{n\geq 0} \cup \{f\}$. On peut recouvrir K par une réunion finie de boules

$B(d_{i_1},\eta),\ldots,B(d_{i_m},\eta)$. Soit $n_0 \geq 0$ tel que $\delta(f_{\varphi(n)}(d_i),f(d_i)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $i = i_1,\ldots,i_m$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in K$, il existe $i \in \{i_1,\ldots,i_m\}$ tel que $x \in B(d_i,\eta)$ et alors

$$\delta(f_{\varphi(n)}(x),f(x)) \;\leq\; \delta(f_{\varphi(n)}(x),f_{\varphi(n)}(d_i)) \;+\; \delta(f_{\varphi(n)}(d_i),f(d_i)) \;+\; \delta(f(d_i),f(x)) \;\leq\; 3\varepsilon.$$

$\square$

Bibliographie

[1] J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, Cours de mathématiques, tome 2, Analyse, Dunod.

[2] X. Gourdon, Maths en tête Analyse, Ellipses.

[3] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Dunod.

[4] C. Zuilly et H. Queffelec, Analyse pour l’agrégation, Dunod.