Thèmes sur les distributions tempérées

Sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note N_p la norme

$$N_p(\varphi) = \sum_{0\leq i,j\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^i \varphi^{(j)}(x)|.$$

On définit alors la distance

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{N_p(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + N_p(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

On rappelle qu'une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est continue s'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ telles que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$|T(\varphi)| \leq C N_p(\varphi). \tag{1}$$

L'ordre d'une distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est l'entier p minimal satisfaisant (1).

Support d'une distribution

On se souvient que le support d'une fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est l'adhérence de l'ensemble des points où φ ne s'annule pas. La définition du support d'une distribution est un peu plus élaborée. On introduit d'abord les partitions de l'unité :

Théorème 1 (Partitions de l'unité) *[1, Théorème 3.2.9] Soit K un compact contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ouverts $I_1, \ldots, I_N$ de $\mathbb{R}$. Alors il existe des fonctions χ_j, $1 \leq j \leq N$ dans $C_c^\infty(I_j)$, comprises entre 0 et 1 telles que l'on ait au voisinage de K*

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_j = 1.$$

Preuve :

Lemme 1 *Il existe des compacts $K_j \subset I_j$ dont la réunion contient K.*

En effet, pour tout $x \in K$, il existe j tel que $x \in I_j$. Comme I_j est ouvert, il existe $r_x > 0$ tel que $[x - r_x, x + r_x] \subset I_j$. Comme $\{]x - r_x, x + r_x[\}_{x\in K}$ est un recouvrement d'ouverts de K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{]x_\alpha - r_{x_\alpha}, x_\alpha + r_{x_\alpha}[\}_{\alpha\in A}$ où A désigne un ensemble d'indices fini. On note A_j l'ensemble des indices $\alpha \in A$ tels que $[x_\alpha - r_{x_\alpha}, x_\alpha + r_{x_\alpha}] \subset I_j$. Par construction, $A = \cup_{1\leq j\leq N} A_j$. On peut alors poser

$$K_j := \cup_{\alpha\in A_j} [x_\alpha - r_{x_\alpha}, x_\alpha + r_{x_\alpha}],$$

ce qui achève la preuve du lemme.

Lemme 2 *[1, Théorème 6.1.1] Soit K un compact contenu dans un ouvert I de $\mathbb{R}$. Alors il existe une fonction $f \in C_c^\infty(I)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et égale à 1 au voisinage de K.*

En effet, comme I est ouvert, pour tout $x \in K$, il existe $r > 0$ tel que $[x-2r, x+2r] \subset I$. Par compacité de K, on peut donc recouvrir K par une union finie d'intervalles $]x_i - r_i, x_i + r_i[$ tels que $[x_i - 2r_i, x_i + 2r_i] \subset I$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $\varphi_i \in C_c^\infty(]x_i - 2r_i, x_i + 2r_i[)$ telle que $\varphi_i = 1$ sur $[x_i - r_i, x_i + r_i]$ et $\varphi_i \geq 0$. On pose

$$g = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i.$$

Alors $g \geq 1$ sur un voisinage de K et $g = 0$ hors de $\cup_i [x_i - 2r_i, x_i + 2r_i]$. En particulier, $g = 0$ hors d'un compact de I. On introduit maintenant une fonction Φ lisse, croissante, nulle sur $]-\infty, 0]$, égale à 1 sur $[1, +\infty[$. Alors la fonction $f = \Phi \circ g$ convient.

Montrons maintenant le théorème. Par le premier lemme, il existe des compacts $K_j \subset I_j$ dont la réunion contient K. Par le deuxième lemme, il existe des éléments $\psi_j \in C_c^\infty(I_j)$ compris entre 0 et 1, égaux à 1 sur des voisinages de K_j. On a donc $\sum_{j=1}^N \psi_j(x) > 0$ dans un voisinage V de K. Toujours par le deuxième lemme, il existe $\theta \in C_c^\infty(V)$ compris entre 0 et 1 et valant 1 sur un voisinage de K. On pose $\psi_0 = 1 - \theta$. On a donc $\sum_{j=0}^N \psi_j > 0$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc définir

$$\chi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{j=0}^N \psi_j(x)}.$$

En particulier,

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_j(x) = \frac{\sum_{j=1}^N \psi_j(x)}{\psi_0(x) + \sum_{j=1}^N \psi_j(x)} = 1$$

là où $\theta = 1$, à savoir sur un voisinage de K. Le théorème est démontré.

□

Avant de définir le support d'une distribution, on définit les ouverts d'annulation :

Définition 1 *On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ s'annule sur un ouvert I de $\mathbb{R}$ (ou encore que I est un ouvert d'annulation de T) si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à support compact dans I,*

$$T(\varphi) = 0.$$

Ensuite, on montre que

Lemme 3 *Si T s'annule sur des ouverts I_α, $\alpha \in A$, alors T s'annule sur la réunion $\cup_{\alpha \in A} I_\alpha$.*

Preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction à support compact K dans $\cup_{\alpha \in A} I_\alpha$. Comme K est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$K \subset \cup_{j=1}^N I_{\alpha_j}.$$

On introduit une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, c'est-à-dire une famille de fonctions $\chi_j \in C_c^\infty(I_j)$ comprises entre 0 et 1 et telles que sur un voisinage de K,

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_j = 1.$$

On pose alors $\varphi_j = \chi_j \varphi$. Ainsi $\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi_j$ donc $T(\varphi) = \sum_{j=1}^N T(\varphi_j)$. Par ailleurs, chaque $\varphi_j \in C_c^\infty(I_j)$ donc $T(\varphi_j) = 0$ puisque I_j est un ouvert d'annulation de T. En conclusion, $T(\varphi) = 0$.

□

On définit enfin le support d'une distribution :

Définition 2 *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Le plus grand ouvert d'annulation de T est la réunion de tous les ouverts d'annulation de T. Le support de T est le complémentaire de son plus grand ouvert d'annulation.*

Par le lemme 3, le plus grand ouvert d'annulation de T est encore un ouvert d'annulation de T.

Exercice 1

1. *Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. On note $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ la distribution tempérée*

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Comparer le support de f et le support de T_f ?

2. *Soit T une distribution tempérée. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que φ s'annule sur le support de T. Peut-on en déduire que $T(\varphi) = 0$?*

Exercice 2 *[1, section 6.1.5], [2, Theorem 6.25]*

1. *Soit T une distribution tempérée d'ordre 0 dont le support est contenu dans $\{0\}$. On veut montrer que T est un multiple de la masse de Dirac δ.*
   (a) *Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(-\varepsilon, \varepsilon)$ comprise entre 0 et 1 et qui vaut 1 sur un voisinage de 0 (on dessinera une telle fonction).*
   (b) *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui s'annule en 0. Montrer que $N_0(\varphi\psi_\varepsilon) \leq C\varepsilon$ pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de ε. Pourquoi $T(\varphi) = T(\varphi\psi_\varepsilon)$? En déduire que $|T(\varphi)| \leq C'\varepsilon$ pour une certaine constante $C' > 0$ indépendante de ε.*
   (c) *Conclure.*
2. *On suppose maintenant que T est une distribution tempérée d'ordre 1 dont le support est contenu dans $\{0\}$. Montrer que T est une combinaison linéaire de la masse de Dirac δ et de sa dérivée δ' (on montrera qu'on peut choisir ψ_ε telle que $||\psi_\varepsilon'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon$ et on prendra φ telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$).*
3. *Montrer plus généralement que toute distribution tempérée à support dans $\{0\}$ est une combinaison linéaire finie de la masse de Dirac et de ses dérivées.*

Dérivations, primitives et formule des sauts

Exercice 3 (Dérivée au sens des distributions de $\ln|x|$) *[3, Exercice 26]*

– *Montrer que $x \mapsto \ln|x|$ définit une distribution tempérée T.*
– *On définit pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction $T_\varepsilon(x) = \ln|x|$ si $|x| > \varepsilon$ et $T_\epsilon(x) = \ln\varepsilon$ sinon. Montrer que $(T_\epsilon)_{\epsilon>0}$ tend vers T au sens des distributions.*
– *Calculer la dérivée au sens des distributions de T_ε puis celle de T.*
– *En déduire que*

$$\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

est bien définie comme distribution tempérée. Il s'agit de la distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$, notée vp $\frac{1}{x}$.

Exercice 4 (Formule des sauts) *On rappelle qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est C^1 par morceaux s'il existe une subdivision de $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_N = b$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i = 0, \ldots, N-1$, $f_{]a_i,a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$. Une fonction f est dite C^1 par morceaux sur un intervalle I si elle est C^1 par morceaux sur chaque segment de I.*

- *Soit f une fonction polynomiale à l'infini : f est mesurable et il existe $p \in \mathbb{N}$ telle que $\frac{1}{1+|x|^p} f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f définit une distribution tempérée T_f.*
- *On suppose de plus que f est C^1 par morceaux et même (pour simplifier) C^1 hors d'un segment $[-M, M]$: f et sa dérivée f' ont donc au plus un nombre fini de singularités : $a_1 < \cdots < a_N$. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi f'$$

est convergente. Montrer également que $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi f'$ définit une distribution tempérée, notée $T_{f'}$.
- *(digression) La question précédente montre qu'il n'est pas nécessaire qu'une fonction f soit à croissance polynomiale pour qu'elle définisse une distribution. Montrer par exemple que $x \mapsto e^x \cos(e^x)$ définit une distribution tempérée.*
- *Montrer la formule des sauts pour une fonction f comme en 2) :*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{N} (f(a_j^+) - f(a_j^-))\delta_{a_j}.$$

Exercice 5 (Primitives) *[3, Exercice 37] Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*
- *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle. On note $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\, dt = -\int_{x}^{+\infty} \psi(t)\, dt$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{|x| \to +\infty} x^k \Psi(x) = 0$ (on pourra distinguer les cas $x < 0$ et $x > 0$ et utiliser que $|\psi(t)| \leq \frac{N_{k+2}(\psi)}{1+|t|^{k+2}}$). En déduire que $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
- *On introduit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ d'intégrale 1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On définit alors*

$$\psi = \varphi - \theta \int_{\mathbb{R}} \varphi,$$

puis la fonction Ψ comme précédemment. Montrer que

$$T'(\Psi) = -T(\varphi) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi \right) T(\theta).$$

- *En déduire que si $T' = 0$, alors T est une constante.* [1]
- *Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'équation pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$T^{(k)} = 0.$$

- *Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la transformée de Fourier et l'exercice 2.*
- *Montrer que pour tout $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, il existe $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $T' = S$.*

Transformée de Fourier

Exercice 6 (Exemples de calcul de transformée de Fourier) *[3, Exercice 73] Calculer la transformée de Fourier de vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ (on pourra commencer par montrer que x vp $\left(\frac{1}{x}\right) = 1$). En déduire la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside.*

1. Pour répondre seulement à cette question sans s'appuyer sur la précédente, il est sans doute plus rapide de montrer que $0 = -T(\varphi) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi \right) T(\theta)$ lorsque $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ puis d'utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La première question est en effet plus facile à traiter dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ que dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Peigne de Dirac) *Soit*

$$T = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta_i.$$

- *Montrer que T est bien défini comme élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*
- *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\theta(y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi(j+y)$. Montrer que θ est bien défini, 1 périodique et C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer les coefficients de Fourier de θ.*
- *En déduire la transformée de Fourier de T.*

Exercice 8 (Inversion de Fourier) *[2, paragraphe 7.7] On prend (par exemple) la formule (lorsque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$)*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

On rappelle la formule d'inversion de Fourier : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{2}$$

Montrer que (2) *implique $\widehat{1} = 2\pi\delta$. La suite de l'exercice est conscrée à une preuve de la formule d'inversion. L'idée est de montrer d'abord que $\widehat{1} = 2\pi\delta$ et d'en déduire* (2)*.*

- *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(0) = 1$. On pose pour tout $t > 0$ $\varphi_t(x) = \varphi(tx)$. Montrer que φ_t tend vers 1 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ quand $t \to 0$.*
- *Montrer que $\widehat{\varphi}_t$ tend vers $\lambda\delta$ où $\lambda = \widehat{\widehat{\varphi}}(0)$. En déduire que $\widehat{1} = \lambda\delta$.*
- *Calculer λ en testant l'égalité précédente sur une gaussienne.*
- *En déduire que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

  $$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} = 2\pi\varphi(0).$$

  En déduire la formule d'inversion.

Références

[1] Jean-Michel Bony, Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier, Les éditions de l'école polytechnique, 2010.

[2] Walter Rudin, Functional Analysis, Mc Graw-Hill, 1991.

[3] Claude Zuily, Problèmes de distributions avec solutions détaillées, Hermann, 1978.