

# Cours de Topologie et Analyse Fonctionnelle pour l'Agrégation

Pierre Bousquet

2013/2014



# Chapitre 1

## Topologie

### 1.1 Espaces métriques

On se donne un ensemble  $X$ .

**Définition 1 (distance)** Une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une distance sur  $X$  si

i) (séparation) pour tous  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ ,

ii) (symétrie) pour tous  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$ ,

iii) (inégalité triangulaire) pour tous  $x, y, z \in X$ ,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

On dit alors que  $(X, d)$  est un espace métrique.

Désormais, on se donne une distance  $d$  sur  $X$ .

**Définition 2** On dit qu'une partie  $U$  de  $X$  est un ouvert si pour tout  $x \in U$ , il existe  $r > 0$  tel que

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

est contenu dans  $U$ . On appelle  $B(x, r)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Pour  $x \in X$ , on appelle voisinage de  $x$  un ensemble contenant un ouvert contenant  $x$ .

On dit qu'une partie  $F$  de  $X$  est un fermé si son complémentaire  $X \setminus F$  est un ouvert.

Observer que  $X$  et  $\emptyset$  sont deux parties ouvertes de  $X$ . La famille de tous les ouverts de  $(X, d)$  est appelée la topologie de  $X$ .

**Exercice 1** 1) Montrer que  $U \subset X$  est ouvert si et seulement si il peut s'écrire comme une réunion quelconque de boules ouvertes.

2) Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert et qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

4) Énoncer et démontrer des propriétés analogues pour les fermés.

**Définition 3** Soit  $A \subset X$ .

– L'intérieur de  $A$ , noté  $\text{int } A$ , est la réunion de tous les ouverts contenus dans  $A$  (c'est donc aussi le plus grand ouvert contenu dans  $A$ ).

– L'adhérence de  $A$ , notée  $\overline{A}$ , est l'intersection de tous les fermés contenant  $A$  (c'est donc aussi le plus petit fermé contenant  $A$ ).

– La frontière de  $A$ , notée  $\partial A$ , est  $\overline{A} \setminus \text{int } A$ .

Observer que  $A$  est ouvert si et seulement si il est égal à son intérieur et que  $A$  est fermé si et seulement si il est égal à son adhérence.

**Exercice 2** Soit  $x \in X$  et  $r > 0$ . Montrer qu'on n'a pas nécessairement  $\overline{B(x, r)} = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}$ .

**Définition 4** On dit que  $A \subset X$  est dense dans  $X$  si  $\overline{A} = X$ .

**Définition 5** Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $X$ .

- On dit que  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers un élément  $x \in X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in B(x, \varepsilon)$ . On dit alors que  $x$  est la limite de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ .
- On dit que  $x \in X$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \geq 0}$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq n_0$  tel que  $x_n \in B(x, \varepsilon)$ .

**Exercice 3** – Montrer que si une suite converge vers  $x \in X$  et vers  $y \in X$ , alors  $x = y$ .

- Montrer que  $F \subset X$  est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de  $F$  convergeant dans  $X$  a sa limite dans  $F$  (c'est le critère séquentiel pour les fermés).
- Montrer que  $x \in \overline{A}$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $y \in A$  tel que  $y \in B(x, \varepsilon)$ . Énoncer et démontrer une caractérisation analogue de  $\partial A$ .
- Montrer que  $x \in X$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \geq 0} \subset X$  si

$$x \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{x_m, m \geq n\}}.$$

- Montrer que  $x \in X$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \geq 0} \subset X$  si il existe une suite extraite convergeant vers  $x$ .

Dans la suite, on se donne un deuxième espace métrique  $(Y, \delta)$  et une application  $f : X \rightarrow Y$ .

**Définition 6** – On dit que  $l \in Y$  est une limite de  $f$  en  $x \in X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x' \in X \setminus \{x\}$  vérifiant  $d(x', x) < \delta$ , on a  $\delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

- On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est continue en  $x \in X$  si  $f$  admet une limite en  $x$  qui vaut  $f(x)$ . Elle est dite continue sur  $X$  si cette propriété est vraie pour tout  $x \in X$ .
- On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme si  $f$  est bijective, continue, et d'inverse continue.

**Exercice 4 (Continuité)** Montrer que  $f$  est continue si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vraie :

- Pour tout ouvert  $V \subset Y$ ,  $f^{-1}(V)$  est un ouvert de  $X$ .
- Pour toute suite convergente  $(x_n)_{n \geq 0}$  dans  $X$ , la suite  $(f(x_n))_{n \geq 0}$  est convergente dans  $Y$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right).$$

C'est le critère séquentiel de continuité.

- Pour tout  $A \subset X$ ,  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

**Exercice 5** La composée de deux applications continues est continue.

**Exercice 6** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux espaces métriques. On suppose que  $f$  s'annule sur une partie dense dans  $X$ . Montrer qu'alors  $f$  s'annule sur  $X$ .

**Définition 7** On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est uniformément continue si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x, y \in X$  vérifiant  $d(x, y) < \delta$ , on a  $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Exercice 7** On dit que  $f$  est lipschitzienne s'il existe  $k \geq 0$  tel que pour tout  $x, y \in X$ , on a

$$\delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

(et  $k$  est alors une constante de Lipschitz de  $f$ ). Montrer que si  $f$  est lipschitzienne, alors elle est uniformément continue.

**Définition 8** Soit  $A \subset X$ . On note  $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$  la restriction de  $d$  à  $A \times A$  :  $d_A(x, y) = d(x, y)$  pour tout  $x, y \in A$ . On observe que  $d_A$  est une distance sur  $A$ , appelée la distance induite sur  $A$ .

**Exercice 8** Une partie  $S \subset A$  est un ouvert de  $(A, d_A)$  si et seulement si il existe un ouvert  $U$  de  $(X, d)$  tel que  $S = U \cap A$ .

On dit que l'ensemble des ouverts de  $(A, d_A)$  est la topologie induite de  $X$  sur  $A$ .

**Exercice 9** Donner un exemple d'ensemble  $X$  et deux distances  $d_1$  et  $d_2$  sur  $X$  tels que  $(X, d_1)$  et  $(X, d_2)$  ne sont pas homéomorphes.

**Exercice 10** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Montrer qu'il existe une distance  $\delta$  sur  $X$  vérifiant  $\delta(x) \leq 1$  pour tout  $x \in X$  et telle que  $(X, \delta)$  soit homéomorphe à  $(X, d)$  (essayer avec  $\delta = \frac{d}{1+d}$ ).

La notion de parties bornées dans un espace métrique est donc sans intérêt (du moins dans le sens usuel du mot 'borné').

## 1.2 Complétude

Ici,  $(X, d)$  est un espace métrique.

**Définition 9** On dit que  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $p, q \geq n_0$ , on a  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ .

On dit que  $(X, d)$  est complet lorsque toute suite de Cauchy de  $X$  converge.

Le critère de Cauchy dans un espace métrique complet est souvent un moyen de montrer la convergence d'une suite dont on ignore la limite éventuelle.

**Exercice 11** Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $X$ .

- Montrer que si  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge, alors elle est de Cauchy.
- Montrer que si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy et a une valeur d'adhérence, alors elle converge vers celle-ci.
- Montrer que s'il existe une série convergente à termes positif  $\sum_n a_n$  tel que pour tout  $n \geq 0$ ,  $d(x_n, x_{n+1}) < a_n$ , alors  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy.

**Exercice 12** On munit  $\mathbb{R}$  de la distance  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bornée.
- Soit  $l := \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n (= \inf_{m \geq 0} \sup_{n \geq m} u_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq m} u_n)$  (observer que la suite  $(\sup_{n \geq m} u_n)_{m \geq 0}$  est décroissante et donc ces limites existent). Montrer que  $l \in \mathbb{R}$  puis que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $l$ . En déduire que  $\mathbb{R}$  est complet.

**Exercice 13** - Montrer que  $\mathbb{R}$  muni de la distance  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  est homéomorphe à  $] - 1, 1[$  muni de la distance induite (on pourra considérer la fonction  $\arctan$ ).

- Montrer que  $] - 1, 1[$  n'est pas complet. Qu'en déduire ?
- Montrer que  $\mathbb{C}$  est complet pour la distance  $d(z, z') = |z - z'|$ ,  $z, z' \in \mathbb{C}$ .

**Théorème 1 (Théorème de point fixe)** On suppose  $X$  complet. Soit  $f : X \rightarrow X$  une application contractante : il existe  $0 < k < 1$  tel que pour tout  $x, y \in X$ , on a  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ . Alors  $f$  a un unique point fixe.

Preuve : Soit  $x_0 \in X$ . On va montrer que la suite  $(f^n(x_0))_{n \geq 0}$  converge vers un point fixe de  $f$  (ici,  $f^n$  désigne l'itérée  $n$  fois de  $f : f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ ). Pour cela, on montre que c'est une suite de Cauchy.

Pour tout  $n, m \geq 1$ ,

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) = d(f(f^{n-1}(x_0)), f(f^n(x_0))) \leq kd(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \dots \leq k^n d(x_0, f(x_0)).$$

Comme la série  $\sum_n k^n$  converge, on en déduit que la suite  $(f^n(x_0))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $X$  complet. Notons  $x$  sa limite. Alors en passant à la limite dans  $d(f^n(x_0), f(f^n(x_0))) \leq k^n d(x_0, f(x_0))$ , il vient  $d(x, f(x)) = 0$  (noter qu'une application contractante est continue). Ainsi,  $x = f(x)$  est un point fixe de  $f$ .

Pour l'unicité, il suffit de voir que si  $x, y \in X$  sont deux points fixes de  $f$ , alors  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ . Comme  $k < 1$ , ceci n'est possible que si  $d(x, y) = 0$ , et donc  $x = y$ .  $\square$

**Exercice 14 (Equations intégrales)** Soit  $K : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose qu'il existe  $0 < k < 1$  telle que pour tout  $t \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}$ , on a  $|K(t, x) - K(t, y)| \leq k|x - y|$ . On considère l'application

$$T : u \in C^0([0, 1]) \mapsto Tu$$

définie par  $Tu(x) := \int_0^1 K(t, u(x)) dt, x \in [0, 1]$ . Montrer que l'équation  $u = Tu$  a une unique solution dans  $C^0([0, 1])$ .

**Théorème 2 (Théorème de point fixe à paramètre)** On suppose  $X$  complet et soit  $T$  un espace métrique. Soit  $f : X \times T \rightarrow X$  telle que

- il existe  $0 < k < 1$  tel que pour tout  $t \in T$ , pour tout  $x, y \in X$ ,  $d(f(t, x), f(t, y)) \leq kd(x, y)$ ,
- pour tout  $x \in X, t \mapsto f(t, x)$  est continue.

Alors pour tout  $t \in T$ ,  $f(t, \cdot)$  a un unique point fixe  $x(t)$  et l'application  $t \mapsto x(t)$  est continue.

Preuve : La première partie de la conclusion résulte du théorème précédent appliqué à  $f(t, \cdot)$ . Maintenant fixons  $t_0 \in T$ . Alors pour tout  $t \in T$ ,

$$\begin{aligned} d(x(t), x(t_0)) &= d(f(t, x(t)), f(t_0, x(t_0))) \leq d(f(t, x(t)), f(t, x(t_0))) + d(f(t, x(t_0)), f(t_0, x(t_0))) \\ &\leq kd(x(t), x(t_0)) + d(f(t, x(t_0)), f(t_0, x(t_0))). \end{aligned}$$

Ainsi  $d(x(t), x(t_0)) \leq \frac{1}{1-k} d(f(t, x(t_0)), f(t_0, x(t_0)))$ . On conclut par la continuité de  $f(\cdot, x(t_0))$ .  $\square$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz et le théorème d'inversion locale peuvent se démontrer à l'aide du théorème de point fixe ou du théorème de point fixe à paramètres. Penser aussi aux applications pour l'approximation : méthode de Newton et méthode de la sécante.

**Théorème 3** Soit  $f : D \subset X \rightarrow Y$  une fonction définie sur une partie  $D$  dense dans  $(X, d)$  à valeurs dans l'espace métrique complet  $(Y, \delta)$ . On suppose que  $f$  est uniformément continue. Alors  $f$  admet un unique prolongement continu à  $X$  (qui est en fait uniformément continu).

Preuve : Soit  $x \in X$  et  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $D$  qui converge vers  $x$ . Montrons que  $(f(x_n))_{n \geq 0}$  est de Cauchy. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est uniformément continue, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $z, z' \in X$  vérifiant  $d(z, z') < \eta$ , on a  $\delta(f(z), f(z')) < \varepsilon$ . La suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  étant convergente, elle est de Cauchy. Donc il existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $p, q \geq n_0$ , on a  $d(x_p, x_q) < \eta$ . Alors  $\delta(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$ . Ainsi,  $(f(x_n))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $Y$  complet, et donc converge vers un élément  $\alpha \in Y$ .

Soient maintenant une autre suite  $(x'_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $D$  convergeant vers  $x$ . Comme précédemment,  $(f(x'_n))_{n \geq 0}$  converge vers un élément  $\alpha' \in Y$ . On va montrer que  $\alpha = \alpha'$ . Pour cela, soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  tel que  $z_n = x_n$  si  $n$  est pair et  $z_n = x'_n$  si  $n$  est impair. En appliquant ce qui précède à  $(z_n)_{n \geq 0}$ , il vient que  $(f(z_n))_{n \geq 0}$  converge vers un élément  $\beta \in Y$ . Comme  $(f(z_n))_{n \geq 0}$  et  $(f(x_n))_{n \geq 0}$  ont une suite extraite en commun, on a  $\alpha = \beta$  et de même  $\alpha' = \beta$ , donc  $\alpha = \alpha'$ . Ainsi, la limite de  $(f(x_n))_{n \geq 0}$  ne dépend pas du choix de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $D$  qui converge vers  $x$ . On note  $f(x)$  cette limite. On définit ainsi un prolongement de  $f$  à  $X$  tout entier.

Montrons que  $f$  est uniformément continu. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\eta > 0$  correspondant donné par l'uniforme continuité de  $f|_D$ . On se donne  $x, x' \in X$  tels que  $d(x, x') < \frac{\eta}{3}$ . Par construction de  $f$ , il existe  $z, z' \in D$  tels que  $d(x, z) \leq \frac{\eta}{3}$  et  $d(f(x), f(z)) \leq \varepsilon$  et de même  $d(x', z') \leq \frac{\eta}{3}$  et  $d(f(x'), f(z')) \leq \varepsilon$ . Alors  $d(z, z') \leq \eta$  et donc

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(z')) + d(f(z'), f(x')) \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi,  $f$  est uniformément continu.

Enfin, pour l'unicité, s'il existe une fonction continue  $g : X \rightarrow Y$  qui coïncide avec  $f$  sur  $D$ , alors  $g - f$  est continue et nulle sur une partie dense de  $X$ , donc nulle sur  $X$ . □

Ce théorème de prolongement permet notamment d'étendre la transformée de Fourier définie initialement sur  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  à  $L^2(\mathbb{R}^n)$  tout entier. Il intervient également lorsqu'on cherche à prolonger l'intervalle de définition de la solution d'une équation différentielle ordinaire (théorème d'explosion en temps fini). C'est également lui qui est derrière le théorème de prolongement dérivable : si une fonction  $f \in C^1(]a, b[)$  est telle que sa dérivée a une limite à droite en  $a$ , alors  $f$  se prolonge en une fonction  $C^1([a, b[)$ .

**Exercice 15** *Sous les hypothèses du théorème précédent, montrer que si on suppose de plus  $f$  isométrique (i.e.  $\delta(f(x), f(y)) = d(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$ ), alors le prolongement reste isométrique.*

### 1.3 Compacité

La compacité est une propriété de 'super complétude' : la compacité implique la complétude, et les preuves d'un même résultat sont généralement beaucoup plus faciles dans un compact que dans un complet. Problème : les compacts sont rares. Le théorème de Riesz affirme même qu'en dimension infinie, ils sont d'intérieur vide (et donc pas bien gros). D'où l'intérêt du théorème d'Ascoli qui permet d'établir la compacité de certaines parties d'espaces fonctionnels.

On se donne un espace métrique  $(X, d)$ .

**Définition 10** *On dit que  $X$  est compact si pour tout recouvrement de  $X$  par une famille quelconque  $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  d'ouverts de  $X$  (i.e.  $X = \cup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ ), il existe un recouvrement fini : il existe  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$  tels que  $X = \cup_{i=1}^k U_{\gamma_i}$ .*

On dit qu'une partie  $A \subset X$  est compacte si  $A$  est compacte pour la distance induite.

**Exercice 16** *Expliciter la notion de compacité d'une partie de  $X$  en termes de recouvrements d'ouverts.*

**Théorème 4** *On suppose  $X$  compact. Soit  $A$  un fermé de  $X$ . Alors  $A$  est compact (pour la topologie induite).*

*Preuve :* Soit  $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  une famille d'ouverts de  $X$  recouvrant  $A$ . Alors la famille constituée de  $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  et de  $X \setminus A$  est une famille d'ouverts de  $X$  recouvrant  $X$ . Comme  $X$  est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, qui donne un sous-recouvrement fini de  $A$ . □

**Théorème 5** *L'image continue d'un compact est compacte.*

Preuve : Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue surjective de l'espace métrique compact  $X$  sur un espace métrique  $Y$ . Montrons que  $Y$  est compact. Un recouvrement ouvert  $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  de  $Y$  donne un recouvrement ouvert  $(f^{-1}(U_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$  de  $X$  (ici, on utilise la continuité de  $f$ ). Par compacité de  $X$ , il existe  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$  tels que  $X = \cup_{i=1}^k f^{-1}(U_{\gamma_i})$ . Par surjectivité de  $f$ , on obtient un sous-recouvrement ouvert fini de  $Y : Y = \cup_{i=1}^k U_{\gamma_i}$ . □

**Théorème 6** *L'espace métrique  $X$  est compact si et seulement si toute suite de  $X$  a une valeur d'adhérence.*

Preuve : Supposons que  $X$  est compact. Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $X$ . Posons

$$F_m := \overline{\{x_l : l \geq m\}} \quad , \quad U_m := X \setminus F_m.$$

Alors  $(U_m)_{m \geq 0}$  est une suite croissante d'ouverts de  $X$ . Supposons par l'absurde que  $X = \cup_{m \geq 0} U_m$ . Comme  $X$  est compact et que la suite  $(U_m)_{m \geq 0}$  est croissante, il existe donc  $m \geq 0$  tel que  $X = U_m$  et donc  $F_m = \emptyset$ , ce qui est absurde. Ainsi  $\cap_{m \geq 0} F_m \neq \emptyset$ . Tout élément de cette intersection est une valeur d'adhérence.

Réciproquement, supposons que toute suite de  $X$  a une valeur d'adhérence et montrons que  $X$  est compact.

**Étape 1** On établit d'abord que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement fini de  $X$  par des boules de rayon  $\varepsilon$ . Pour le voir, procédons par l'absurde : on pourrait dans ce cas construire par récurrence une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  telle que pour tout  $m \neq n \geq 0$ , on a  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ . En effet, soit  $x_0 \in X$ . Par hypothèse absurde,  $X \neq B(x_0, \varepsilon)$  donc il existe  $x_1 \in X \setminus B(x_0, \varepsilon)$ . Supposons construits  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tels que pour tout  $0 \leq i \neq j \leq n$ , on a  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ . Par hypothèse absurde,  $X \neq \cup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon)$  et donc il existe  $x_{n+1} \in X \setminus \cup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon)$ . Une telle suite étant construite, on observe qu'elle ne peut pas avoir de valeur d'adhérence (pour tout  $x \in X$ , il existe au plus un  $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ ) : contradiction !

**Étape 2** Soit maintenant  $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  un recouvrement d'ouverts de  $X$ . Montrons par l'absurde qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que toute boule de rayon  $\varepsilon > 0$  soit contenue dans au moins l'un des  $U_\gamma$ . Sinon, pour tout  $n > 0$ , il existe  $x_n \in X$  tel que la boule  $B(x_n, \frac{1}{n})$  ne soit contenue dans aucun des  $U_\gamma$ . On peut extraire une sous-suite  $(x_{n_k})_{k \geq 0}$  convergeant vers un élément  $y \in X$ . Il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $y \in U_\gamma$ . Comme  $U_\gamma$  est ouvert, il existe  $\rho > 0$  tel que  $B(y, \rho) \subset U_\gamma$ . Soit  $k \geq 0$  tel que  $d(x_{n_k}, y) < \frac{\rho}{2}$  et  $\frac{1}{n_k} < \frac{\rho}{2}$ . Alors  $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset U_\gamma$  : contradiction !

**Étape 3** On peut maintenant conclure : soit  $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  un recouvrement d'ouverts de  $X$ . Par l'étape 2, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que toute boule de rayon  $\varepsilon > 0$  soit contenue dans au moins l'un des  $U_\gamma$ . Par l'étape 1, il existe un recouvrement fini de  $X$  par des boules de rayon  $\varepsilon$ , qui sont chacune contenues dans l'un des  $U_\gamma$ . Cela fournit le sous-recouvrement fini attendu. □

**Théorème 7** *Si  $X$  est compact, alors il est complet.*

Preuve : Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy. Par le théorème précédent, il existe une valeur d'adhérence  $x \in X$ .

Montrons que  $x$  est la limite de  $(x_n)_{n \geq 0}$  (pour ceux qui auraient oublié qu'une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers celle-ci). Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy, il



existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $p, q \geq n_0$ ,  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ . Comme  $x$  est une valeur d'adhérence, il existe  $p_0 \geq n_0$  tel que  $d(x, x_{p_0}) < \varepsilon$ . Alors pour tout  $q \geq n_0$ ,

$$d(x_q, x) \leq d(x_q, x_{p_0}) + d(x_{p_0}, x) \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve. □

**Exercice 17** Si  $f : (E_1, d_1) \rightarrow (E_2, d_2)$  est une application continue entre deux espaces métriques, et si  $(E_1, d_1)$  est compact, alors  $f$  est uniformément continue.

On introduit maintenant l'une des plus belles idées de ce chapitre. Etant donné un nombre fini de suites d'éléments de  $[0, 1]$ , il est banal de trouver une extraction commune à toutes ces suites pour les faire converger. C'est nettement moins évident lorsqu'on a un nombre dénombrable de suites. Le procédé diagonal est là pour ça.

**Lemme 1 [Procédé diagonal]** Pour tout  $i \geq 0$ , on se donne une suite  $(u_n^i)_{n \geq 0}$  dans l'espace métrique compact  $X$ . Alors il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante (on note aussi  $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ ) telle que pour tout  $i \geq 0$ , la suite  $(u_{\varphi(n)}^i)_{n \geq 0}$  converge dans  $X$ .

Preuve : Rappelons avant de commencer que si  $\psi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ , alors  $\psi(n) \geq n$  pour tout  $n \geq 0$ .

Comme  $(u_n^0)_{n \geq 0}$  est une suite de  $X$  compact, il existe  $\varphi_0 : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$  telle que  $(u_{\varphi_0(n)}^0)_{n \geq 0}$  converge. Supposons construites  $\varphi_0, \dots, \varphi_k : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ ,  $k \geq 0$ , telles que  $(u_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}^i)_{n \geq 0}$  converge pour tout  $0 \leq i \leq k$ . Alors on définit  $\varphi_{k+1} : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$  telle que  $(u_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{k+1}(n)}^{k+1})_{n \geq 0}$  converge (ce qui est possible puisque  $(u_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}^{k+1})_{n \geq 0}$  est une suite du compact  $X$ ). On a ainsi construit par récurrence pour tout  $i \geq 0$ , une fonction  $\varphi_i : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$  telle que  $(u_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}^i)_{n \geq 0}$  converge.

On pose pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\varphi(n) := \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n).$$

D'abord,  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante. En effet, soit  $n \geq 0$ . Alors  $\varphi_{n+1}(n+1) > \varphi_{n+1}(n) \geq n$  d'où

$$\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n) < \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)),$$

c'est-à-dire  $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ .

Ensuite, pour tout  $i \geq 0$ ,  $(u_{\varphi(n)}^i)_{n \geq i}$  est une suite extraite de  $(u_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}^i)_{n \geq 0}$ . En effet, soit  $i \geq 0$  fixé. Pour tout  $n \geq i$ ,

$$\varphi(n) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(\varphi_{i+1} \circ \dots \circ \varphi_n(n)) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(m_n)$$

en posant  $m_n := \varphi_{i+1} \circ \dots \circ \varphi_n(n)$ . La suite  $(m_n)_{n \geq i}$  est strictement croissante et

$$(u_{\varphi(n)}^i)_{n \geq i} = (u_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(m_n)}^i)_{n \geq i}$$

est donc convergente comme suite extraite d'une suite convergente. □

A la place de l'hypothèse  $X$  compact, on aurait pu exiger que pour tout  $i \geq 0$ , toute suite extraite de  $(u_n^i)_{n \geq 0}$  admette une sous-suite convergente.

Le procédé diagonal intervient de façon cruciale dans la preuve du théorème d'Ascoli.

**Théorème 8 (Ascoli)** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions d'un espace métrique  $(X, d)$  séparable (i.e. contenant une partie dense dénombrable), vers un espace métrique compact  $(Y, \delta)$ .

On suppose que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est équicontinue : pour tout  $x \in X$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $y \in B(x, \eta)$ , on a  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

Alors il existe  $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$  et  $f : X \rightarrow Y$  continue telle que  $(f_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact vers  $f$  : pour tout compact  $K \subset X$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , pour tout  $x \in K$ , on a  $\delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ .

Preuve : Soit  $D := \{d_i\}_{i \geq 0}$  une famille dense dénombrable de  $X$ . On applique le procédé diagonal (lemme 1) à la famille de suites  $(f_n(d_i))_{n \geq 0, i \geq 0}$ . Il existe  $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $i \geq 0$ , la suite  $(f_{\varphi(n)}(d_i))_{n \geq 0}$  converge vers un élément de  $Y$  noté  $f(d_i)$ .

Soit  $x \in X$ . On montre que la suite  $(f_{\varphi(n)}(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $Y$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $y \in B(x, \eta)$ , pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$\delta(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(y)) \leq \varepsilon. \quad (1.1)$$

Comme  $D$  est dense dans  $X$ , il existe  $d_i \in D \cap B(x, \eta)$ . Enfin, comme  $(f_{\varphi(n)}(d_i))_{n \geq 0}$  converge, c'est une suite de Cauchy et donc il existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $p, q \geq n_0$ , on a  $\delta(f_{\varphi(p)}(d_i), f_{\varphi(q)}(d_i)) \leq \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $p, q \geq n_0$ , on a

$$\delta(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(q)}(x)) \leq \delta(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(p)}(d_i)) + \delta(f_{\varphi(p)}(d_i), f_{\varphi(q)}(d_i)) + \delta(f_{\varphi(q)}(d_i), f_{\varphi(q)}(x)) \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi,  $(f_{\varphi(n)}(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $Y$  compact donc complet. Elle converge donc vers un élément de  $Y$  noté  $f(x)$ .

En passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans (1.1), on obtient que  $f$  est continue et  $\{f_n\}_{n \geq 0} \cup \{f\}$  est équicontinue.

On montre enfin la convergence uniforme sur tout compact. Soit  $K \subset X$  compact et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\eta > 0$  donné par l'équicontinuité de  $\{f_n\}_{n \geq 0} \cup \{f\}$ . On peut recouvrir  $K$  par une réunion finie de boules  $B(d_{i_1}, \eta), \dots, B(d_{i_m}, \eta)$ . Soit  $n_0 \geq 0$  tel que  $\delta(f_{\varphi(n)}(d_i), f(d_i)) < \varepsilon$  pour tout  $n \geq n_0$  et pour tout  $i = i_1, \dots, i_m$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , pour tout  $x \in K$ , il existe  $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$  tel que  $x \in B(d_i, \eta)$  et alors

$$\delta(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \leq \delta(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(d_i)) + \delta(f_{\varphi(n)}(d_i), f(d_i)) + \delta(f(d_i), f(x)) \leq 3\varepsilon.$$

□

La preuve montre qu'on peut remplacer l'hypothèse  $Y$  compact par l'hypothèse : pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $\{f_n(x) : n \geq 0\}$  est compact. Le théorème d'Ascoli permet par exemple de montrer l'existence de solutions à des équations différentielles (théorème de Cauchy-Peano ou Cauchy-Lipschitz). Il intervient aussi dans la preuve du théorème de Montel (voir exercice 28).

**Exercice 18** Dans  $C^0([0, 1])$  muni de la norme uniforme, l'ensemble des fonctions lipschitziennes de rapport  $\leq 1$  qui s'annulent en 0 est compact.

C'est donc un exemple d'ensemble compact en dimension infinie.

## 1.4 Connexité

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

**Définition 11** On dit que  $X$  est connexe si on ne peut pas l'écrire sous la forme  $X = U \cup V$  avec  $U, V$  deux ouverts disjoints non vides.

Comme toujours, on dit qu'une partie  $A$  de  $X$  est connexe lorsqu'elle est connexe (au sens de la définition précédente) pour la topologie induite.

**Exercice 19** – Soit  $A$  une partie non vide de  $X$  et on suppose  $X$  connexe. Montrer que si  $A$  est ouverte et fermée, alors  $A = X$ .  
 – Montrer que les singletons  $\{x\}, x \in X$ , sont connexes.

**Définition 12** On dit que  $A \subset X$  est une composante connexe de  $X$  si  $A$  est connexe et est maximale pour cette propriété.

Autrement dit, si  $A \subset B \subset X$  avec  $B$  connexe, alors  $A = B$ .

**Théorème 9** Soient  $A$  et  $B$  deux parties connexes de  $X$ . Alors

- 1) si  $A \cap B \neq \emptyset$ , alors  $A \cup B$  est connexe,
- 2)  $\overline{A}$  est connexe.

Preuve : On prouve d'abord le point 1). Soient  $U, V$  deux ouverts disjoints de  $X$  tels que  $A \cup B \subset U \cup V$ . Alors  $A \subset U \cup V$ . Comme  $A$  est connexe, soit  $A \cap U = \emptyset$  soit  $A \cap V = \emptyset$ . Supposons par exemple  $A \cap V = \emptyset$  et donc  $A \subset U$ . De même, soit  $B \cap U = \emptyset$  soit  $B \cap V = \emptyset$ . Mais comme  $A \cap B \neq \emptyset$  et  $A \subset U$ , on a nécessairement  $B \cap U \neq \emptyset$ . C'est donc que  $B \cap V = \emptyset$ . En conclusion,  $(A \cup B) \cap V = \emptyset$ . Donc  $A \cup B$  est connexe.

Passons au point 2). Soient  $U, V$  deux ouverts disjoints de  $X$  tels que  $\overline{A} \subset U \cup V$ . Alors  $A \subset U \cup V$ . Donc par exemple  $A \cap V = \emptyset$  (en utilisant la connexité de  $A$ ). Comme  $X \setminus V$  est fermé, on a  $\overline{A} \cap V = \emptyset$ , ce qui conclut la preuve. □

Observez qu'au point 1), on aurait pu prendre une réunion quelconque de connexes d'intersection non vide (avec une preuve semblable).

Les composantes connexes de  $X$  sont donc deux à deux disjointes (sinon, la réunion de deux composantes connexes d'intersection non vide serait un connexe plus grand que chacune d'elles). Ainsi chaque point  $x \in X$  appartient à une unique composante connexe, à savoir la réunion de toutes les parties connexes qui contiennent  $x$ . Ainsi, l'espace  $X$  est la réunion disjointe de ses composantes connexes.

De plus, par le deuxième point, les composantes connexes de  $X$  sont fermées (sinon, l'adhérence d'une composante connexe serait connexe et plus grande).

**Théorème 10** L'image continue d'un connexe est connexe.

Preuve : Soit  $X$  un espace connexe et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue surjective à valeurs dans un espace métrique  $Y$ . Montrons que  $Y$  est connexe. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts disjoints de  $Y$  tels que  $Y = U \cup V$ . Alors

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Comme  $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  sont deux ouverts disjoints de  $X$  qui est connexe, c'est donc que l'un des deux est vide, par exemple  $f^{-1}(U)$ . Mais alors  $U = f(f^{-1}(U))$  car  $f$  est surjective, et donc  $U = \emptyset$ . □

Un cas particulier de ce résultat est donné par le théorème des valeurs intermédiaires, pour les fonctions réelles continues sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 11** Les parties connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

Preuve : Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Montrons que  $I$  est connexe. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts disjoints de  $\mathbb{R}$  tels que  $I \subset U \cup V$ . Supposons par l'absurde que  $I \cap U \neq \emptyset \neq I \cap V$ . Soient  $a \in I \cap U$  et  $b \in I \cap V$  et supposons par exemple  $a < b$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $[a, a + \varepsilon] \subset I \cap U$  et  $[b - \varepsilon, b] \subset I \cap V$ . Soit  $t := \sup\{x \geq a : [a, x] \subset I \cap U\}$ . Alors  $a + \varepsilon \leq t \leq b - \varepsilon$ . En particulier,  $t \in \text{int } I$ . Par définition du supremum, et du fait que  $U \cap \text{int } I$  est ouvert, nécessairement,  $t \notin U$ . Mais si  $t \in V$ , alors

comme  $V \cap \text{int } I$  est ouvert, il existe  $z \in ]a, t[$  tel que  $z \in V \cap U$  : impossible. Ainsi,  $t \in I \setminus (U \cup V)$  : contradiction.

Réciproquement, soit  $I$  une partie connexe de  $\mathbb{R}$  et montrons que  $I$  est un intervalle. Soit  $a, b \in I$  tels que  $a \leq b$ . Soit  $c \in [a, b]$ . Il s'agit de montrer que  $c \in I$ . Sinon, posons  $U := (-\infty, c)$ ,  $V := (c, +\infty)$ . Alors  $I \subset U \cup V$ , et ce sont deux ouverts disjoints non vides : contradiction.  $\square$

**Définition 13** On dit que  $X$  est connexe par arcs si pour tout  $x, y \in X$ , il existe  $f : [0, 1] \rightarrow X$  continu tel que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ .

**Théorème 12** Si  $X$  est connexe par arcs, alors il est connexe.

Preuve : Supposons par l'absurde qu'il existe  $U$  et  $V$  deux ouverts disjoints non vides tels que  $X = U \cup V$ . Soit  $x \in U$  et  $y \in V$ , puis  $f : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin continu reliant  $x$  à  $y$ . Soient  $I := f^{-1}(U)$  et  $J := f^{-1}(V)$ . Alors  $I$  et  $J$  sont deux ouverts (car  $f$  continue) non vides disjoints de  $[0, 1]$ . La connexité de  $[0, 1]$  implique la contradiction.  $\square$

La réciproque du théorème précédent est fautive en général. Dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'une distance usuelle, soit  $X_0 := \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}$ . Cet ensemble est connexe par arcs (c'est le graphe d'une fonction continue) et en particulier connexe. Son adhérence  $X := \overline{X_0}$  est donc aussi connexe. Montrons que  $X$  n'est pas connexe par arcs. Observons que  $X = X_0 \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $f : [0, 1] \rightarrow X$  continue telle que  $f(0) = (1, \sin 1)$  et  $f(1) \in \{0\} \times [-1, 1]$ . On note  $x(t)$  l'abscisse de  $f(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Quitte à remplacer 1 par  $\inf\{t > 0 : x(t) = 0\}$ , on peut supposer que pour tout  $t < 1$ ,  $x(t) > 0$ .

La fonction  $t \mapsto x(t)$  est continue, comme composée de  $f$  qui est continue, et de la projection sur la première coordonnée, qui est linéaire en dimension finie donc continue. Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $x([1-\varepsilon, 1])$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}^+$  (comme image continue d'un intervalle compact). Comme  $x(1) = 0$ , il existe donc  $a_\varepsilon > 0$  tel que  $x([1-\varepsilon, 1]) = [0, a_\varepsilon]$ . On en déduit pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\overline{f([1-\varepsilon, 1])} \supset \overline{\{(t, \sin \frac{1}{t}) : t \in ]0, a_\varepsilon]\}} \supset \{0\} \times [-1, 1].$$

Ainsi pour tout  $\alpha \in [-1, 1]$ , il existe une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 1 telle que  $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(0, \alpha)$ . Ceci contredit le fait que  $f$  a une limite (unique !) en 1.

**Théorème 13** Tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est une réunion disjointe et dénombrable d'intervalles ouverts.

Preuve : Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(C_i)_{i \in I}$  la famille de ses composantes connexes. Elles sont disjointes 2 à 2. Pour chaque  $i \in I$ , il existe  $q_i \in \mathbb{Q} \cap C_i$ , ce qui donne une injection de  $I$  dans  $\mathbb{Q}$ . En particulier, il y a (au plus) un nombre dénombrable de composantes connexes. Il reste à montrer que ce sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ . Soit  $i \in I$  et  $x \in C_i$ . Alors, il existe  $r > 0$  tel que  $]x-r, x+r[ \subset U$  (car  $U$  ouvert). Comme les intervalles sont connexes,  $]x-r, x+r[$  est contenu dans la composante connexe  $C_i$  de  $x$ , ce qui montre que  $C_i$  est ouverte.  $\square$

## 1.5 Espaces vectoriels normés

On se donne un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Définition 14 (norme)** Une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une norme sur  $E$  si  
i) (séparation) pour tout  $x \in E$ ,  $N(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ,

- ii) (positive homogénéité) pour tout  $x \in E$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ ,  
 iii) (inégalité triangulaire) pour tout  $x, y \in E$ ,  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

On ne définit des normes que sur des espaces vectoriels ! Mais étant donné une norme  $N$  sur un espace vectoriel  $E$ , on peut définir une distance  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  par  $d(x, y) := N(x - y)$ ,  $x, y \in E$ . Ainsi, toutes les notions introduites pour les espaces métriques (complétude, compacité, connexité) concernent aussi les e.v.n.

**Théorème 14** Soit  $f : E_1 \rightarrow E_2$  une application linéaire entre deux e.v.n  $(E_1, N_1), (E_2, N_2)$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

- 1)  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est continue,
- 2)  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est continue en 0,
- 3) il existe  $C > 0$  tel que  $\sup_{x \neq 0} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} \leq C$ .

Preuve : Il est clair que 1) implique 2). Montrons que 2) implique 3). Comme  $f$  est continue en 0, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in \overline{B}(0, \eta)$ ,  $N_2(f(x) - f(0)) \leq 1$ . On en déduit  $N_2(f(x)) \leq \frac{N_1(x)}{\eta}$  pour tout  $x \neq 0$ , ce qui prouve 3). Supposons maintenant 3) et montrons 2). Soit  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{C})$ , on a

$$N_2(f(x) - f(y)) = N_2(f(x - y)) \leq CN_1(x - y) \leq C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Le théorème est démontré. □

**Exercice 20** Soit  $f : E_1 \rightarrow E_2$  une application linéaire entre deux e.v.n  $(E_1, N_1), (E_2, N_2)$ . Montrer que

$$\sup_{x \neq 0} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} = \sup_{N_1(x)=1} N_2(f(x)) = \sup_{N_1(x) \leq 1} N_2(f(x)).$$

Lorsque cette quantité est finie, on l'appelle norme subordonnée de  $f$  (sous-entendu, subordonnée aux normes  $N_1$  et  $N_2$ ) et on la note  $\|f\|$ . Noter que  $N_2(f(x)) \leq \|f\|N_1(x)$  pour tout  $x \in E_1$ .

**Exercice 21** Montrer que la norme subordonnée est une norme !

Dans toute la suite,  $(E, N)$  désigne un e.v.n.

**Définition 15** On dit qu'une partie  $A \subset X$  est bornée si elle est contenue dans une boule.

**Théorème 15** Un compact de  $E$  est fermé et borné.

Preuve : Soit  $K$  une partie compacte de  $E$ . On extrait du recouvrement  $\cup_{x \in K} B(x, 1)$  un sous recouvrement fini  $\cup_{i=1}^k B(x_i, 1)$ . On en déduit que  $K \subset B(0, \max_{1 \leq i \leq k} N(x_i) + 1)$ , ce qui montre que  $K$  est borné.

Pour montrer que  $K$  est fermé, on considère une suite  $(x_i)_{i \geq 0}$  d'éléments de  $K$  convergeant vers  $x \in E$ . Comme la suite a une valeur d'adhérence  $y \in K$ , alors  $x = y$  et en particulier  $x \in K$ . Donc  $K$  est fermé. □

**Théorème 16** Dans un e.v.n.  $E$ , les ouverts connexes sont connexes par arc.

Preuve : Soit  $U \subset E$  un ouvert connexe. Montrons que  $U$  est connexe par arc. Soit  $x \in U$ . Notons  $U_x$  l'ensemble des points  $y \in U$  tel qu'il existe un chemin continu dans  $U$  reliant  $x$  à  $y$  :  $f : [0, 1] \rightarrow U$  continu avec  $f(0) = x, f(1) = y$ . Alors  $U_x$  est non vide (il contient  $x$ ).

Montrons que  $U_x$  ouvert : si  $y \in U_x$ , soit  $r > 0$  tel que  $B(y, r) \subset U$ . Alors tout point  $z$  de  $B(y, r)$  peut être relié continûment dans  $B(y, r)$  (par le segment joignant  $z$  à  $y$  !) et donc à  $x$  (en connectant les deux chemins, et en les reparamétrant, pour que la concaténation des deux chemins soient paramétrées sur  $[0, 1]$ ). Ainsi,  $B(y, r) \subset U_x$  et  $U_x$  est ouvert.

Montrons que  $U_x$  est fermé dans  $U$ . Soit  $(y_i)_{i \geq 0}$  une suite dans  $U_x$  convergeant vers  $y \in U$ . Alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(y, r) \subset U$ , puis  $i \geq 0$  tel que  $y_i \in B(y, r)$ . En concaténant (et reparamétrant) le chemin dans  $U$  reliant  $x$  à  $y_i$  avec le segment joignant  $y_i$  à  $y$ , on voit que  $y \in U_x$ .

Ainsi,  $U_x = U$ .

□

**Exercice 22** Les parties convexes d'un e.v.n. sont connexes par arc.

## 1.6 Espaces de Banach

**Définition 16** Un espace de Banach est un e.v.n. complet.

**Définition 17** Le dual (topologique) d'un Banach  $E$  est l'ensemble noté  $E^*$  des formes linéaires continues sur  $E$ .

En particulier, on peut définir  $\|f\|$  pour tout élément  $f$  de  $E^*$  (norme subordonnée à la norme sur  $E$  et à  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{K}$ ).

**Théorème 17** Si  $(E, N)$  est un Banach, alors l'e.v.n.  $(E^*, \|\cdot\|)$  est aussi un Banach.

Preuve : Soit  $(f_i)_{i \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $E^*$  : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $i_0 \geq 0$  tel que pour tout  $i, j \geq i_0$ , on a  $\|f_i - f_j\| < \varepsilon$ , i.e. pour tout  $x \in E$ ,

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon N(x). \quad (1.2)$$

On en déduit que pour tout  $x \in E$ ,  $(f_i(x))_{i \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{K}$ , qui est complet. Donc  $(f_i(x))_{i \geq 0}$  converge dans  $\mathbb{K}$  vers un élément noté  $f(x)$ . On définit ainsi une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ . La linéarité passant à la limite simple,  $f$  est une forme linéaire. En fixant  $i$  et en faisant  $j \rightarrow +\infty$  dans (1.2), il vient

$$|f_i(x) - f(x)| \leq \varepsilon N(x) \quad (1.3)$$

et donc  $|f(x)| \leq (\varepsilon + \|f_i\|)N(x)$  pour tout  $x \in E$ . Ceci implique que  $f$  est bien continue. Enfin, (1.3) montre aussi que  $\|f_i - f\| \leq \varepsilon$  dès que  $i \geq i_0$ , ce qui prouve que  $(f_i)_{i \geq 0}$  converge vers  $f$  dans  $E^*$ .

□

**Théorème 18** Soit  $(E, N)$  un e.v.n. Alors  $E$  est un Banach si et seulement si toute série absolument convergente est simplement convergente.

Preuve : Supposons que  $E$  est un Banach. Soit  $\sum_k x_k$  une série absolument convergente (ce qui veut dire qu'elle converge en norme, à ne pas confondre avec la convergence normale !) :  $\sum_{k=0}^{\infty} N(x_k) < \infty$ . Notons  $S_l := \sum_{k=0}^l x_k$ . Alors pour tout  $0 \leq m < l$ , on a  $N(S_l - S_m) = N(\sum_{k=m+1}^l x_k) \leq \sum_{k=m+1}^l N(x_k) \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} N(x_k)$ . Comme le reste d'une série convergente (ici  $\sum_k N(x_k)$ ) tend vers 0, on en déduit que la suite des sommes partielles  $(S_l)_{l \geq 0}$  est de Cauchy dans  $E$  Banach, et donc converge : la série est simplement convergente.

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente est convergente et montrons que  $E$  est un Banach. Soit  $(x_i)_{i \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $E$ . Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle a une valeur d'adhérence. On va construire par récurrence une suite extraite  $(x_{\varphi(i)})_{i \geq 0}$ , avec  $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $i \geq 0$ ,

$$N(x_{\varphi(i)} - x_{\varphi(i+1)}) \leq \frac{1}{2^i}. \quad (1.4)$$

Il existe  $i_0$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ , on a  $N(x_i - x_{i_0}) < \frac{1}{2}$ . On pose  $\varphi(0) = i_0$ . Supposons construits  $\varphi(0) < \dots < \varphi(k)$  tel que pour tout  $0 \leq j \leq k$ , on a pour tout  $i \geq j$ ,  $N(x_i - x_{\varphi(j)}) \leq \frac{1}{2^{j+1}}$ . Alors il existe  $i_{k+1} > \varphi(k)$  tel que pour tout  $i \geq i_{k+1}$ , on a  $N(x_i - x_{i_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ . On pose  $\varphi(k+1) = i_{k+1}$ . Cette fonction  $\varphi$  ainsi construite par récurrence est strictement croissante, et vérifie (1.4).

Posons maintenant  $y_i := x_{\varphi(i)} - x_{\varphi(i+1)}$ . Alors par construction la série  $\sum_i y_i$  est absolument convergente, donc simplement convergente. Comme pour tout  $j \geq 1$ , on a  $x_{\varphi(j)} = -\sum_{i=0}^{j-1} y_i + x_{\varphi(0)}$ , on en déduit que la suite extraite  $(x_{\varphi(i)})_{i \geq 0}$  est convergente, donc la suite  $(x_i)_{i \geq 0}$  a une valeur d'adhérence.  $\square$

## 1.7 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Commençons par le résultat fondamental suivant :

**Théorème 19** *L'intervalle  $[-1, 1]$  est compact dans  $\mathbb{R}$  (muni de la norme usuelle).*

Preuve : Soit  $(x_k)_{k \geq 0}$  une suite dans  $[-1, 1]$ . On commence par couper l'intervalle en deux segments de même longueur 1. L'un des deux contient une infinité de termes de la suite. On recoupe ce dernier en deux segments de même longueur  $\frac{1}{2}$ . L'un de ces deux segments contient une infinité de termes de la suite. On construit ainsi par récurrence une suite décroissante de segments  $(I_j)_{j \geq 0}$  contenus dans  $[-1, 1]$ , contenant une infinité de termes de la suite et tels que la longueur de  $I_j$  soit  $\frac{1}{2^j}$ ,  $j \geq 0$ . On construit ensuite par récurrence une sous-suite  $(x_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$  telle que pour tout  $k \geq 0$ ,  $x_{\varphi(k)} \in I_k$ . Alors,  $|x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k+1)}| \leq \frac{1}{2^k}$ . C'est donc une suite de Cauchy, qui converge vers un élément de  $[-1, 1]$  (car  $[-1, 1]$  fermé dans  $\mathbb{R}$  complet).  $\square$

Dans toute la suite,  $(E, N)$  désigne un espace vectoriel normé de dimension finie  $n \geq 1$ . Sur  $\mathbb{K}^n$ , on considère la norme  $N_\infty(x) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ , pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ .

**Lemme 2** *Dans  $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$ , l'ensemble  $[-1, 1]^n$  est compact.*

Preuve : Pour  $1 \leq i \leq n$ , soit  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la projection sur la  $i^{\text{eme}}$  coordonnée. Soit  $(x_k)_{k \geq 0}$  une suite de  $[-1, 1]^n$ . Alors pour  $1 \leq i \leq n$ , la suite  $\pi_i(x_k)_{k \geq 0}$  est une suite dans le compact  $[-1, 1]$ . On peut trouver une extraction commune  $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$  telle que  $(\pi_i(x_{\varphi(k)}))_{k \geq 0}$  converge vers  $x_i \in [-1, 1]$  (c'est un cas facile d'extraction diagonale, puisqu'il y a ici un nombre fini de suites). On en déduit en posant  $x := (x_1, \dots, x_n)$  que

$$N_\infty(x_{\varphi(k)} - x) = \max_{1 \leq i \leq n} |\pi_i(x_{\varphi(k)}) - x_i| \longrightarrow 0,$$

ce qui montre le lemme.  $\square$

**Théorème 20** *L' e.v.n  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$  est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel normé) à  $\mathbb{K}^n$ .*

Preuve : Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ . Soit  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  défini par  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Alors  $f$  est un isomorphisme d'espace vectoriel. Pour tout  $e \in E$ , l'application  $t \in \mathbb{K} \mapsto te \in E$  est lipschitzienne de constante  $N(e)$ , en particulier continue. Donc  $f$  est continue comme somme de fonctions continues.

On montre maintenant que  $f^{-1}$  est continue. Notons  $S := \partial[-1, 1]^n$ . C'est un fermé dans un compact, donc compact. Comme  $f$  est continue,  $f(S)$  est compacte, et en particulier fermé. Comme  $f$  est une injection linéaire,  $0 \notin f(S)$ . Ainsi, il existe  $r > 0$  tel que  $B(0, r) \cap f(S) = \emptyset$ .

Montrons que  $B(0, r) \subset f((-1, 1)^n)$ . En effet, soit  $e \in B(0, r)$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in \mathbb{K}^n$  tel que  $f(x) = e$ . Alors  $\frac{e}{N_\infty(x)} = f(\frac{x}{N_\infty(x)})$  est dans  $f(S)$ . Donc  $\frac{e}{N_\infty(x)} \notin B(0, r)$ , ce qui implique  $N_\infty(x) < 1$ . On a donc bien  $B(0, r) \subset f((-1, 1)^n)$ , ce qu'on peut réécrire

$$f^{-1}(B(0, r)) \subset (-1, 1)^n.$$

Autrement dit,  $\|f^{-1}\| \leq \frac{1}{r}$ . En particulier,  $f^{-1}$  est continue sur  $E$ . □

Une conséquence du théorème précédent est qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\frac{1}{C} N_\infty(f^{-1}(x)) \leq N(x) \leq C N_\infty(f^{-1}(x))$$

(prendre  $C := \max(\|f\|, \|f^{-1}\|)$ ). En particulier, si  $E = \mathbb{K}^n$  et  $f$  est l'application  $Id$ , on en déduit que toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{K}^n$ . Plus généralement,

**Théorème 21** *Sur un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve : Soit  $(E, N)$  un e.v.n. et  $N'$  une autre norme sur  $E$ . Introduisons un isomorphisme d'e.v.n.  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ . On a ainsi deux normes sur  $\mathbb{K}^n : x \mapsto N(f(x))$  et  $x \mapsto N'(f(x))$ . Par la remarque précédente, elles sont équivalentes : il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$ , on a  $C^{-1}N'(f(x)) \leq N(f(x)) \leq CN'(f(x))$ . Ceci donne (par surjectivité de  $f$ ) que  $N$  et  $N'$  sont équivalentes sur  $E$ . □

Le théorème précédent montre que n'importe quelle norme sur  $\mathbb{K}^n$  induit le même ensemble d'ouverts (i.e. la même topologie). On peut donc parler de l'e.v.n  $\mathbb{K}^n$  sans préciser la norme considérée, si on s'intéresse à une propriété topologique (i.e. qui ne dépend que des ouverts).

**Théorème 22** *Soit  $f : E_1 \rightarrow E_2$  une application linéaire entre deux e.v.n.  $(E_1, N_1), (E_2, N_2)$ . On suppose  $E_1$  de dimension finie. Alors  $f$  est continue.*

Preuve : On peut supposer que  $E_1 = \mathbb{K}^n$ , où  $n$  est la dimension de  $E_1$ . En effet, si  $h$  est un isomorphisme d'e.v.n. entre  $\mathbb{K}^n$  et  $E_1$ , alors  $f$  est continu si et seulement si  $f \circ h$  est continu. Alors pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , on a  $f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$ , en notant  $e_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique. Or l'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(e_i)$  est lipschitzienne, de constante  $N_2(f(e_i))$ . On en déduit que  $f$  est continue comme somme de fonctions continues. □

**Exercice 23** *Un e.v.n. de dimension finie est complet.*

**Exercice 24** *Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^n$  sont fermés.*

**Théorème 23** *Les compacts de  $E$  sont les fermés bornés.*



Preuve : On a déjà vu que les compacts sont toujours fermés et bornés (la dimension finie n'intervient pas ici). Réciproquement, soit  $K \subset E$  fermé borné et montrons que  $E$  est compact. On peut supposer que  $E = \mathbb{K}^n$  (un homéomorphisme linéaire envoie les compacts sur les compacts, les fermés sur les fermés, et les bornés sur les bornés).

On peut trouver  $R > 0$  tel que  $[-R, R]^n \supset K$  car  $K$  est borné. Comme  $K$  est fermé dans le compact  $[-R, R]^n$ , on en déduit que  $K$  est compact. □

**Théorème 24 (Théorème de Riesz)** *Soit  $X$  un e.v.n. Alors la boule unité fermée  $\overline{B}(0, 1)$  est compacte si et seulement si  $X$  est de dimension finie.*

Preuve : Si  $X$  est de dimension finie, alors par le théorème précédent,  $\overline{B}(0, 1)$  est compacte. Réciproquement, supposons que  $\overline{B}(0, 1)$  est compacte, et montrons que  $X$  est de dimension finie. Il existe  $x_1, \dots, x_k \in \overline{B}(0, 1)$  tels que

$$\overline{B}(0, 1) \subset \cup_{i=1}^k \overline{B}(x_i, \frac{1}{2}).$$

Observons que

$$\cup_{i=1}^k \overline{B}(x_i, \frac{1}{2}) \subset \{x_i, i = 1, \dots, k\} + \overline{B}(0, \frac{1}{2}) \subset \text{vect}(x_1, \dots, x_k) + \overline{B}(0, \frac{1}{2}).$$

On va montrer que  $X = F$  où  $F := \text{vect}(x_1, \dots, x_k)$ . Comme  $\overline{B}(0, 1) \subset F + \overline{B}(0, \frac{1}{2})$ , on a aussi

$$\overline{B}(0, \frac{1}{2}) \subset \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}\overline{B}(0, \frac{1}{2}) = F + \overline{B}(0, \frac{1}{4}).$$

On en déduit

$$\overline{B}(0, 1) \subset F + \overline{B}(0, \frac{1}{4})$$

puis par une récurrence immédiate

$$\overline{B}(0, 1) \subset \cap_{i \geq 0} (F + \overline{B}(0, \frac{1}{2^i})).$$

Montrons que  $F$  est fermé. Soit  $x \in X \setminus F$ . Notons  $F_0 := F \oplus \mathbb{K}x$ . Muni de la norme induite, c'est un e.v.n. de dimension finie, qui est donc linéairement homéomorphe à  $\mathbb{K}^n$ , pour un certain  $n \geq 1$ . Notons  $h : \mathbb{K}^n \rightarrow F_0$  cet homéomorphisme. Alors  $h^{-1}(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  qui ne contient pas  $h^{-1}(x)$ . Il existe donc un ouvert  $V \subset \mathbb{K}^n \setminus h^{-1}(F)$  contenant  $h^{-1}(x)$ . Alors  $h(V)$  est un ouvert de  $F_0$  contenant  $x$  et n'intersectant pas  $F$ . Par définition de la topologie induite, il existe un ouvert  $W$  de  $X$  tel que  $h(V) = W \cap F_0$ . Alors  $W$  contient  $x$  et n'intersecte pas  $F$  (car  $W \cap F = W \cap F_0 \cap F = h(V) \cap F = \emptyset$ ). Donc  $F$  est fermé.

Montrons que  $\cap_{i \geq 0} (F + \overline{B}(0, \frac{1}{2^i})) = F$ . L'inclusion  $\supset$  est vraie. Pour montrer  $\subset$ , soit  $x \in \cap_{i \geq 0} (F + \overline{B}(0, \frac{1}{2^i}))$ . Alors, pour tout  $i \geq 0$ , il existe  $y_i \in F$  et  $z_i \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^i})$  tels que  $x = y_i + z_i$ . Comme  $z_i \rightarrow 0$ , on a  $y_i \rightarrow x$ . Ainsi  $x \in \overline{F} = F$ .

Ainsi,  $\overline{B}(0, 1) \subset F$ . Mais alors

$$X = \cup_{t > 0} \overline{B}(0, t) \subset \cup_{t > 0} tF = F.$$

□

Au passage, on a montré qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un e.v.n. est fermé dans ce dernier.

## 1.8 Produit d'espaces métriques

On se donne à présent  $n \geq 1$  espaces métriques  $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ . Pour chaque norme  $N$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir sur le produit  $X_1 \times \dots \times X_n$  la distance  $d_N$  :

$$d_N((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := N((d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n))) \quad , \quad \forall x_i, y_i \in X_i, i = 1, \dots, n.$$

Par exemple, si  $N$  est la norme  $N_1(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n |t_i|$ ,  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$d_{N_1}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_n(x_n, y_n).$$

**Proposition 1** *Si  $N$  et  $N'$  sont deux normes sur  $\mathbb{R}^n$ , alors les espaces  $(X, d_N)$  et  $(X, d_{N'})$  sont homéomorphes.*

Preuve : Il suffit de montrer que  $Id : (X, d_N) \rightarrow (X, d_{N'})$  est continue (on montrerait de même que l'inverse est continue). Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $X$  convergente pour  $d_N$  : il existe  $x \in X$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_N(x_n, x) = 0$ .

Les normes  $N$  et  $N'$  sont équivalentes. En particulier, il existe  $C > 0$  tel que  $N' \leq CN$ . Cela implique  $d_{N'} \leq Cd_N$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{N'}(x_n, x) = 0$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Ainsi, quel que soit le choix de la norme  $N$  sur  $\mathbb{R}^n$ , la distance  $d_N$  définit le même ensemble d'ouverts (i.e. la même topologie). C'est ce qu'on appelle la *topologie produit*. Dans la suite, on munit le produit fini d'espaces métriques d'une distance définie comme ci-dessus. On vient de voir que cela n'induit aucune ambiguïté sur la notion d'ouverts, et donc aussi sur les notions de limites, continuités, adhérence, densité, etc...

**Exercice 25** *On se donne  $n$  espaces métriques  $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on note  $\pi_i : (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \mapsto x_i \in X_i$  la projection sur la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée.*

- Montrer que chaque  $\pi_i$  est continue.
- Soit  $(x_k)_{k \geq 0}$  une suite  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Montrer qu'elle converge si et seulement si chaque suite de coordonnées converge.
- Soit  $f : X \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ , où  $X$  est un espace métrique. Montrer que  $f$  est continue si et seulement si chaque application coordonnée déduite de  $f$  est continue.
- Si chaque  $(X_i, d_i)$  est compact, alors l'espace produit  $X_1 \times \dots \times X_n$  est compact.

**Théorème 25** *Soient  $(E_1, N_1), \dots, (E_k, N_k), (F, M)$  des e.v.n. et  $f : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$  une application multilinéaire (i.e. linéaire par rapport à chaque variable). Alors  $f$  est continue si et seulement si il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$ , on a  $M(f(x)) \leq CN_1(x_1) \dots N_k(x_k)$ .*

Preuve : On munit par exemple  $E_1 \times \dots \times E_k$  de la norme  $N_\infty((x_1, \dots, x_k)) = \max_{1 \leq i \leq k} N_i(x_i)$ . Supposons que  $f$  est continue. Alors la continuité en 0 donne un  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_k)$  dans  $B_{E_1 \times \dots \times E_k}(0, \eta)$ , on a  $M(f(x)) \leq 1$ . On en déduit pour tout  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$

$$\begin{aligned} M(f(x)) &= M\left(f\left(\frac{N_1(x)}{\eta} \frac{\eta x_1}{N_1(x)}, \dots, \frac{N_k(x)}{\eta} \frac{\eta x_k}{N_k(x)}\right)\right) \\ &= \frac{N_1(x_1) \dots N_k(x_k)}{\eta^k} M\left(f\left(\frac{\eta x_1}{N_1(x)}, \dots, \frac{\eta x_k}{N_k(x)}\right)\right) \leq \frac{N_1(x_1) \dots N_k(x_k)}{\eta^k}. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons l'existence de  $C > 0$  comme dans l'énoncé et montrons la continuité de  $f$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $y = (y_1, \dots, y_k) \in B_{E_1 \times \dots \times E_k}(x, \delta)$  avec

$\delta \leq 1$  à déterminer. Alors on écrit

$$\begin{aligned} M(f(y) - f(x)) &\leq M(f(y_1, \dots, y_k) - f(x_1, y_2, \dots, y_k)) + M(f(x_1, y_2, \dots, y_k) - f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_k)) \\ &\quad + \dots + M(f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y_k) - f(x_1, \dots, x_k)) \\ &= M(f(y_1 - x_1, y_2, \dots, y_k)) + \dots + M(f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y_k - x_k)). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} M(f(y) - f(x)) &\leq CN_1(y_1 - x_1)N_2(y_2) \cdots N_k(y_k) + \dots + CN_1(x_1) \cdots N_{k-1}(x_{k-1})N_k(y_k - x_k) \\ &\leq CN_1(y_1 - x_1)(N_2(x_2) + \delta) \cdots (N_k(x_k) + \delta) + \dots + CN_1(x_1) \cdots N_{k-1}(x_{k-1}) \cdots N_k(y_k - x_k) \\ &\leq kCN_\infty(y - x) \max_{1 \leq i \leq k} (N_i(x_i) + 1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $\delta := \frac{\varepsilon}{kC \max_{1 \leq i \leq k} (N_i(x_i) + 1)^{k-1}}$ .

□

## 1.9 Exercices supplémentaires

**Exercice 26** Montrer les théorèmes de Heine : une fonction continue sur un segment de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est uniformément continue, est bornée, et atteint ses bornes.

**Exercice 27** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante de fonctions continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in X$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Montrer que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers 0.

**Exercice 28** [3] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On note  $H(\Omega)$  l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ .

- Montrer qu'il existe une suite de compacts  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$  contenus dans  $\Omega$  tels que  $K_j \subset \text{int } K_{j+1}$  et  $\cup_j K_j = \Omega$ .
- A une telle suite de compacts, on associe la famille  $p_j : f \in H(\Omega) \mapsto \max_{x \in K_j} |f(x)| \in \mathbb{R}^+$ . Montrer que  $p_j$  est positivement homogène et vérifie l'inégalité triangulaire.
- Pour tout  $f, g \in H(\Omega)$ , on pose

$$d(f, g) := \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f - g)}{1 + p_j(f - g)}.$$

Montrer que  $d$  est une distance sur  $H(\Omega)$ .

- Montrer qu'une suite  $(f_n)_{n \geq 0} \subset H(\Omega)$  converge vers  $f \in H(\Omega)$  pour cette distance si et seulement si  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact vers  $f$ . En déduire que deux familles de compacts  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$  et  $(K'_j)_{j \in \mathbb{N}}$  comme ci-dessus définissent deux distances qui induisent la même famille d'ouverts.
- Montrer que  $(H(\Omega), d)$  est complet.
- On dit qu'une partie  $A \subset H(\Omega)$  est bornée si pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $C_K > 0$  tel que pour tout  $f \in A$ , on a  $\max_{x \in K} |f(x)| \leq C_K$ . Montrer qu'il est équivalent de dire que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , il existe  $M_j \geq 0$  tel que pour tout  $f \in A$ , on a  $p_j(f) \leq M_j$ .
- On se donne une suite  $(f_n)_{n \geq 0} \subset H(\Omega)$ , bornée au sens précédent. Montrer que pour tout compact  $K \subset \Omega$ ,  $(f_n|_K)_{n \geq 0}$  est équilipschitzienne (on pourra se ramener au cas où  $K$  est une boule). En déduire qu'on peut extraire de  $(f_n)_{n \geq 0}$  une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de  $\Omega$ .
- Soit  $A \subset H(\Omega)$  une partie bornée et fermée. Montrer qu'elle est compacte.

- On veut montrer que  $(H(\Omega), d)$  n'est pas normable, i.e. qu'il n'existe pas de norme sur  $H(\Omega)$  qui définisse la même famille d'ouverts que  $d$ . On procède par l'absurde. Montrer qu'alors la boule unité fermée pour cette norme est bornée au sens précédent. Conclure.

- Exercice 29**
1. Soit  $E$  un espace vectoriel normé et soit  $M \subset E$  un sous-espace fermé tel que  $M \neq E$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u \in E$  tel que  $\|u\| = 1$  et  $\text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon$ .
  2. Soit  $E$  un e.v.n de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-espaces de dimension finie tels que  $E_{n-1} \subsetneq E_n$ .
  3. Dédurre des deux questions précédentes une autre preuve du théorème de Riesz.

**Exercice 30 (Inspiré du sujet d'agrégation externe analyse et probabilités 2011)** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) qu'on suppose séparable. On notera  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite dense dans  $H$ . Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $H$  telle que  $\|y_n\| \leq 1$  pour tout  $n$ .

1. Montrer qu'il existe une sous-suite  $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle y_{\varphi(n)}, x_k \rangle$  existe pour tout  $k \geq 0$ .
2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle y_{\varphi(n)}, z \rangle$  existe pour tout  $z \in H$ .
3. Montrer qu'il existe  $y \in H$  tel que  $\langle y, z \rangle := \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle y_{\varphi(n)}, z \rangle$  pour tout  $z \in H$ .

**Exercice 31 (Extrait du sujet d'agrégation externe analyse et probabilités 2009)** On se donne un espace de Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) qu'on identifiera avec son dual topologique (par le théorème de représentation de Riesz). On note  $\overline{B}$  la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de  $H$  et  $\mathcal{L}(H)$  l'algèbre des endomorphismes continus de  $H$ .

Un élément  $T$  de  $\mathcal{L}(H)$  est dit compact si  $\overline{T(\overline{B})}$  est une partie compacte de  $H$ . On note  $\mathcal{K}(H)$  l'ensemble des  $T$  de  $\mathcal{L}(H)$  vérifiant cette propriété,  $\mathcal{K}_0(H)$  l'ensemble des  $T$  de  $\mathcal{L}(H)$  dont l'image est de dimension finie.

1. (a) Montrer que  $\mathcal{K}(H)$  est un idéal bilatère de l'algèbre  $\mathcal{L}(H)$  contenant  $\mathcal{K}_0(H)$ .  
 (b) Montrer que  $\mathcal{K}(H)$  est fermé dans  $\mathcal{L}(H)$ . (Indication : on rappelle qu'une partie  $X$  de  $H$  est d'adhérence compacte si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut recouvrir  $X$  par une réunion finie de boules fermées de rayon  $\varepsilon$ .)
2. Soit  $K$  dans  $\mathcal{K}(H)$ . On note  $K^*$  son adjoint.
  - (a) Montrer que  $\ker(I + K)$  est de dimension finie.
  - (b) Montrer que  $\text{im}(I + K)$  est fermé dans  $H$ . (Indication : soient  $y$  dans  $H$  adhérent à  $\text{im}(I + K)$ ,  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $H$  telle que  $K(x_n) + x_n \rightarrow y$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x'_n$  la projection orthogonale de  $x_n$  sur  $\ker(K + I)^\perp$ . En raisonnant par l'absurde et en considérant  $u_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|}$ , montrer que  $(x'_n)$  est bornée. Conclure.)
  - (c) Montrer que  $K^*$  appartient à  $\mathcal{K}(H)$ . (Indication : soient  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\overline{B}$ ,  $\Gamma$  l'adhérence de  $K(B)$  dans  $H$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  la fonction de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}$  qui à  $x$  associe  $\langle x_n, x \rangle$ . Montrer qu'il existe une suite strictement croissante  $(n_k)_{k \geq 0}$  d'entiers naturels telle que  $(f_{n_k})_{k \geq 0}$  converge uniformément sur  $\Gamma$ . En déduire que  $(K^*(x_{n_k}))_{k \geq 0}$  converge dans  $H$ .)
  - (d) Montrer que  $\text{im}(I + K)$  est de codimension finie dans  $H$ .
3. (Question subsidiaire) Montrer que  $\mathcal{K}_0(H)$  est dense dans  $\mathcal{K}(H)$ .

**Exercice 32**

1. Donner un exemple d'application linéaire continue qui n'est pas compacte.

2. Soit  $K \in C^0([0, 1]^2)$ . On considère l'application

$$\varphi : u \in C^0([0, 1]) \mapsto \varphi(u) \in C^0([0, 1])$$

définie par : pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$(\varphi(u))(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y) dy.$$

Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire compacte.

3. Soit  $H \in L^2((0, 1)^2)$ . On considère l'application

$$\psi : u \in L^2(0, 1) \mapsto \psi(u) \in L^2(0, 1)$$

définie par : pour presque tout  $x \in (0, 1)$ ,

$$(\psi(u))(x) = \int_0^1 H(x, y)u(y) dy.$$

Montrer que  $\psi$  est une application linéaire compacte. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 30.)

**Exercice 33 (Lemme de Baire)** Soit  $X$  un espace métrique complet. Soit  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts denses. Montrer que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$  est dense. (Indication : on pourra montrer que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$  rencontre tout ouvert non vide  $\omega$  en utilisant l'observation suivante : si  $O$  est un ouvert dense, alors pour tout  $x \in X$ , pour tout  $r > 0$ , il existe  $x_1 \in B(x, r) \cap O$  et  $0 < r_1 < \frac{r}{2}$  tels que  $\bar{B}(x, r_1) \subset B(x, r) \cap O$ ).

**Exercice 34 (Théorème de Banach-Steinhaus)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Soit  $(T_i)_{i \in I}$  une famille d'opérateurs linéaires et continus de  $E$  dans  $F$ . On suppose que pour tout  $x \in E$ ,

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < +\infty.$$

1. Pour chaque entier  $n \geq 1$ , on introduit  $X_n = \{x \in E : \forall i \in I, \|T_i x\| \leq n\}$ . Justifier que  $X_n$  est fermé et montrer que  $\cup_{n \geq 1} X_n = E$ .
2. Montrer qu'il existe  $n_0 \geq 1$  tel que  $\text{int } X_{n_0} \neq \emptyset$  (on pourra utiliser le lemme de Baire).
3. En déduire qu'il existe  $x_0 \in E$  et  $r > 0$  tels que pour tout  $i \in I$ ,  $\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0$  pour tout  $z \in B(0, 1)$ .
4. Conclure que

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty.$$



## Chapitre 2

# Espaces fonctionnels

L'analyse fonctionnelle évoquée dans le chapitre 1 fournit des résultats généraux s'appliquant à des espaces de fonctions qui partagent des caractéristiques communes, en termes de régularité, intégrabilité, etc... Pour trouver des solutions à des équations (fonctionnelles, différentielles, aux dérivées partielles, etc...), les propriétés topologiques de l'espace dans lequel on les cherche (compacité, complétude, etc...) constituent un outil puissant. Penser par exemple à la preuve par point fixe du théorème de Cauchy-Lipschitz : la complétude d'un espace fonctionnel bien choisi y joue un rôle décisif. On ne reprend pas ici l'étude des espaces  $L^p$  que vous avez faite ailleurs. Vous savez que ce sont des espaces complets, séparables si  $1 \leq p < \infty$  et que le dual topologique de  $L^p$  s'identifie à  $L^{p'}$ , où  $p' = \frac{p}{p-1}$ , lorsque  $1 \leq p < \infty$ .

### 2.1 Fonctions continues bornées

Dans cette section, on considère un espace métrique  $(X, d)$  et un espace de Banach  $(E, N)$ . On note  $B(X, E)$  l'ensemble des applications  $f : X \rightarrow E$  qui sont bornées (on dit que  $f$  est bornée s'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $N(f(x)) \leq M$ ). C'est un espace vectoriel pour l'addition ponctuelle et la multiplication par un scalaire ponctuelle. On introduit sur  $B(X, E)$  la norme uniforme :  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} N(f(x))$  (ce sup est fini précisément lorsque  $f$  est bornée).

**Théorème 26** *L'ensemble  $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.*

Preuve : Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy. Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $p, q \geq n_0$ , on a  $\|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$ . Alors, pour tout  $x \in X$ , on a

$$N(f_p(x) - f_q(x)) \leq \epsilon. \quad (2.1)$$

On en déduit que pour tout  $x \in X$ , la suite  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $E$ . Comme  $E$  est complet, cette suite converge vers un élément de  $E$ , qu'on note  $f(x)$ . Ceci permet de définir une fonction  $f : X \rightarrow E$ . En fixant  $p$  et faisant  $q \rightarrow +\infty$  dans (2.1), on obtient que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $p \geq n_0$ , on a  $N(f_p(x) - f(x)) \leq \epsilon$  pour tout  $x \in X$ . Ainsi,  $N(f(x)) \leq \epsilon + N(f_p(x)) \leq \epsilon + \|f_p\|_\infty$ , ce qui montre que  $f \in B(X, E)$ . De plus, si  $p \geq n_0$ , on a  $\|f_p - f\|_\infty \leq \epsilon$ , ce qui montre que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$ . □

On considère aussi l'ensemble  $BC(X, E)$  des fonctions continues bornées sur  $X$ .

**Théorème 27** *L'ensemble  $BC(X, E)$  est un sous-espace fermé de  $B(X, E)$ . En particulier, l'espace  $(BC(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est complet.*

Preuve : La première phrase est une reformulation du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. La deuxième phrase est la conséquence du fait qu'un fermé dans un complet est complet. □

## 2.2 Espaces de Schwartz

### 2.2.1 Quelques notations différentielles

On désigne par  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  et par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire euclidien canonique. On note  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de la base canonique.

Pour tout  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  (un  $n$  uplet d'entiers naturels), on note  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$  et

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

On note  $\alpha \leq \beta$  lorsque  $\alpha_i \leq \beta_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^k(\mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\alpha| \leq k$ , on considère sa dérivée partielle

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n} \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x).$$

On se souvient que par le théorème de Schwartz, le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les dérivées partielles. Si  $\alpha = e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on note aussi  $\partial^{e_i} \varphi = \partial_i \varphi$ .

Lorsque  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on note  $x \mapsto x^\alpha$  la fonction polynomiale  $x \mapsto x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

**Exercice 35** Montrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  les formules suivantes :

*formule du binôme*

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha - \beta} y^\beta,$$

*formule de Leibniz*

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha - \beta} f \partial^\beta g.$$

### 2.2.2 Formule de Stokes

**Proposition 2** Soit  $\varphi, \psi$  deux fonctions  $C^1(\mathbb{R}^n)$  dont l'une au moins est à support compact. Alors pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi)(x) \psi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi)(x) \varphi(x) dx.$$

Preuve : Supposons par exemple que ce soit  $\varphi$  qui est à support compact, et  $i = 1$ . Il en est de même de  $\partial_1 \varphi$ . Soit  $R > 0$  tel que  $[-R, R]^n$  contienne le support de  $\varphi$ . Comme  $\psi \partial_1 \varphi$  est dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 \varphi)(x) \psi(x) dx &= \int_{[-R, R]^n} (\partial_1 \varphi)(x) \psi(x) dx \\ &= \int_{[-R, R]^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int_{-R}^R (\partial_1 \varphi)(x_1, x_2, \dots, x_n) \psi(x_1, \dots, x_n) dx_1. \end{aligned}$$



Pour chaque  $x_2, \dots, x_n$ , on applique à  $x_1 \mapsto (\partial_1 \varphi)(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $x_1 \mapsto \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la formule d'intégration par parties :

$$\int_{-R}^R (\partial_1 \varphi)(x_1, x_2, \dots, x_n) \psi(x_1, \dots, x_n) dx_1 = - \int_{-R}^R (\partial_1 \psi)(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1.$$

Il n'y a pas de terme de bord par définition de  $R$ .

On reporte dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 \varphi)(x) \psi(x) dx &= - \int_{[-R, R]^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int_{-R}^R (\partial_1 \psi)(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 \psi)(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

qui est l'égalité attendue. □

On en déduit aussitôt par récurrence sur l'ordre de dérivation pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}$  :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha \varphi)(x) \psi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha \psi)(x) \varphi(x) dx.$$

On va maintenant établir la formule de Stokes dans le cas d'un demi-espace (c'est le seul cas exigé dans le programme). Sans perte de généralité (i.e. après isométrie affine), on peut supposer que ce demi-espace est  $\mathbb{R}_+^n := \{x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n > 0\}$ . On considère donc deux fonctions  $C^1$  sur le demi-espace fermé  $\overline{\mathbb{R}_+^n} := \{x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n \geq 0\}$ . On rappelle qu'une fonction définie sur un fermé de  $\mathbb{R}^n$  est dite de classe  $C^1$  si elle admet un prolongement  $C^1$  à  $\mathbb{R}^n$ . L'une des deux fonctions sera supposée à support compact dans  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ . Cela n'implique pas que ladite fonction soit identiquement nulle sur  $\partial \mathbb{R}_+^n = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$  (appréciez la différence avec le fait d'être à support compact dans l'ouvert  $\mathbb{R}_+^n$ ).

**Proposition 3** Soit  $\varphi, \psi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  dont l'une est à support compact dans  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ . Alors pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial_i \varphi)(x) \psi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial_i \psi)(x) \varphi(x) dx.$$

Lorsque  $i = n$ , on a en revanche

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial_n \varphi)(x) \psi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \varphi(x', 0) \psi(x', 0) dx' - \int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial_n \psi)(x) \varphi(x) dx.$$

Preuve : La preuve est essentiellement la même que dans le cas  $\mathbb{R}^n$  : si par exemple  $\varphi$  est à support compact, on introduit  $R > 0$  tel que  $\text{supp } \varphi \subset [-R, R]^{n-1} \times [0, R]$ . Le calcul est ensuite analogue, sauf que lors de l'intégration par parties, un terme de bord apparaît pour  $i = n$  :

$$\begin{aligned} \int_0^R (\partial_n \varphi)(x_1, x_2, \dots, x_n) \psi(x_1, \dots, x_n) dx_1 &= -\varphi(x_1, x_2, \dots, 0) \psi(x_1, x_2, \dots, 0) \\ &\quad - \int_{-R}^R (\partial_1 \psi)(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1. \end{aligned}$$

□

Une manière synthétique d'écrire cette formule de Stokes est de faire intervenir la 'normale extérieure au domaine'  $\nu$ . Ici, le domaine est  $\mathbb{R}_+^n$ . Son bord est  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . La normale extérieure au bord

du domaine est simplement le vecteur  $(0, \dots, -1)$ . Vous constatez que la formule de Stokes s'écrit pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial_i \varphi)(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \varphi(x', 0) \psi(x', 0) \langle \nu, e_i \rangle dx' - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi)(x) \varphi(x) dx.$$

Si on introduit les gradients de  $\varphi$  et  $\psi$  (qui sont les vecteurs de leurs dérivées partielles respectives), l'égalité précédente se réécrit

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \langle \nabla \varphi(x), e_i \rangle \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \varphi(x', 0) \psi(x', 0) \langle \nu, e_i \rangle dx' - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla \psi(x), e_i \rangle \varphi(x) dx.$$

On peut le formuler sous forme vectorielle (autrement dit, deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales)

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \psi \nabla \varphi = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \varphi \psi \nu - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \nabla \psi$$

(il s'agit d'intégrales à valeurs  $\mathbb{R}^n$ , ce qui n'est rien d'autre qu'une notation pour écrire  $n$  intégrales à la fois).

**Exercice 36** Soit  $X \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}_+^n}, \mathbb{R}^n)$  (attention, ici  $X$  est à valeurs vectorielles : on dit que c'est un champ de vecteurs lorsque la dimension de l'espace d'arrivée est la même que celle de départ, ce qui est la cas ici). On note  $X = (X_1, \dots, X_n)$  les coordonnées de  $X$ . On rappelle que la divergence de  $X$  est la fonction

$$\operatorname{div} X := \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}.$$

Etablir la formule de la divergence

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \operatorname{div} X = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \langle X, \nu \rangle.$$

Bien sûr, la formule de Stokes, comme la formule de la divergence, sont valables sur des ouverts plus généraux (il faut quand même quelques hypothèses de régularité). Pour les énoncer, on a cependant besoin de savoir ce qu'on veut dire par l'intégration sur le bord du domaine. Or l'intégration sur une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  (en l'occurrence le bord d'un domaine) n'est pas au programme...

### 2.2.3 Définition de l'espace de Schwartz

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on note

$$N_p(\varphi) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p \\ \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq p}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

**Exercice 37** – Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $E_p := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : N_p(\varphi) < \infty\}$  est un espace vectoriel.

- Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $N_p$  est une norme sur  $E_p$ .
- Est-ce que l'e.v.n.  $(E_p, N_p)$  est complet ?
- On définit pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\widetilde{N}_p(\varphi) := \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p \\ \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq p}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\frac{1}{C} \widetilde{N}_p(\varphi) \leq N_p(\varphi) \leq C \widetilde{N}_p(\varphi)$ .

- Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_k > 0$  tel que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| \leq k$ , on a  $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$  et  $|x|^k \leq C_k \sum_{|\beta| \leq k} |x^\beta|$ .
- Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $B_p > 0$  tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$|\varphi(x)| \leq B_p \frac{N_p(\varphi)}{1 + |x|^p}. \quad (2.2)$$

**Définition 18** On définit l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  comme l'ensemble de toutes les fonctions  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que  $N_p(\varphi) < \infty$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

Cet ensemble n'est pas vide ! Il contient par exemple  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Un exemple de fonction de Schwartz qui n'est pas à support compact est  $x \mapsto \exp(-|x|^2)$ .

- Exercice 38** – Montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \neq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
- Montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est stable par dérivation et par multiplication par les polynômes.
  - Montrer que les fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tendent vers 0 à l'infini.
  - Montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ .

## 2.2.4 Topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Pour tout  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on définit

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{N_p(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + N_p(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

- Exercice 39** – Montrer que la série est toujours convergente.
- Montrer que la fonction  $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{1+x}$  est croissante et sous-additive ( $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ). En déduire que  $d$  est une distance sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme 3** Soit  $(\varphi_k)_{k \geq 0}$  une suite de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors la suite  $(\varphi_k)_{k \geq 0}$  converge vers  $\varphi$  si et seulement si pour tout  $p \geq 0$ ,  $N_p(\varphi_k - \varphi)$  tend vers 0.

Preuve : Si  $d(\varphi_k, \varphi) \rightarrow 0$ , alors  $N_p(\varphi_k - \varphi) \rightarrow 0$ , car

$$N_p(\varphi_k - \varphi) \leq 2^p \frac{1}{1 + N_p(\varphi_k - \varphi)} \leq 2^p d(\varphi_k, \varphi).$$

Réciproquement, supposons que pour tout  $p \geq 0$ ,  $N_p(\varphi_k - \varphi) \rightarrow 0$ . Comme pour tout  $p \geq 0$ ,  $\frac{1}{2^p} \frac{N_p(\varphi_k - \varphi)}{1 + N_p(\varphi_k - \varphi)} \leq \frac{1}{2^p}$ , et que  $\sum_p \frac{1}{2^p} < \infty$ , alors par le théorème de convergence dominée (pour la mesure de comptage), on a  $d(\varphi_k, \varphi) \rightarrow 0$ . □

**Proposition 4** L'espace métrique  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$  est complet.

Preuve : Soit  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n, m \geq n_0$ ,  $d(\varphi_n, \varphi_m) < \varepsilon$ . En particulier, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{2^p} \frac{N_p(\varphi_n - \varphi_m)}{1 + N_p(\varphi_n - \varphi_m)} \leq \varepsilon.$$

Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . Si  $\varepsilon < 2^{-p}$ , on en déduit que

$$N_p(\varphi_n - \varphi_m) \leq 2^p \frac{\varepsilon}{1 - 2^p \varepsilon}.$$

Ainsi pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy pour la norme  $N_p$ . Cela implique que pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha|, |\beta| \leq p$ , la suite  $(x^\alpha \partial^\beta \varphi_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . En particulier, elle converge uniformément vers une fonction  $\psi_{\alpha, \beta} \in C^0(\mathbb{R}^n)$  (car l'espace des fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}^n$  est un espace de Banach pour la norme uniforme).

On utilise maintenant que si une suite de fonctions différentiables  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^n$  vers une fonction  $f$ , tandis que la suite des différentielles converge uniformément vers  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , alors  $f$  est différentiable, de différentielle  $g$ . En appliquant ceci à la suite des  $(\partial^\beta \varphi_n)_{n \geq 0}$ , on voit que la limite  $\psi_{0,0}$  des  $\varphi_n$  est  $C^\infty$  avec  $\partial^\beta \psi = \psi_{0, \beta}$ , et aussi  $x^\alpha \partial^\beta \psi = \psi_{\alpha, \beta}$ . On a ainsi pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $N_p(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ , ce qui implique notamment que  $N_p(\varphi) < \infty$  et donc  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  puis que  $d(\varphi_n, \varphi) \rightarrow 0$ . □

Lorsqu'un espace est muni d'une distance invariante par translation (i.e.  $d(\varphi_1 + \psi, \varphi_2 + \psi) = d(\varphi_1, \varphi_2)$ ) qui en fait un espace métrique complet, on dit que c'est un espace de Fréchet (mais vous pouvez l'oublier !)

**Proposition 5** *L'ensemble  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

Preuve : Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Il suffit de trouver une suite  $(\varphi_n)_{n \geq 0} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que pour tout  $p \geq 0$ , on a  $N_p(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ . Soit  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  telle que  $\theta = 1$  sur la boule unité. On pose  $\theta_j := \theta(\frac{\cdot}{j})$  puis  $\varphi_j := \varphi \theta_j$  qui est dans  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $\beta \in \mathbb{N}^n$ . Alors par la formule de Leibniz,

$$\partial^\beta(\varphi - \varphi_j) = \partial^\beta(\varphi(1 - \theta_j)) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma \varphi \partial^{\beta-\gamma}(1 - \theta_j).$$

On va découper la somme en deux termes : ceux pour lesquels une dérivation au moins porte sur  $1 - \theta_j$ , et l'autre (pour les premiers, un facteur  $\frac{1}{j}$  apparaît, ce qui va permettre de les pulvériser à l'infini !).

$$\partial^\beta(\varphi - \varphi_j) = (\partial^\beta \varphi)(1 - \theta_j) - \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma \varphi \frac{1}{j^{|\beta| - |\gamma|}} \partial^{\beta-\gamma} \theta(\frac{\cdot}{j}).$$

On multiplie par  $x^\alpha$  puis on majore (en notant que  $1 - \theta_j = 0$  sur la boule de rayon  $j$  centrée en 0) :

$$\|x^\alpha \partial^\beta(\varphi - \varphi_j)\|_{L^\infty} \leq \max_{|x| \geq j} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| + \frac{C}{j} \sum_{\gamma \leq \beta} \|x^\alpha \partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty}.$$

Le premier terme tend vers 0 car vous avez déjà montré que les fonctions de  $\mathcal{S}$  tendent vers 0 à l'infini. Le second terme tend vers 0 grâce au  $\frac{1}{j}$ . □

**Lemme 4** *Pour tout  $r > 0$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $B_d(0, r) \supset B_{N_p}(0, \frac{r}{4})$ .*

Preuve : Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{i=p+1}^\infty \frac{1}{2^i} < \frac{r}{2}$ . Montrons alors l'inclusion de l'énoncé pour cette valeur de  $p$ . Soit  $\varphi \in B_{N_p}(0, \frac{r}{4})$ . Alors pour tout  $i \leq p$ , on a  $N_i(\varphi) \leq N_p(\varphi) < \frac{r}{4}$ . On en déduit

$$d(\varphi, 0) \leq \sum_{i=0}^p \frac{1}{2^i} \frac{N_p(\varphi)}{1 + N_p(\varphi)} + \sum_{i=p+1}^\infty \frac{1}{2^i} \leq N_p(\varphi) \sum_{i=0}^p \frac{1}{2^i} + \frac{r}{2} < r.$$

Ainsi,  $\varphi \in B_d(0, r)$ , ce qui prouve le lemme. □

**Lemme 5** Pour tout  $p_1 < p_2$ , il existe une suite  $(\varphi_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $N_{p_1}(\varphi_k) \rightarrow 0$  et  $N_{p_2}(\varphi_k) \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

Preuve : Soit  $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  non nulle et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\varphi_k(x) := (\ln k)k^{-p_2}\varphi_0(kx).$$

Alors pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ,

$$x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x) = (\ln k)k^{|\alpha|-p_2-|\beta|}(kx)^\beta \partial^\alpha \varphi(kx).$$

On en déduit  $N_{p_1}(\varphi_k) \leq (\ln k)k^{p_1-p_2}N_{p_1}(\varphi) \rightarrow 0$  et  $N_{p_2}(\varphi_k) \geq (\ln k) \sum_{|\alpha|=p_2} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Proposition 6** L'espace  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$  n'est pas normable.

Preuve : Supposons par l'absurde qu'il existe une norme  $\|\cdot\| : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définissant la même topologie (i.e. le même ensemble d'ouverts) que la distance  $d$ . Pour le dire autrement, si un ensemble est une réunion de boules ouvertes pour  $d$ , alors c'est aussi une réunion de boules ouvertes pour  $\|\cdot\|$  et vice-versa.

La boule unité ouverte pour la norme  $B_{\|\cdot\|}(0, 1)$  est donc aussi un voisinage de 0 pour  $d$  : il existe  $r > 0$  tel que  $B_d(0, r) \subset B_{\|\cdot\|}(0, 1)$ . Par le lemme 4, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $B_{N_p}(0, \frac{r}{4}) \subset B_{\|\cdot\|}(0, 1)$ .

Soit  $q > p$ . Par l'inégalité triangulaire, pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$|N_q(\varphi) - N_q(\psi)| \leq N_q(\varphi - \psi) \leq d(\varphi, \psi).$$

Ainsi,  $N_q$  est une fonction continue sur  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ . Donc  $B_{N_q}(0, 1)$  est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert. En particulier, c'est un voisinage de 0 pour  $\|\cdot\|$ . Il existe donc  $\rho > 0$  tel que  $B_{\|\cdot\|}(0, \rho) \subset B_{N_q}(0, 1)$ , soit encore  $B_{\|\cdot\|}(0, 1) \subset B_{N_q}(0, \frac{1}{\rho})$ . En conclusion,

$$B_{N_p}(0, \frac{r}{4}) \subset B_{N_q}(0, \frac{1}{\rho}).$$

Cette inclusion est en contradiction avec le lemme 5.  $\square$

### 2.2.5 Quelques opérations dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Commençons par une observation préliminaire. Même si  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas un Banach, beaucoup de vos réflexes sont légitimes sur cet 'espace vectoriel métrique'. Il en est par exemple ainsi de la continuité des applications linéaires.

Soit  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  une application linéaire. Par invariance de la distance  $d$  par translation et par linéarité de  $T$ , pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $d(T(\varphi), T(\psi)) = d(T(\varphi) - T(\psi), 0) = d(T(\varphi - \psi), 0)$ . La continuité de  $T$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est donc équivalente à la continuité de  $T$  en 0. Il faut et il suffit pour cela que pour toute suite  $(\varphi_k)_{k \geq 0}$  convergeant vers 0, on ait  $N_p(T(\varphi_k)) \rightarrow 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Le critère de continuité suivant sera utile :

**Proposition 7** Une application linéaire  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est continue si et seulement si pour tout  $q \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_q \geq 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$N_q(T(\varphi)) \leq C_q N_p(\varphi). \tag{2.3}$$

Preuve : On a déjà vu que  $N_q : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continue (c'est une conséquence de l'inégalité triangulaire et du fait que  $N_q$  est dominée par  $d$ ). Donc,  $B_{N_q}(0, 1)$  est un ouvert, comme image réciproque d'un ouvert.

Si  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est continue, alors  $T^{-1}(B_{N_q}(0, 1))$  est un voisinage ouvert de 0 (image réciproque d'un ouvert par une application continue). Il contient donc une boule  $B_d(0, r)$  pour un certain  $r > 0$ , et donc aussi une boule  $B_{N_p}(0, \frac{r}{4})$  pour un certain  $p \in \mathbb{N}$  par le lemme 4. Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\frac{r}{8N_p(\varphi)}\varphi \in B_{N_p}(0, \frac{r}{4})$ , d'où

$$N_q(T(\varphi)) = \frac{8N_p(\varphi)}{r} N_q\left(T\left(\frac{r}{8N_p(\varphi)}\varphi\right)\right) \leq CN_p(\varphi)$$

en posant  $C := \frac{8}{r}$ .

Réciproquement, supposons (2.3) vraie. Soit  $q \in \mathbb{N}$ . Pour toute suite  $(\varphi_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  convergeant vers 0, on a  $N_p(\varphi_k) \rightarrow 0$  d'où par (2.3),  $N_q(T(\varphi_k)) \rightarrow 0$ , ce qui montre la continuité de  $T$ . □

**Proposition 8** Soit  $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$  une fonction polynomiale. Alors l'application  $M_P : \varphi \mapsto P\varphi$  est continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve : Pour tout  $|\alpha| \leq N$ , on a  $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \leq 1 + |x|^N$ . Il existe donc  $C_P > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|P(x)| \leq C_P(1 + |x|^N)$ . Comme la dérivée partielle d'une fonction polynomiale est encore une fonction polynomiale, cette inégalité reste vraie pour toutes les dérivées partielles de  $P$ , quitte à augmenter la constante  $C_P$  (la fonction polynomiale  $P$  n'a qu'un nombre fini de dérivées partielles non nulles).

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , par la formule de Leibniz, il existe  $C_1, C'_1$  tels que pour tout  $|\alpha|, |\beta| \leq p$ ,

$$|x^\beta| |\partial^\alpha(P\varphi)(x)| \leq C_1 |x|^\beta (1 + |x|^N) \sum_{|\gamma| \leq p} |\partial^\gamma \varphi(x)| \leq C'_1 N_{p+N}(\varphi).$$

On en déduit  $N_p(M_P(\varphi)) \leq C'_1 N_{p+N}(\varphi)$ , d'où l'on déduit la continuité en 0 de  $M_P$ , et donc la continuité tout court. □

**Exercice 40** – Montrer que si  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors l'application linéaire  $\varphi \mapsto \psi\varphi$  est continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

– Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $N_p(\partial^\alpha \varphi) \leq N_{p+|\alpha|}(\varphi)$ . En déduire que l'application linéaire  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \partial^\alpha \varphi$  est continue.

## 2.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

On se souvient que la transformée de Fourier d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  est donnée pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

Alors  $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ , tend vers 0 à l'infini, et vérifie  $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ . De plus, si  $f$  et  $\widehat{f}$  sont dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Lorsqu'on considère la transformée de Fourier d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (qui est comme on l'a vu un sous-ensemble de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ), vous savez qu'on peut dire un peu plus

**Théorème 28** *La transformée de Fourier est un homéomorphisme linéaire de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sur lui-même.*

## 2.4 Espace des distributions tempérées

Les distributions peuvent être vues comme des fonctions généralisées, ou plus précisément, comme des limites de fonctions (en un sens à préciser). Elles permettent de fournir un concept satisfaisant de solutions à certaines équations aux dérivées partielles. Seules les distributions tempérées sont au programme, et non toutes les distributions. On se restreint donc à ce cadre dans la suite.

### 2.4.1 Définition

**Définition 19** *On appelle distribution tempérée un élément du dual de  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ , c'est-à-dire une application linéaire sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  qui est continue.*

L'ensemble des distributions tempérées est noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On peut traduire la continuité de  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  en termes de suites : pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pour toute suite  $(\varphi_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  convergeant vers  $\varphi$  (au sens de la distance  $d$ ), la suite  $(T(\varphi_k))_{k \geq 0}$  converge vers  $T(\varphi)$  (dans  $\mathbb{C}$ ). Par linéarité de  $T$ , il est équivalent d'exiger que pour toute suite  $(\varphi_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  convergeant vers 0, la suite  $(T(\varphi_k))_{k \geq 0}$  converge vers 0 (dans  $\mathbb{C}$ ). Voici une autre caractérisation commode de la continuité de  $T$  :

**Proposition 9** *Une application linéaire  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  est continue si et seulement s'il existe  $C \geq 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$|T(\varphi)| \leq CN_p(\varphi). \quad (2.4)$$

Preuve : Si  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $T^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$  est un voisinage ouvert de 0 ( image réciproque d'un ouvert par une application continue). Il contient donc une boule  $B_d(0, r)$  pour un certain  $r > 0$ , et donc aussi une boule  $B_{N_p}(0, \frac{r}{4})$  pour un certain  $p \in \mathbb{N}$  par le lemme 4. Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\frac{r}{8N_p(\varphi)}\varphi \in B_{N_p}(0, \frac{r}{4})$ , d'où

$$|T(\varphi)| = \frac{8N_p(\varphi)}{r} \left| T\left(\frac{r}{8N_p(\varphi)}\varphi\right) \right| \leq CN_p(\varphi)$$

en posant  $C := \frac{8}{r}$ .

Réciproquement, supposons (2.4) vraie. Pour toute suite  $(\varphi_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  convergeant vers 0, on a  $N_p(\varphi_k) \rightarrow 0$  d'où par (2.4),  $T(\varphi_k) \rightarrow 0$ , ce qui montre la continuité de  $T$ . □

### 2.4.2 Exemples de distributions tempérées

On se donne  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable telle qu'il existe  $s \geq 0$  vérifiant

$$A_f := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |x|^s} |f(x)| dx < \infty. \quad (2.5)$$

Lorsqu'une telle condition est vérifiée, on dira que la fonction mesurable  $f$  est *au plus polynomiale à l'infini*.

**Exercice 41** – *Montrer que toute fonction polynomiale est au plus polynomiale à l'infini.*

- *Montrer que toute fonction  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , est au plus polynomiale à l'infini (penser à l'inégalité de Hölder !)*
- *Montrer que toute fonction au plus polynomiale à l'infini est sommable sur tout compact.*

– Montrer qu’il existe des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui ne sont pas polynomiales à l’infini.

On se donne une fonction polynomiale à l’infini (de sorte que la quantité  $A_f$  introduite en (2.5) est finie). Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $x \mapsto f(x)\varphi(x)$  est mesurable. On prétend de plus qu’elle est sommable. En effet, observons d’abord que si  $p$  est un entier  $\geq s$ , alors il existe  $B_p > 0$  tel que

$$(1 + |x|^s)|\varphi(x)| \leq B_p N_p(\varphi) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

On en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx \leq \|(1 + |x|^s)\varphi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |x|^s} |f(x)| dx \leq B_p A_f N_p(\varphi).$$

Ainsi, l’application linéaire  $T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$  est bien définie et continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Autrement dit  $T_f$  est une distribution tempérée.

Il arrive fréquemment que l’on identifie  $f$  et  $T_f$  : c’est parfaitement scandaleux, puisqu’il s’agit d’une part d’une fonction mesurable sur  $\mathbb{R}^n$  et d’autre part d’une application linéaire sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Abus de langage et de notation, supportable au vu du lemme suivant :

**Lemme 6** Soient  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions mesurables au plus polynomiales à l’infini. On suppose que  $T_f = T_g$ . Alors  $f = g$  presque partout.

Preuve : Il revient au même de montrer que si  $T_f = 0$ , alors  $f = 0$  presque partout. Soit  $R > 0$ . On pose

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{si } f(x) \neq 0 \text{ et } |x| < R, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $h$  est mesurable, bornée à support compact. Soit  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une approximation de l’unité à supports dans  $B(0, 1)$ . Alors  $h_\varepsilon := h * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On peut être plus précis : il existe  $S > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que le support de  $h_\varepsilon$  soit contenu dans  $B(0, S)$  (le support de la convolée est contenu dans la somme des supports). Ensuite,  $\|h_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^\infty} \leq 1$ . Enfin, comme  $h$  est dans  $L^1$ ,  $h_\varepsilon$  converge dans  $L^1$  vers  $h$ , puis à extraction près, presque partout. Comme  $f \in L^1(B(0, S))$ , il vient par convergence dominée

$$0 = T_f(h * \rho_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h_\varepsilon(x) dx = \int_{B(0,S)} f(x)h_\varepsilon(x) dx \longrightarrow \int_{B(0,S)} f(x)h(x) dx.$$

Il s’ensuit que

$$0 = \int_{B(0,R)} |f(x)| dx.$$

Ainsi  $f = 0$  p.p. sur  $B(0, R)$ . Comme  $R$  est arbitraire, on peut conclure. □

Avec cet abus de langage, on dira en particulier que les polynômes ou les fonctions  $L^p$  ‘sont’ des distributions tempérées. Mais il y a des distributions tempérées qui ne sont pas des fonctions mesurables. Soit par exemple  $\mu$  une mesure borélienne positive (i.e.  $\mu$  est définie sur la tribue des boréliens, à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , s’annule sur l’ensemble vide et est  $\sigma$  additive). On dit qu’elle est au plus à croissance polynomiale à l’infini s’il existe  $s > 0$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |x|^s} d\mu < \infty.$$

On peut alors définir et justifier comme précédemment que l’application linéaire  $T_\mu : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu$  est continue. On dit aussi que  $\mu$  est une distribution tempérée.



**Exercice 42** Pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\delta_a$  la masse de Dirac en  $a$  : pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $\delta_a$  est une distribution tempérée.

**Exercice 43** On considère l'application  $T : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) dx$ . Montrer que  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  puis qu'il existe une mesure borélienne positive  $\mu$  au plus polynomiale à l'infini telle que  $T = T_\mu$ .

**Exercice 44** Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  au plus polynomiale à l'infini telle que  $T_f(\varphi) = \varphi(0)$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

On donne maintenant un dernier exemple de distributions tempérées qui ne rentre dans aucune des cases introduites précédemment. Considérons la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . Même si elle tend vers 0 à l'infini, on ne peut pas définir  $T_f$ , car  $f$  n'est pas intégrable en 0. On va néanmoins définir une distribution qui ressemble à  $T_f$ , par approximation, et en utilisant un phénomène de compensation. On définit pour  $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction  $f_\varepsilon$  est, elle, au plus polynomiale à l'infini, puisqu'on a contourné la difficulté en 0. De plus, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \int_{\varepsilon \leq |x|} \frac{\varphi(x)}{x} = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{1 \leq |x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Noter que le second terme dans le membre de droite a bien un sens : en effet, il existe  $B_1 > 0$  tel que  $|\varphi(x)| \leq B_1 \frac{N_1(\varphi)}{|x|}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , d'où l'on déduit

$$\int_{1 \leq |x|} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx \leq 2B_1 N_1(\varphi).$$

On va montrer que le premier terme a une limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour cela, on utilise que  $\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{dx}{x} = 0$  par imparité de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , et donc

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

Par le théorème des accroissements finis, pour tout  $0 < |x| \leq 1$ ,  $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \leq \|\varphi'\|_{L^\infty(-1,1)}$ . Le théorème de convergence dominée implique alors que  $\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$  converge vers  $\int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$ . On définit ainsi une forme linéaire, appelée valeur principale de  $\frac{1}{x}$  par

$$\text{vp} \left( \frac{1}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Montrons que cette forme linéaire est continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Les calculs précédents ont montré que

$$\left| \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \leq 2\|\varphi'\|_{L^\infty(-1,1)} \leq 2N_1(\varphi) \quad , \quad \left| \int_{1 \leq |x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \leq 2B_1 N_1(\varphi).$$

Ainsi,  $|\text{vp}(\frac{1}{x})| \leq CN_1(\varphi)$  avec  $C = 2(1 + B_1)$ , ce qui montre que  $\text{vp}(\frac{1}{x}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 20** On dit qu'une suite de distributions tempérées  $(T_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  converge vers  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , la suite  $(T_k(\varphi))_{k \geq 0}$  converge vers  $T(\varphi)$  dans  $\mathbb{C}$ .

### 2.4.3 Opérations sur les distributions tempérées

Pour définir des opérations sur les distributions tempérées, un guide sûr est de commencer par considérer le cas particulier des fonctions mesurables qui sont au plus polynomiales à l'infini. Supposons par exemple qu'on veuille multiplier une distribution tempérée  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  par, disons, une fonction  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour avoir une idée de ce à quoi peut ressembler le produit  $\varphi T$ , on commence par supposer que  $T$  est de la forme  $T_f$ , pour une fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  qui est au plus polynomiale à l'infini. On sait définir le produit de  $\varphi$  par  $f$  : c'est le produit ponctuel de deux fonctions ! Au vu de l'identification entre  $T_f$  et  $f$ , on a donc envie de dire que  $\varphi T_f = T_{\varphi f}$ , c'est-à-dire pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(\varphi T_f)(\psi) = T_{\varphi f}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) \psi(x) dx = T_f(\varphi \psi).$$

Observez que  $\varphi \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , donc la quantité  $T_f(\varphi \psi)$  a bien un sens. En fait, on a déjà vu que l'application linéaire  $M_\varphi : \psi \rightarrow \varphi \psi$  est continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même. Il est donc légitime de poser la définition suivante :

**Définition 21** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On définit pour tout  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  qui est soit une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  soit une fonction polynomiale, le produit  $\varphi T$  par  $T \circ M_\varphi$ . Explicitement, pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(\varphi T)(\psi) = T(\varphi \psi).$$

Pardon d'insister, mais  $\varphi T$  est bien une distribution tempérée comme composée d'applications linéaires continues.

Dans le même esprit, on voudrait maintenant donner un sens à la notion de dérivée d'une distribution tempérée. Il est évidemment ridicule de vouloir dériver des fonctions non dérivables. Cette idée est pourtant à la base de la plupart des théorèmes d'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles. Pour imaginer une notion généralisée de dérivée d'un élément  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , commençons par le cas où  $T$  est de la forme  $T_f$ , avec  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Comme on sait définir la dérivée d'une fonction dérivable, on a envie de dire que  $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . De manière plus explicite, pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a à l'aide d'une intégration par parties

$$(\partial^\alpha T_f)(\psi) = T_{\partial^\alpha f}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x) \psi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial^\alpha \psi(x) dx.$$

Autrement dit,  $(\partial^\alpha T_f)(\psi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \psi)$ . Observer que le membre de droite est bien défini puisque  $\partial^\alpha \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . C'est effectivement ce qu'on prend comme définition :

**Définition 22** Soient  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Alors on définit  $\partial^\alpha T$  par

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi).$$

Noter que cette définition est consistante :  $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  comme composée d'applications linéaires continues.

**Exercice 45** On définit la fonction de Heaviside :  $H(x) = 1$  pour  $x > 0$  et  $H(x) = 0$  sinon. Représenter cette fonction. Est-elle dérivable au sens usuel ? Montrer que la fonction de Heaviside s'identifie à une distribution. Calculer sa dérivée au sens des distributions.

Dans l'exemple précédent, vous pouvez observer que si  $f$  est une fonction dérivable presque partout, sa dérivée (qui est donc une fonction définie presque partout) ne coïncide pas avec sa dérivée au sens des distributions. Cette-dernière est plus riche d'informations.

Voici deux propriétés faciles à vérifier dans le cadre des distributions (et qui sont parfois délicates à montrer pour des fonctions régulières). Naturellement, il n'y pas de miracle : la notion de dérivation au sens des distributions, comme celle de convergence, sont des notions moins restrictives que dans le cas des fonctions.

**Exercice 46** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\partial_i \partial_j T = \partial_j \partial_i T$ .

**Exercice 47** Soit  $(T_j)_{j \geq 0} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on a  $\partial^\alpha T_j \rightarrow \partial^\alpha T$ .

#### 2.4.4 Formule des sauts en dimension 1

Dans tout ce paragraphe (conformément au programme pour énoncer la formule des sauts),  $n = 1$ . On dit qu'une fonction est  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  s'il existe un nombre fini de points  $a_1 < \dots < a_m$  qu'on appelle les sauts (et on introduit aussi  $a_0 = -\infty, a_{m+1} = +\infty$ ) tels que

- chaque restriction  $f|_{]a_i, a_{i+1}[} \in C^1(]a_i, a_{i+1}[)$  pour  $i = 0, \dots, m$ ,
- ces restrictions se prolongent en une fonction  $C^1$  sur l'adhérence de  $]a_i, a_{i+1}[$  (autrement dit, la fonction et la dérivée se prolonge par continuité aux bords de chaque intervalle).

Noter qu'une fonction  $C^1$  par morceaux est mesurable.

**Théorème 29** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  qui soit aussi à croissance au plus polynomiale à l'infini. Elle définit donc un élément  $T_f$  de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On note  $a_1 < \dots < a_m$  les 'sauts' comme décrits ci-dessus. La dérivée  $f'$  de  $f$  est bien définie et continue sauf en  $\{a_1, \dots, a_m\}$ .

Alors il existe  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  telle que

- 1)  $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx$  ,  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,
- 2)  $(T_f)' = T + \sum_{i=1}^{m-1} [f(a_i+) - f(a_i-)]\delta_{a_i}$ .

L'identité ci-dessus mérite quelques éclaircissements. D'abord,  $f(a_i+)$  est la limite à gauche de  $f$  en  $a_i$ . Vous devinez qui est  $f(a_i-)$ . C'est précisément parce qu'il y a des sauts en chaque  $a_i$  qu'on n'a pas forcément  $f(a_i+) = f(a_i-)$ . Ensuite,  $\delta_{a_i}$  est la masse de Dirac en  $a_i$  qui est bien une distribution tempérée. Lorsqu'on multiplie une distribution par un nombre, cela reste une distribution tempérée. Et une somme finie de distributions tempérées est une distribution tempérée.

Noter que  $f'$  définit un élément de  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  (autrement dit,  $f'$  définit une fonction mesurable bornée sur tout compact). En particulier,  $\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx$  est bien défini lorsque  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Cela dit,  $f'$  n'est pas nécessairement polynomiale à l'infini, donc on ne peut pas nécessairement définir  $T_{f'}$ .

Si  $f$  est continue et  $C^1$  par morceaux, les sauts de  $f'$  n'apparaissent pas dans la dérivée de  $T_f$  :  $(T_f)' = T$ .

Preuve : Pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx = + \int_{-\infty}^{a_1} f'(x)\varphi(x) dx + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x) dx + \int_{a_m}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx.$$

Par intégration par parties, on a pour tout  $i = 1, \dots, m - 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x) dx &= f(a_{i+1}-)\varphi(a_{i+1}) - f(a_i+)\varphi(a_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x) dx \\ &= f(a_{i+1}-)\delta_{a_{i+1}}(\varphi) - f(a_i+)\delta_{a_i}(\varphi) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x) dx \end{aligned}$$

et de même sur  $] -\infty, a_1[$  et  $]a_m, +\infty[$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx &= f(a_1-)\delta_{a_1}(\varphi) + \sum_{i=1}^{m-1} (f(a_{i+1}-)\delta_{a_{i+1}}(\varphi) - f(a_i+)\delta_{a_i}(\varphi)) - f(a_m+)\delta_{a_m} \\ &- \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx = - \sum_{i=1}^m (f(a_i+) - f(a_i-))\delta_{a_i}(\varphi) - T_f(\varphi') \\ &= - \sum_{i=1}^m (f(a_i+) - f(a_i-))\delta_{a_i}(\varphi) + (T_f)'(\varphi). \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$T(\varphi) := - \sum_{i=1}^m (f(a_i+) - f(a_i-))\delta_{a_i}(\varphi) + (T_f)'(\varphi)$$

(qui est bien une distribution tempérée) pour obtenir l'identité de l'énoncé. □

**Exercice 48** Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \ln|x|$  s'identifie à une distribution tempérée. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on définit  $f_\varepsilon(x) = \ln|x|$  si  $|x| \geq \varepsilon$  et  $f_\varepsilon(x) = \ln \varepsilon$  sinon. Calculer la dérivée au sens des distributions de  $f_\varepsilon$ . Montrer également que  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . En déduire la dérivée de  $f$  au sens des distributions.

**Exercice 49** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On pose  $F(x) = \int_0^x f(t) dt, x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  puis que  $f$  est la dérivée de  $F$  au sens des distributions.

## 2.5 Convolution de distributions

### 2.5.1 Support d'une distribution tempérée

On rappelle que si  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue, le support de  $\varphi$  est  $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$ .

**Définition 23** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Lorsque  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $T$  s'annule sur  $U$  si pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dont le support est contenu dans  $U$ , on a  $T(\varphi) = 0$ . On appelle ouvert d'annulation de  $T$  la réunion de tous les ouverts où  $T$  s'annule. Le support de  $T$  est le complémentaire de son ouvert d'annulation.

On note  $\text{supp } T$  le support de  $T$ . Cette définition permet notamment de donner un sens au support d'une fonction  $f \in L^p$ , via l'identification entre  $f$  et  $T_f$ .

On note également  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  les distributions (tempérées) qui sont à support compact. Soit  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $T$  admet une extension 'naturelle' à  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  : soit  $\theta_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\theta_0 = 1$  sur un voisinage du support  $K$  de  $T$ . Posons pour tout  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\tilde{T}(\zeta) := T(\theta_0\zeta)$ . Noter que  $\tilde{T}$  est bien défini, puisque  $\theta_0\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De plus,  $\tilde{T}$  ne dépend pas du choix de  $\theta_0$ . En effet, si  $\theta_1$  est une autre fonction qui a les mêmes propriétés que  $\theta_0$  :  $\theta_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\theta_1 = 1$  sur un voisinage de  $K$ , alors pour tout  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $(\theta_0 - \theta_1)\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  a un support qui n'intersecte pas  $K$ . Donc  $T((\theta_0 - \theta_1)\zeta) = 0$ , de sorte que  $T(\theta_0\zeta) = T(\theta_1\zeta)$ . C'est cette extension  $\tilde{T}$  qu'on appelle l'extension naturelle de  $T$  (en fait,  $\tilde{T}$  est l'unique extension linéaire continue sur  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , mais cela suppose qu'on ait défini au préalable une métrique sur  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ...).

**Exercice 50** – Quel est le support de  $T_f$  lorsque  $f$  est une fonction continue au plus polynomiale à l'infini ?

- Quel est le support de la masse de Dirac  $\delta$  ?
- On considère la distribution tempérée  $\delta' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Quel est le support de  $\delta'$  ? Soit  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $\theta(0) = 1$ . A-t'on  $\theta\delta' = \delta'$  ? Et si  $\theta = 1$  sur un voisinage de 0 ?
- Soit  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que  $\psi T : \varphi \mapsto T(\psi\varphi)$  appartient à  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

## 2.5.2 Convolution de distributions dont l'une est à support compact

**Convolution de deux fonctions sommables** Vous avez déjà vu qu'on pouvait convoler deux fonctions  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . C'est l'élément de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  défini par

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6)$$

On rappelle au passage que pour montrer que cette quantité a bien un sens et définit un élément de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , on utilise le théorème de Fubini (appliqué à des représentants Borel mesurables de  $f$  et  $g$ ). On cherche ici à définir la convolution entre une distribution tempérée et une fonction, voire entre deux distributions tempérées. Disons tout de suite que ce n'est pas toujours possible.

Introduisons pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , l'opérateur de translation  $\tau_x$  défini pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\tau_x(\varphi)(y) := \varphi(y-x)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . On écrira souvent  $\tau_x\varphi$  au lieu de  $\tau_x(\varphi)$ . On notera également  $\check{\varphi}$  la fonction  $\check{\varphi}(y) = \varphi(-y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Alors si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau_x(\check{g})(y) dy = T_f(\tau_x(\check{g})).$$

C'est cette dernière expression de  $f * g$  qui suggère les généralisations qui suivent.

**Convolution de  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$**

**Définition 24** Si  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on définit

$$T * \varphi(x) := T(\tau_x\check{\varphi}).$$

Cette définition a bien un sens puisque  $\tau_x\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Mais on peut dire plus, grâce au lemme suivant.

**Lemme 7** Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

- 1) La fonction  $u : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \tau_x\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ .
- 2) On introduit pour  $h > 0$

$$\varphi_h(x) := \frac{\varphi(x + he_1) - \varphi(x)}{h}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors  $\varphi_h \rightarrow \partial_1\varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

*Preuve :* Montrons la continuité de  $u$  en un point  $x \in \mathbb{R}^n$ . On pose  $\psi := \tau_x\varphi$ . Pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_y\varphi = \tau_{y-x}\tau_x\varphi$ , donc  $\tau_y\varphi - \tau_x\varphi = \tau_{y-x}\psi - \psi$ . Donc (quitte à remplacer  $\varphi$  par  $\psi$ ), on peut supposer  $x = 0$ . Il s'agit donc de prouver que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $N_p(\tau_y\varphi - \varphi) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow 0$ .

Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha|, |\beta| \leq p$ . Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 appliqué à  $\partial^\beta\varphi$ , on a pour tout  $y, z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\partial^\beta\varphi(y+z) - \partial^\beta\varphi(z) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_i\partial^\beta\varphi(z+ty)y_i dt.$$

On va multiplier par  $z^\alpha$  et utiliser les inégalités suivantes :

$$|z^\alpha| \leq |z|^{|\alpha|} \leq 2^{|\alpha|}(|z + ty|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|}) \leq C \left( \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} |(z + ty)^\gamma| + 1 + |y|^p \right)$$

pour une certaine constante  $C > 0$  qui ne dépend que de  $n$  et  $p$ . Cela implique

$$\begin{aligned} |z^\alpha(\partial^\beta \varphi(y + z) - \partial^\beta \varphi(z))| &\leq C \int_0^1 \sum_{i=1}^n |\partial_i \partial^\beta \varphi(z + ty)| |y_i| \left( \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} |(z + ty)^\gamma| + 1 + |y|^p \right) \\ &\leq C'(1 + |y|^p) N_{p+1}(\varphi) |y|, \end{aligned}$$

où  $C' > 0$  ne dépend que de  $n$  et  $p$ . On en déduit que  $N_p(\tau_y \varphi - \varphi) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow 0$ , d'où la continuité de  $u$ .

Montrons que  $\varphi_h \rightarrow \partial_1 \varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . Il s'agit de montrer que  $N_p\left(\frac{\varphi(\cdot + he_1) - \varphi(\cdot)}{h} - \partial_1 \varphi(\cdot)\right) \rightarrow 0$ . Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|, |\beta| \leq p$ . Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 appliqué à  $\partial^\beta \varphi$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^n, h > 0$

$$\partial^\beta \varphi_h(x) - \partial^\beta \partial_1 \varphi(x) = \int_0^1 (1-t) \partial^\beta \partial_1^2 \varphi(x + t h e_1) h dt.$$

On multiplie par  $x^\alpha$  et en utilisant les mêmes inégalités que précédemment, on obtient

$$|x^\alpha(\partial^\beta \varphi_h(x) - \partial^\beta \partial_1 \varphi(x))| \leq C''(1 + |h|^p) N_{p+2}(\varphi) |h|,$$

où  $C'' > 0$  ne dépend que de  $n$  et  $p$ . On en déduit que  $N_p\left(\frac{\varphi(\cdot + he_1) - \varphi(\cdot)}{h} - \partial_1 \varphi(\cdot)\right) \rightarrow 0$ . □

**Proposition 10** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . La fonction  $T * \varphi$  est  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et au plus polynomiale à l'infini. Il existe  $C > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  qui ne dépendent que de  $T$  tels que

$$|T * \varphi(x)| \leq C(1 + |x|^p) N_p(\varphi) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier,  $T * \varphi$  s'identifie à une distribution tempérée. De plus,  $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$ .

Preuve : La fonction  $T * \varphi$  est la composée de la fonction  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \tau_x \check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  qui est continue, et de la forme linéaire continue  $T$  : elle est donc continue.

Fixons  $x \in \mathbb{R}^n$ . En appliquant le lemme précédent à la fonction  $\psi := \tau_x \check{\varphi}$  et en utilisant la continuité de  $T$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , il vient

$$\frac{1}{h} (T(\tau_{x+he_1} \check{\varphi}) - T(\tau_x \check{\varphi})) = T \left( \frac{\psi(\cdot - he_1) - \psi(\cdot)}{h} \right) \longrightarrow -T(\partial_1 \psi) = -T(\partial_1 \tau_x \check{\varphi}) = T(\tau_x (\partial_1 \varphi)^\vee).$$

On en déduit que  $T * \varphi$  admet une dérivée partielle selon  $e_1$ , avec  $\partial_1(T * \varphi) = T * (\partial_1 \varphi)$ . C'est bien sûr vrai dans les autres directions  $e_2, \dots, e_n$ . L'argument ayant montré la continuité de  $T * \varphi$  implique à nouveau (en remplaçant  $\varphi$  par  $\partial_i \varphi$ ) la continuité de  $\partial_i(T * \varphi) = T * (\partial_i \varphi)$ . Ainsi,  $T * \varphi$  est continue et a des dérivées partielles continues : elle est donc  $C^1(\mathbb{R}^n)$ . En itérant ce raisonnement avec les dérivées partielles de  $\varphi$  au lieu de  $\varphi$ , on obtient donc que  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha(T * \varphi) = T * (\partial^\alpha \varphi)$ . Ensuite,

$$T * (\partial^\alpha \varphi)(x) = T(\tau_x (\partial^\alpha \varphi)^\vee) = T((-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \tau_x \check{\varphi}) = (\partial^\alpha T)(\tau_x \check{\varphi}) = (\partial^\alpha T) * \varphi(x).$$

Il reste à prouver que  $T * \varphi$  est au plus à croissance polynomiale à l'infini. Il existe  $A > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $|T(\psi)| \leq AN_p(\psi)$ . En particulier, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|T * \varphi(x)| \leq AN_p(\tau_x \check{\varphi})$ . Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|\alpha|, |\beta| \leq p$ . Alors pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|y^\alpha \partial^\beta (\tau_x \check{\varphi})(y)| \leq 2^p (|x - y|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x - y)| + |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x - y)|) \leq CN_p(\varphi)(1 + |x|^p).$$

où  $C$  ne dépend que de  $n$  et  $p$ . En prenant le sup sur  $y$  et en sommant sur  $\alpha, \beta$ , on obtient  $N_p(\tau_x \varphi) \leq C(1 + |x|^p)N_p(\varphi)$  et finalement  $|T * \varphi(x)| \leq C'(1 + |x|^p)N_p(\varphi)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , où  $C'$  ne dépend que de  $n$  et  $p$ . □

**Remarque 1** Si  $R_1, R_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vérifient que pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on a  $R_1 * \varphi = R_2 * \varphi$ , alors  $R_1 = R_2$ .

En effet, on peut supposer par linéarité que  $R_2 = 0$ . Alors pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $R_1(\check{\varphi}) = R_1 * \varphi(0) = 0$  donc  $R_1$  s'annule sur  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui est un sous-espace dense de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Comme  $R_1$  est continu sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a bien  $R_1 = 0$ .

**Proposition 11** Soient  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $T * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De plus, il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_p > 0$  tel que  $N_p(T * \varphi) \leq C_p N_{p+q}(\varphi)$ .

Preuve : On sait déjà que  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Introduisons  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\theta = 1$  sur un voisinage du support de  $T$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On va montrer que  $N_p(T * \varphi) < \infty$ . Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|\alpha|, |\beta| \leq p$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$x^\alpha \partial^\beta (T * \varphi)(x) = x^\alpha T * (\partial^\beta \varphi)(x) = x^\alpha T(\tau_x (\partial^\beta \varphi)^\vee) = x^\alpha T(\theta \tau_x (\partial^\beta \varphi)^\vee).$$

Il existe  $q \in \mathbb{N}$  et  $A > 0$  tel que pour tout  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $T(\zeta) \leq AN_q(\zeta)$ . Pour  $x$  fixé, on est donc amené à évaluer  $N_q(\theta \tau_x \psi)$  en notant  $\psi := (\partial^\beta \varphi)^\vee$ . Pour tout  $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\mu|, |\nu| \leq q$ , et pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , la formule de Leibniz implique

$$|y^\mu \partial^\nu (\theta \tau_x \psi)(y)| \leq C_1 |y^\mu| \sum_{|\gamma| \leq \nu} |\partial^{\nu-\gamma} \theta(y)| |\partial^\gamma \psi(y-x)|,$$

où  $C_1$  ne dépend que de  $n, \nu$ . On majore brutalement  $\sup_{|\delta| \leq q} |\partial^\delta \theta(y)|$  par  $C_2 \chi_{B(0,R)}(y)$  où  $C_2$  dépend de  $\theta, q$ , et où  $R > 0$  est tel que  $B(0, R)$  contienne le support de  $\theta$  et  $\chi_{B(0,R)}$  est la fonction caractéristique de  $B(0, R)$ . Alors en notant  $C_3 := C_1 C_2 (1 + R)^q$

$$|y^\mu \partial^\nu (\theta \tau_x \psi)(y)| \leq C_3 \chi_{B(0,R)}(y) \sum_{|\gamma| \leq q} |\partial^\gamma \psi(y-x)|.$$

Comme  $\psi = (\partial^\beta \varphi)^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , il existe  $B > 0$  (qui ne dépend que de  $n, p, q$ ) tel que  $|\partial^\gamma \psi(z)| \leq \frac{BN_{p+q}(\varphi)}{1+|z|^p}$  pour tous  $\gamma \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\gamma| \leq q$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ . Ainsi,

$$|y^\mu \partial^\nu (\theta \tau_x \psi)(y)| \leq C_4 \chi_{B(0,R)}(y) \frac{N_{p+q}(\varphi)}{1+|y-x|^p} \leq C_5 \frac{N_{p+q}(\varphi)}{1+|x|^p},$$

où  $C_4, C_5$  ne dépendent pas de  $\varphi$ . On en déduit  $N_q(\theta \tau_x \psi) \leq \frac{C_6 N_{p+q}(\varphi)}{1+|x|^p}$  puis finalement  $N_p(T * \varphi) \leq C_7 N_{p+q}(\varphi) < \infty$ , avec  $C_6, C_7$  indépendants de  $\varphi$ . En particulier,  $T * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . □

**Convolution de  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$**

**Définition 25** Soient  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On définit

$$T * \varphi(x) := T(\tau_x \check{\varphi}).$$

Certes,  $\tau_x \check{\varphi}$  n'est pas nécessairement dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  : elle est seulement dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Mais on se souvient (?) que les distributions tempérées à support compact admettent une extension naturelle à  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , qu'on a ici encore noté  $T$ . Ainsi  $T * \varphi(x) = T(\theta \tau_x \check{\varphi})$  pour n'importe quel  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\theta = 1$  sur un voisinage du support de  $T$ .

**Proposition 12** Soient  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . De plus,  $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$ .

Preuve : on va se ramener à la proposition 10. Il suffit de montrer que  $T * \varphi \in C^\infty(B(0, R))$  pour tout  $R > 0$ . Fixons  $R > 0$  et soit  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\theta = 1$  sur un voisinage de  $B(0, R) - K_T$ , où  $K_T$  désigne le support de  $T$ . Au cas où ce ne serait pas clair,  $B(0, R) - K_T$  est l'ensemble  $\{x - y : x \in B(0, R), y \in K_T\}$ .

Soit  $x \in B(0, R)$ . Pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_x \check{\varphi}(y) - \tau_x(\theta \varphi)^\vee(y) = (1 - \theta(x - y))\varphi(x - y)$ . Donc la fonction  $\tau_x \check{\varphi} - \tau_x(\theta \varphi)^\vee$  s'annule sur un voisinage de  $K_T$ . Donc  $T(\tau_x \check{\varphi}) = T(\tau_x(\theta \varphi)^\vee)$ . Ainsi,  $T * \varphi = T * (\theta \varphi)$  sur  $B(0, R)$ . Par la proposition 10, on sait que  $T * (\theta \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On en déduit que  $T * \varphi \in C^\infty(B(0, R))$ , comme attendu.

De plus, toujours sur  $B(0, R)$ ,  $\partial^\alpha(T * \varphi) = \partial^\alpha(T * (\theta \varphi)) = T * (\partial^\alpha(\theta \varphi))$  par la proposition 10. Comme  $\theta = 1$  sur un voisinage de  $B(0, R) - K_T$ , toutes ses dérivées partielles y sont nulles. On en déduit que  $\partial^\alpha(\theta \varphi) = \theta \partial^\alpha \varphi$  sur  $B(0, R) - K_T$ , ce qui implique comme précédemment  $T * (\partial^\alpha(\theta \varphi)) = T * (\theta \partial^\alpha \varphi) = T * (\partial^\alpha \varphi)$  sur  $B(0, R)$ . Par ailleurs, toujours par la proposition 10,  $T * (\partial^\alpha(\theta \varphi)) = (\partial^\alpha T) * (\theta \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi$ , ce qui achève la preuve. □

Une propriété (plus importante qu'il n'y paraît) de la convolution  $T * \varphi$  telle qu'on l'a définie lorsque  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ou lorsque  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , est qu'elle commute avec les translations : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\tau_x(T * \varphi) = T * (\tau_x \varphi).$$

**Convolution de deux distributions dont l'une est à support compact** On se donne deux distributions tempérées  $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et on suppose que l'une des deux est à support compact. On s'intéresse à l'opérateur

$$L : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto T * (S * \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.7)$$

Commençons par observer que  $L$  est bien défini. Si  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $S * \varphi$  est  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et donc  $T * (S * \varphi)$  a bien un sens par la définition 25 et c'est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Si  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , alors la proposition 11 montre que  $S * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $T * (S * \varphi)$  a bien un sens, par la définition 24 et c'est même une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 26** Soient  $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et on suppose que l'une des deux est à support compact. Alors  $T * S$  est la forme linéaire  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto L(\check{\varphi})(0)$ , où  $L$  est défini par (2.7).

**Proposition 13** Soient  $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  avec  $S$  ou  $T$  à support compact. La forme linéaire  $T * S$  est continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve : Supposons pour commencer que  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Par la proposition 11, l'endomorphisme  $\varphi \mapsto S * \varphi$  est continu. Or  $L(\check{\varphi})(0) = T((S * \check{\varphi})^\vee)$ . Donc  $\varphi \mapsto L(\check{\varphi})(0)$  est continu comme composée d'applications continues.



Si on suppose maintenant  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , on écrit  $L(\check{\varphi})(0) = T(\theta(S * \check{\varphi})^\vee)$  où  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  vaut 1 sur un voisinage du support de  $T$ . On conclut par le lemme 8 ci-dessous.  $\square$

**Lemme 8** Soient  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors l'application linéaire  $\varphi \mapsto \theta(S * \varphi)$  est continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

Preuve : Soient  $p \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|, |\beta| \leq p$ . Soit  $R > 0$  tel que  $B(0, R)$  contient le support de  $\theta$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , par la formule de Leibniz,

$$|x^\alpha \partial^\beta (\theta S * \varphi)(x)| \leq C_1 \chi_{B(0, R)}(x) \sum_{|\gamma| \leq p} |S * (\partial^\gamma \varphi)(x)|,$$

où  $C_1$  dépend de  $\theta$  (on a majoré uniformément les dérivées partielles de  $\theta$ , sans oublier qu'elles s'annulent hors d'une boule  $B(0, R)$ , ce qui a permis aussi de majorer  $|x^\alpha| \leq CR^p$ ).

Par la proposition 10, il existe  $C_2$  et  $q \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $|S * \psi(x)| \leq C_2(1 + |x|^q)N_q(\psi)$ . En prenant  $\psi = \partial^\gamma \varphi$ , il vient

$$|x^\alpha \partial^\beta (\theta S * \varphi)(x)| \leq C_3 N_{p+q}(\varphi),$$

où  $C_3$  est indépendante de  $\varphi$ . Finalement,  $N_p(\theta(S * \varphi)) \leq C_4 N_{p+q}(\varphi)$ , avec  $C_4$  indépendante de  $\varphi$ .  $\square$

**Remarque 2** Soient  $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  avec  $S$  ou  $T$  à support compact. Alors  $T * S$  est l'unique élément  $R$  de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$R * \varphi = T * (S * \varphi).$$

En effet, observons d'abord que  $(T * S) * \varphi = T * (S * \varphi)$ . On a

$$(T * S) * \varphi(0) = (T * S)(\check{\varphi}) = L(\check{\varphi})(0) = L(\varphi)(0) = T * (S * \varphi)(0).$$

Ensuite, si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} (T * S) * \varphi(x) &= (\tau_{-x}((T * S) * \varphi))(0) = (T * S) * (\tau_{-x}\varphi)(0) = T * (S * (\tau_{-x}\varphi))(0) \\ &= \tau_{-x}(T * (S * \varphi))(0) = T * (S * \varphi)(x). \end{aligned}$$

Pour l'unicité, on applique la remarque 1.  $\square$

Comme dans les deux premiers cas où on a défini la convolution  $T * \varphi$  avec  $(T, \varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ou  $(T, \varphi) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on a encore

**Proposition 14** Soient  $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  avec  $S$  ou  $T$  à support compact. Alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on a

$$\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S).$$

Preuve : Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$(\partial^\alpha (T * S)) * \varphi = (T * S) * (\partial^\alpha \varphi) = T * (S * (\partial^\alpha \varphi)) = T * ((\partial^\alpha S) * \varphi) = (T * (\partial^\alpha S)) * \varphi$$

et aussi

$$(\partial^\alpha (T * S)) * \varphi = T * (S * (\partial^\alpha \varphi)) = T * \partial^\alpha (S * \varphi) = (\partial^\alpha T) * (S * \varphi) = ((\partial^\alpha T) * S) * \varphi.$$

$\square$

### 2.5.3 Propriétés de la convolution

**Proposition 15 (Convolution et support)** Soient  $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $T * S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\text{supp } T * S \subset \text{supp } T + \text{supp } S$ .

Preuve : On sait déjà que  $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Notons  $K_T$  le support de  $T$  et  $K_S$  celui de  $S$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus (K_T + K_S)$ . Alors,

$$(T * S)(\varphi) = T * (S * \check{\varphi})(0) = T((S * \check{\varphi})^\vee).$$

La fonction  $\varphi$  s'annule sur un voisinage de  $K_T + K_S$  donc il existe un voisinage  $V$  de  $K_T$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $\tau_{-x}\varphi$  s'annule sur un voisinage de  $K_S$  et donc  $S * \check{\varphi}(-x) = S(\tau_{-x}\varphi) = 0$ . On en déduit que  $T((S * \check{\varphi})^\vee) = 0$ . Donc  $\text{supp } T * S \subset \text{supp } T + \text{supp } S$ . □

Cette proposition s'applique notamment lorsque l'une des distributions tempérées, voire les deux, sont des éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Dans le lemme suivant, on montre que pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , l'application  $\psi \mapsto \varphi * \psi$  est un endomorphisme continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme 9** Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De plus, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_p > 0$  telle que

$$N_p(\varphi * \psi) \leq C_p(N_0(\psi)N_{p+n+1}(\varphi) + N_p(\varphi)N_{p+n+1}(\psi)).$$

Preuve : Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p$ . On rappelle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $B_k > 0$  (qui ne dépend que de  $n$  et  $k$  : voir au besoin (2.2)) tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $|\gamma| \leq k$ , on a

$$|\partial^\gamma \varphi(x)| \leq B_k \frac{N_k(\varphi)}{1 + |x|^k}$$

et de même pour  $\psi$ .

En utilisant  $|x|^{|\alpha|} \leq 2^{|\alpha|}(|x - y|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|}) \leq 2^p(|x - y|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|})$ , on a

$$\begin{aligned} |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x - y)| |\psi(y)| &\leq 2^p \left( |x - y|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x - y)| |\psi(y)| + |y|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x - y)| |\psi(y)| \right) \\ &\leq 2^p B_{p+n+1} \left( N_{p+n+1}(\varphi) N_0(\psi) \frac{|x - y|^{|\alpha|}}{1 + |x - y|^{n+p+1}} + N_p(\varphi) N_{p+n+1}(\psi) \frac{|y|^{|\alpha|}}{1 + |y|^{n+p+1}} \right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$|x^\alpha \partial^\beta (\varphi * \psi)(x)| \leq |x|^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta \varphi(x - y)| |\psi(y)| dy \leq C(N_{p+n+1}(\varphi) N_0(\psi) + N_p(\varphi) N_{p+n+1}(\psi))$$

où  $C$  ne dépend que de  $n$  et  $p$ . □

**Proposition 16 (Associativité 1)** Soient  $T, S, R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  avec au moins deux à support compact. Alors  $(T * S) * R = T * (S * R)$ .

Preuve : Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$((T * S) * R) * \varphi = (T * S) * (R * \varphi) = T * (S * (R * \varphi)) = T * ((S * R) * \varphi) = (T * (S * R)) * \varphi,$$

ce qui prouve le résultat. □

On en vient à la propriété la plus délicate à prouver concernant la convolution des distributions tempérées : l'associativité lorsque 2 des facteurs sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On aura besoin du lemme suivant :

**Lemme 10** Soient  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ ,  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $Q > 0$ . Alors la fonction  $y \mapsto \int_{(-Q,Q)^m} u(x, y) dx$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $x \mapsto T(y \mapsto u(x, y))$  est continue et

$$T \left( y \mapsto \int_{(-Q,Q)^m} u(x, y) dx \right) = \int_{(-Q,Q)^m} T(y \mapsto u(x, y)) dx.$$

Preuve : Posons  $v(y) := \int_{(-Q,Q)^m} u(x, y) dx$ . Comme  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  et qu'on intègre sur un compact, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\partial^\alpha v(y) = \int_{(-Q,Q)^m} \partial_y^\alpha u(x, y) dx$ . On a alors pour tout  $p \in \mathbb{N}^n$ ,  $N_p(v) < \infty$ , ce qui montre la première affirmation.

Montrons que  $x \mapsto T(y \mapsto u(x, y))$  est continue. Par le lemme 7,  $x \in \mathbb{R}^m \mapsto \tau_{(-x,0)} u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  est continue. Puis l'application linéaire  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \mapsto w(0, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est continue, car pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $N_p(w(0, \cdot)) \leq N_p(w)$ . Donc par composition,  $x \in \mathbb{R}^m \mapsto u(x, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est continu, et il en va donc de même de  $x \mapsto T(y \mapsto u(x, y))$ .

On montre la dernière affirmation par récurrence sur  $m \geq 1$ . Pour  $m = 1$ , considérons les fonctions

$$G : t \in \mathbb{R} \mapsto T(y \mapsto \int_{-Q}^t u(x, y) dx) \quad , \quad H : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-Q}^t T(y \mapsto u(x, y)) dx.$$

Posons pour  $h > 0$   $v_h(y) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(x, y) dx$ . Comme dans la preuve du lemme 7, on montre que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_p > 0$  tel que pour tout  $h \in (0, 1)$

$$N_p(v_h - u(t, y)) \leq C_p N_{p+1}(u) |h|.$$

Donc  $(v_h)_{h>0}$  converge vers  $u(t, \cdot)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On peut conclure par continuité de  $T$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que  $G$  est dérivable, de dérivée  $x \mapsto T(y \mapsto u(x, y))$ .

Comme  $x \mapsto T(y \mapsto u(x, y))$  est continue, la fonction  $H$  est dérivable, de dérivée  $x \mapsto T(y \mapsto u(x, y))$ . Or  $G(-Q) = H(-Q) = 0$ . Donc  $H = G$ . En particulier,  $H(Q) = G(Q)$  : la propriété est vraie pour  $m = 1$ .

Supposons-la vraie jusqu'au rang  $m - 1$  et montrons-la pour  $m$ . Par le théorème de Fubini et le cas  $m = 1$  appliqué à la fonction  $(x, y) \mapsto \int_{(-Q,Q)^{m-1}} u(x_1, x', y) dx'$ , on obtient

$$T \left( y \mapsto \int_{(-Q,Q)^m} u(x, y) dx \right) = \int_{(-Q,Q)} T \left( y \mapsto \int_{(-Q,Q)^{m-1}} u(x_1, x', y) dx' \right) dx_1.$$

Pour chaque  $x_1$ , on applique alors le cas  $m - 1$  à la fonction  $(x', y) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^n \mapsto u(x_1, x', y)$  :

$$T \left( y \mapsto \int_{(-Q,Q)^{m-1}} u(x_1, x', y) dx' \right) = \int_{(-Q,Q)^{m-1}} T(y \mapsto u(x_1, x', y)) dx'.$$

Il suffit d'intégrer en  $x_1$  pour obtenir la propriété au rang  $m$ . La propriété est donc vraie pour tout  $m$ .  $\square$

**Proposition 17 (Associativité 2)** Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$T * (\varphi * \psi)(x) = (T * \varphi) * \psi(x).$$

Preuve : On a  $T * (\varphi * \psi)(x) = T(\tau_x(\varphi * \psi)^\vee)$  avec

$$\begin{aligned} \tau_x(\varphi * \psi)^\vee(y) &= \varphi * \psi(x - y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \psi(x - y - z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(y - z) \psi(x - z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_z \check{\varphi})(y) \psi(x - z) dz. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$(T * \varphi) * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} T(\tau_z \check{\varphi}) \psi(x - z) dz.$$

Supposons dans un premier temps que  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On fixe  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $Q$  tel que  $(-Q, Q)^n$  contienne le support de  $\psi(x - \cdot)$ . On applique le lemme précédent avec  $u(z, y) = (\tau_z \check{\varphi})(y) \psi(x - z)$  et on obtient que

$$T\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_z \check{\varphi})(y) \psi(x - z) dz\right) = \int_{\mathbb{R}^n} T(\tau_z \check{\varphi}) \psi(x - z) dz.$$

Dans ce cas là, on a bien  $T * (\varphi * \psi)(x) = (T * \varphi) * \psi(x)$ .

Dans le cas général où on ne suppose plus  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on se donne une suite  $(\psi_j)_{j \geq 0} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  convergeant vers  $\psi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On a donc pour tout  $j \geq 0$ ,  $T * (\varphi * \psi_j) = (T * \varphi) * \psi_j$ . On a déjà vu que à  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  fixé,  $\zeta \mapsto \varphi * \zeta$  est un endomorphisme continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Ensuite, si  $(\zeta_j)_{j \geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge vers  $\zeta$  et  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , alors par la proposition 10, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|S * \zeta_j(x) - S * \zeta(x)| = |S * (\zeta_j - \zeta)(x)| \leq C(1 + |x|^p) N_p(\zeta_j - \zeta),$$

où  $C > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  ne dépendent que de  $S$ . Donc pour tout  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$|(S * \zeta_j)(\xi) - (S * \zeta)(\xi)| \leq C' N_p(\xi) N_p(\zeta_j - \zeta).$$

Ainsi,  $(S * \zeta_j)_j$  tend vers  $S * \zeta$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On applique ce qui précède à  $S = T$  et  $\zeta_j = \varphi * \psi_j$  d'une part, et  $S = (T * \varphi)$  et  $\zeta_j = \psi_j$  d'autre part. On obtient donc  $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$ , ce qui achève la preuve. □

Lorsque  $T$  est de la forme  $T_f$  avec  $f$  mesurable au plus polynomiale à l'infini, cette proposition est une conséquence facile du théorème de Fubini.

**Exercice 51** Soit  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$T * (\varphi * \psi)(x) = (T * \varphi) * \psi(x).$$

On pourra se ramener au cas où  $\varphi$  est à support compact, en établissant l'égalité pour  $x \in B(0, R)$  avec  $R$  arbitraire.

**Proposition 18** Soient  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$(T * \varphi)(\psi) = T(\check{\varphi} * \psi).$$

Preuve : Observons d'abord que les deux membres ont bien un sens. A gauche,  $T * \varphi$  est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à croissance polynomiale, donc s'identifie à un élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , auquel on peut appliquer  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . A droite, on sait que la convolée de deux éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , à savoir  $\check{\varphi}$  et  $\psi$ , est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et donc  $T(\check{\varphi} * \psi)$  a bien un sens.

Montrons l'égalité. Posons  $\zeta := \check{\psi}$ . Par la proposition 17,  $(T * \varphi) * \zeta(0) = T * (\varphi * \zeta)(0)$ , ce qui donne en revenant à la définition de la convolution :  $(T * \varphi)(\check{\zeta}) = T((\varphi * \zeta)^\vee)$ . Comme  $(\varphi * \zeta)^\vee = \check{\varphi} * \check{\zeta}$ , on a  $(T * \varphi)(\check{\zeta}) = T(\check{\varphi} * \check{\zeta})$ . Puisque  $\check{\zeta} = \psi$ , on a bien  $(T * \varphi)(\psi) = T(\check{\varphi} * \psi)$ . □

**Exercice 52** Montrer que si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et si  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  est telle qu'il existe  $C > 0, p > 0$  vérifiant  $|\psi(x)| \leq C(1 + |x|^p)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\varphi * \psi$  est bien défini, est  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi * \psi = \psi * \varphi$ .

**Proposition 19 (Commutation)** Soient  $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et on suppose que l'une des deux est à support compact. Alors  $T * S = S * T$ .

Preuve : Soient  $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Par la proposition 10,  $T * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et il existe  $C > 0, p > 0$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|T * \psi(x)| \leq C(1 + |x|^p)$ . Il en de même pour  $S * \varphi$ . Alors par associativité et l'exercice 52,

$$(T * S) * (\varphi * \psi) = T * (S * (\varphi * \psi)) = T * ((S * \varphi) * \psi) = T * (\psi * (S * \varphi)) = (T * \psi) * (S * \varphi).$$

On a de même  $(S * T) * (\psi * \varphi) = (S * \varphi) * (T * \psi)$ . Si par exemple  $S$  est à support compact, alors  $S * \varphi$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par la proposition 11. L'exercice 52 implique alors  $(T * \psi) * (S * \varphi) = (S * \varphi) * (T * \psi)$ . Donc  $(T * S) * (\varphi * \psi) = (S * T) * (\psi * \varphi) = (S * T) * (\varphi * \psi)$ . Donc pour tout  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $((T * S) * \varphi) * \psi = ((S * T) * \varphi) * \psi$ , ce qui implique  $(T * S) * \varphi = (S * T) * \varphi$ . Comme c'est vrai pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on a  $T * S = S * T$ . □

**Exercice 53** Montrer que  $\delta$  est le neutre de la convolution : pour tout  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\delta * T = T \quad , \quad \delta * \varphi = \varphi.$$

**Proposition 20 (Approximation)** Pour tout  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , il existe une suite  $(v_k)_{k \geq 0} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à croissance polynomiale à l'infini telle que  $T_{v_k} \rightarrow T$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve : Soit  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\rho \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$  et  $\text{supp } \rho \subset B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ . Puis on introduit pour tout  $k \geq 1$  la fonction  $\rho_k(x) := k^n \rho(kx)$ . On pose enfin  $v_k(x) := T * \rho_k(x)$ , qui est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , à croissance au plus polynomiale à l'infini. On peut donc considérer  $T_{v_k} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Soit maintenant  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Par la proposition 18, on a  $(T_{v_k})(\varphi) = T(\check{\rho}_k * \varphi)$ . Il reste donc à voir que  $\check{\rho}_k * \varphi \rightarrow \varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Comme dans la preuve du lemme 7, il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\alpha|, |\beta| \leq p$ , pour tout  $y \in B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ ,

$$|x^\alpha (\partial^\beta \varphi(x) - \partial^\beta \varphi(x - y))| \leq C|y| N_{p+1}(\varphi).$$

En écrivant  $x^\alpha (\partial^\beta \varphi(x) - \partial^\beta \check{\rho}_k * \varphi(x)) = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, \frac{1}{k})} x^\alpha (\check{\rho}_k(y) (\partial^\beta \varphi(x) - \partial^\beta \varphi(x - y))) dy$ , on obtient

$$N_p(\varphi - \check{\rho}_k * \varphi) \leq \frac{C}{k} N_{p+1}(\varphi),$$

ce qui permet de conclure. □

## 2.6 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Comme toujours, pour avoir une idée de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée, commençons par considérer le cas où celle-ci est de la forme  $T_f$ , avec  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$T_f(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(y) dx dy.$$

Comme  $(x, y) \mapsto f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(y)$  est dans  $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$T_f(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx dy = T_{\widehat{f}}(\varphi).$$

Vous ne serez donc pas étonnés par la définition qui suit

**Définition 27** Pour tout  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , on pose pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{T}(\varphi) := T(\widehat{\varphi}).$$

Comme l'application  $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$  est linéaire continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même, on en déduit par composition que  $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Par ailleurs, il est immédiat que si  $T_j \rightarrow T$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\widehat{T}_j \rightarrow \widehat{T}$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 21** L'application  $T \mapsto \widehat{T}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve : L'application est linéaire. Montrons qu'elle est bijective. La formule d'inversion pour les éléments  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  affirme que  $\mathcal{F}((\widehat{\varphi})^\vee) = (2\pi)^n \varphi$ . On peut définir pour tout  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\check{T}$  l'élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  par  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto T(\check{\varphi})$ . L'application  $T \mapsto \check{T}$  commute avec  $\mathcal{F}$ , car c'est déjà le cas sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\mathcal{F}((\widehat{T})^\vee)(\varphi) = (\widehat{T})^\vee(\widehat{\varphi}) = \widehat{T}((\widehat{\varphi})^\vee) = T(\mathcal{F}((\widehat{\varphi})^\vee)) = (2\pi)^n T(\varphi).$$

Donc, la formule d'inversion reste vraie sur  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Elle implique que  $\mathcal{F}$  est inversible, d'inverse  $\mathcal{F}^{-1} : T \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} (\widehat{T})^\vee = \frac{1}{(2\pi)^n} \check{T}$ . □

**Exercice 54** On rappelle que si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\widehat{\partial^\alpha \varphi} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}$  et  $\partial^\alpha \widehat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{\varphi}$ . Etablir des formules analogues pour une distribution tempérée  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  au lieu de  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 22** Soit  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors la fonction  $v : \xi \mapsto T(x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle})$  est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . De plus, il existe  $C > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|v(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^p). \quad (2.8)$$

Enfin, l'application  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi) \varphi(\xi) d\xi$  définit un élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  qui coïncide avec  $\widehat{T}$ .

Preuve : On a pour tout  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $-i\langle x, \xi \rangle = \frac{i}{2}(|x - \xi|^2 - |x|^2 - |\xi|^2)$ . Introduisons  $\varphi(y) = e^{\frac{iy|^2}{2}}$  et  $\psi(y) = e^{-\frac{iy|^2}{2}}$ . Dans toute la suite, on identifiera  $\varphi$  et la distribution tempérée  $T_\varphi$  qu'elle induit, et de même pour  $\psi$ .

On a  $e^{-i\langle x, \xi \rangle} = \psi(\xi) \psi(x) \tau_\xi \check{\varphi}(x)$  et donc

$$T(x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle}) = \psi(\xi) T(x \mapsto \psi(x) \tau_\xi \check{\varphi}(x))$$

c'est-à-dire  $v(\xi) = \psi(\xi) ((\psi T) * \varphi)(\xi)$ . Comme  $\psi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , on a  $(\psi T) * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  par la proposition 12. Ainsi,  $v$  est bien  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . De plus,  $(\psi T) * \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  comme convolée d'un élément de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et d'un élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Pour prouver (2.8), on introduit  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  valant 1 sur un voisinage du support de  $T$ . Ainsi, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , on a  $v(\xi) = T(x \mapsto \theta(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle})$ . Comme  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , il existe  $C > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que  $|T(x \mapsto \theta(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle})| \leq CN_p(x \mapsto \theta(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle})$ . Alors (2.8) découle de la formule de Leibniz appliquée à  $\theta$  et  $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle}$ .

Enfin, pour tout  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\zeta v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) \zeta(x) dx = ((\psi T) * \varphi)(\psi \zeta) = ((\psi T) * \varphi) * (\psi \zeta)^\vee(0).$$

Par la proposition 16,  $((\psi T) * \varphi) * (\psi \zeta)^\vee(0) = (\psi T) * (\varphi * (\psi \zeta)^\vee)(0)$ . On en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) \zeta(x) dx = (\psi T) * (\varphi * (\psi \zeta)^\vee)(0) = (\psi T)(\check{\varphi} * (\psi \zeta)) = T(\psi(\check{\varphi} * (\psi \zeta))).$$

Ensuite,  $\check{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi\zeta \in L^1(\mathbb{R}^n)$  donc

$$\check{\varphi} * (\psi\zeta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(x-y)\psi(y)\zeta(y) dy.$$

Alors

$$\psi(x)(\check{\varphi} * (\psi\zeta))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\check{\varphi}(x-y)\psi(y)\zeta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i|x-y|^2}{2}} e^{\frac{-i|y|^2}{2}} e^{\frac{-i|x|^2}{2}} \zeta(y) dy = \widehat{\zeta}(x)$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\zeta(x) dx = T(\widehat{\zeta}) = \widehat{T}(\zeta).$$

□

On déduit de la proposition 22 que  $\widehat{\delta} = 1$  (la fonction constante égale à 1).

**Proposition 23** On a la formule  $\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$  lorsque

- 1)  $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,
- 2)  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,
- 3)  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

Proof : Le point 1) résulte du théorème de Fubini appliqué à la fonction sommable

$$(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto e^{-i\langle z, \xi \rangle} v(z) e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x)$$

qui donne (avec le changement de variable linéaire  $z \mapsto y = z + x$ )

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, \xi \rangle} v(z) e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dz dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y-x, \xi \rangle} v(y-x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(y-x) e^{-i\langle y, \xi \rangle} dx dy = \widehat{u * v}(\xi), \end{aligned}$$

ce qui prouve le point 1). Un calcul analogue montre que si  $v, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\check{v} * \widehat{\varphi} = \widehat{\check{v}\varphi}$ . On va en déduire le point 2) où  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . On a par la proposition 18

$$u * v(\widehat{\varphi}) = u(\check{v} * \widehat{\varphi}) = u(\widehat{\check{v}\varphi}) = \widehat{u}(\widehat{\check{v}\varphi}) = (\widehat{\check{v}\varphi})(\widehat{u}),$$

ce qui prouve le point 2).

Montrons enfin le point 3). Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$\widehat{u * v}(\varphi) = (u * v)(\widehat{\varphi}) = (u * v) * (\widehat{\varphi})^\vee(0) = u * (v * (\widehat{\varphi})^\vee)(0).$$

La dernière égalité provient de la remarque 2. On en déduit  $\widehat{u * v}(\varphi) = u(\check{v} * \widehat{\varphi})$ .

Par ailleurs,  $\widehat{u\check{v}}(\varphi) = \widehat{u}(\widehat{\check{v}\varphi})$  (en effet, noter que le produit  $\widehat{u\check{v}}$  a bien un sens, car par la proposition 22,  $\widehat{v}$  est  $C^\infty$  à croissance polynomiale). Donc  $\widehat{u\check{v}}(\varphi) = u(\widehat{\check{v}\varphi})$ . Il reste donc à voir que  $\widehat{\check{v}\varphi} = \check{v} * \widehat{\varphi}$ . La formule d'inversion permet d'affirmer que pour tout  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{F}((\widehat{\psi})^\vee) = (2\pi)^n \psi$ . On applique ceci à  $\psi(x) = \widehat{v}\varphi : \mathcal{F}(\widehat{\psi}^\vee) = (2\pi)^n \widehat{v}\varphi$ . Par ailleurs, le point 2) appliqué à  $v$  et  $(\widehat{\varphi})^\vee$  donne

$$\mathcal{F}(v * ((\widehat{\varphi})^\vee)) = \widehat{v}\mathcal{F}((\widehat{\varphi})^\vee) = (2\pi)^n \widehat{v}\varphi$$

de nouveau par la formule d'inversion appliquée à  $\varphi$ . En appliquant  $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} \check{\mathcal{F}}$ , on en déduit  $\widehat{\check{v}\varphi} = \check{v} * \widehat{\varphi}$  comme attendu.

□

**Proposition 24** Soient  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $\widehat{\varphi T} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{T} * \widehat{\varphi}$ .

Preuve : En appliquant successivement les opérateurs  $^\vee$  et  $\mathcal{F}$ , la formule d'inversion montre qu'il est équivalent de montrer que

$$(2\pi)^n \varphi T = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}((\widehat{T} * \widehat{\varphi})^\vee).$$

En utilisant que  $(\widehat{T} * \widehat{\varphi})^\vee = ((\widehat{T})^\vee) * ((\widehat{\varphi})^\vee)$  et le point 2) de la proposition précédente, on obtient

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}((\widehat{T} * \widehat{\varphi})^\vee) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}((\widehat{T})^\vee) \mathcal{F}((\widehat{\varphi})^\vee).$$

Par la formule d'inversion  $\mathcal{F}((\widehat{T})^\vee) = (2\pi)^n T$  et  $\mathcal{F}((\widehat{\varphi})^\vee) = (2\pi)^n \varphi$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

## 2.7 Exercices supplémentaires

**Exercice 55** Construire une suite  $(f_n)_{n \geq 0} \subset L^1(\mathbb{R})$  qui converge presque partout vers 0 et qui converge vers  $\delta_0$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Exercice 56** Montrer que  $x \in \mathbb{R} \mapsto \ln|x|$  définit un élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et calculer sa dérivée au sens des distributions.

**Exercice 57** Soit  $T \in C_c^1(\mathbb{R})$ . Justifier que  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  puis calculer sa dérivée au sens des distributions.

**Exercice 58** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On suppose que sa dérivée au sens des distributions  $T'$  est nulle. Montrer que  $T$  s'identifie à une fonction constante. Que dire si  $T'$  s'identifie à une fonction continue ? Et si  $T'$  s'identifie à une fonction  $L^1(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 59** Soit  $T$  la fonction caractéristique du demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ . Montrer que  $T$  s'identifie à un élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  puis calculer sa dérivée au sens des distributions.

**Exercice 60** Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que toutes les dérivées partielles de  $T$  au sens des distributions  $\partial_i T, i = 1, \dots, n$ , peuvent être représentées par des fonctions continues : il existe  $v_i \in C^0(\mathbb{R}^n)$  au plus polynomiale à l'infini telle que  $\partial_i T = T_{v_i}$ . Montrer que  $T$  peut être représenté par une fonction  $C^1(\mathbb{R}^n)$ . On pourra procéder comme suit :

1) Soit  $\chi_\varepsilon$  une approximation de l'identité à support compact, et  $T_\varepsilon := T * \chi_\varepsilon$ . Montrer que

$$T_\varepsilon(x) = T_\varepsilon(0) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i \partial_i T_\varepsilon(tx) dt.$$

On pose  $S_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i \partial_i T_\varepsilon(tx) dt$ .

2) Montrer successivement que  $\partial_i T_\varepsilon$  converge uniformément sur tout compact vers  $v_i$  et que  $S_\varepsilon$  converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue  $u$ .

3) Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  d'intégrale non nulle. Montrer que  $T_\varepsilon(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$  et en déduire que  $T_\varepsilon(0)$  a une limite. Montrer que  $T_\varepsilon$  converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue et conclure.

**Exercice 61** Soit  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}$  définie pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  par

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x) dx.$$

Montrer que  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ . Quel est le support de  $T$  ? Montrer que  $T$  ne peut s'identifier à une fonction de  $C^0(\mathbb{R}^2)$ . Enfin, calculer  $(\partial_1 - \partial_2)T$ .



## Chapitre 3

# Applications aux équations aux dérivées partielles

### 3.1 Passage en coordonnées sphériques et intégrales sur la sphère

L'intégration sur des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , ou plus généralement sur des variétés, n'est pas au programme de l'agrégation. On peut s'en passer pour définir le changement de variables en coordonnées sphériques qui, lui, est au programme.

#### 3.1.1 Le cas du plan

Commençons par  $\mathbb{R}^2$ . On définit  $\Phi : (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . C'est une application  $C^\infty$  sur son domaine. Comme le théorème de changement de variables dans une intégrale multiple exige des  $C^1$  difféomorphismes, on va être amené à restreindre  $\Phi$  à un sous-domaine. En effet, la différentielle de  $\Phi$  est

$$D\Phi(r, \theta) : (t, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto (t \cos \theta - r \mu \sin \theta, t \sin \theta + r \mu \cos \theta).$$

La jacobienne de  $\Phi$  dans la base canonique est donc

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Le jacobien est  $r$ . En particulier, le jacobien ne s'annule que pour  $r = 0$ . Le théorème d'inversion locale implique alors que pour tout  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  (noter qu'on a exclu  $r = 0$ ),  $\Phi$  est un  $C^1$  difféomorphisme d'un VOISINAGE  $V$  de  $(r, \theta)$  sur  $\Phi(V)$ . Un difféomorphisme local ne suffit pas pour appliquer le théorème de changement de variables. Un difféomorphisme global est nécessaire. On a donc naturellement recours au théorème d'inversion globale, qui exige non seulement que  $\Phi$  ait une différentielle inversible en tout point de son domaine, mais aussi que  $\Phi$  soit injective sur son domaine. On avait déjà restreint le domaine initial de  $\Phi$  à  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Il va falloir encore en enlever pour assurer l'injectivité (mais bien sûr, on veut en enlever le minimum, pour que le changement de variables en coordonnées polaires puisse s'appliquer sur un maximum de domaines).

Si  $(r, \theta), (r', \theta') \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  vérifient  $r \cos \theta = r' \cos \theta', r \sin \theta = r' \sin \theta'$ , alors en élevant au carré ces deux égalités et en utilisant  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ , on obtient  $r = r'$ . Ainsi,  $\cos \theta = \cos \theta'$  et  $\sin \theta = \sin \theta'$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta' = \theta + 2k\pi$ . On voit donc que si on restreint  $\Phi$  à  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ , l'application  $\Phi$  devient injective. On a enlevé 0 et  $\pi$  pour que le domaine de  $\Phi$  soit un ouvert : le théorème d'inversion (locale ou globale) s'applique à une fonction définie sur un ouvert.

En conclusion, on obtient que  $\Phi$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$  sur son image (dont on sait seulement pour l'instant que c'est un ouvert, parce que l'image d'un ouvert par un difféomorphisme, et même par un homéomorphisme, est un ouvert !).

Déterminons à présent l'image de  $\Phi : U := \Phi(]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[)$  (on en aura besoin pour appliquer le théorème de changement de variables). Un dessin nous suggère que  $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ . Montrons-le. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ . Posons  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $X := \frac{x}{r}, Y := \frac{y}{r}$  (noter que  $r \neq 0$  puisque  $(x, y) \neq (0, 0)$ ). Alors  $X^2 + Y^2 = 1$ . Donc il existe un unique  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $X = \cos \theta, Y = \sin \theta$ . Mais  $\theta \neq 0$  car  $(x, y) \notin \mathbb{R}^+ \times \{0\}$ . Ainsi, il existe bien  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$  tel que  $\Phi(r, \theta) = (x, y)$ . Donc  $U$  contient  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ . Réciproquement, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\}$  et s'il existe  $r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$  tels que  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , on prétend que  $r = 0$  ou bien  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ . En effet, on a forcément  $x^2 + y^2 = r^2$ . Si  $r = 0$  c'est terminé. Sinon, le fait que  $y = 0$  et  $x > 0$  implique bien que  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ . On a montré que  $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ .

En résumé,  $\Phi$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$  sur  $U$  de jacobien  $r$ . On peut donc l'utiliser comme changement de variable.

Pour tout  $R > 0$ , pour toute fonction  $f \in L^1(B(0, R))$ , on a (en utilisant le fait que  $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$  est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue bidimensionnelle)

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R)} f(x) dx &= \int_{B(0, R) \cap U} f(x) dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(B(0, R) \cap U)} f(\Phi(r, \theta)) r dr d\theta = \int_{r=0}^R r dr \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a aussi utilisé le théorème de Fubini (qu'il est légitime d'utiliser ici : pour le voir, il suffit de commencer par écrire ce qui précède avec  $|f|$  au lieu de  $f$  et d'utiliser le fait que  $f \in L^1(B(0, R))$ ). Parfois, on écrit

$$\int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = \int_{S^1} f(r\omega) d\omega,$$

où  $S^1$  désigne le cercle unité.

**Exercice 62** Pour quelles valeurs de  $a > 0$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{|x|^a}$  est-elle intégrable sur  $B(0, 1)$  ? sur  $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$  ? sur  $\mathbb{R}^2$  ?

Sur le cercle  $S^1(0, r)$  de centre 0 et de rayon  $r > 0$ , on écrit  $\int_{S^1(0, r)} f(\sigma) d\sigma = r \int_{S^1} f(r\omega) d\omega = r \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$ . On en déduit la formule de Stokes suivante :

**Proposition 25** Soient  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $R > 0$ ,

$$\int_{B(0, R)} g(x) \nabla f(x) dx = \int_{\partial B(0, R)} g(\sigma) f(\sigma) \nu_\sigma d\sigma - \int_{B(0, R)} f(x) \nabla g(x) dx,$$

où pour tout  $\sigma \in \partial B(0, R)$ ,  $\nu_\sigma = \frac{\sigma}{|\sigma|}$ .

Preuve : il s'agit d'une égalité entre intégrales vectorielles, définies coordonnées par coordonnées. Introduisons pour tout  $(r, \theta) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ , la base orthonormée  $(u_r, u_\theta)$  définie par

$$u_r := D\Phi(r, \theta)(1, 0) \quad , \quad u_\theta := \frac{1}{r} D\Phi(r, \theta)(0, 1).$$

Posons ensuite  $h(r, \theta) = f(\Phi(r, \theta))$  et de même  $k(r, \theta) = g(\Phi(r, \theta))$ . On a alors  $\partial_r h(r, \theta) = \langle \nabla f(\Phi(r, \theta)), u_r \rangle$  et  $\partial_\theta h(r, \theta) = r \langle \nabla f(\Phi(r, \theta)), u_\theta \rangle$ . On en déduit pour tout  $x \in U$

$$\nabla f(x) = \partial_r h(r, \theta) u_r + \frac{1}{r} \partial_\theta h(r, \theta) u_\theta.$$

Il est sous-entendu dans les lignes précédentes que  $u_r, u_\theta$  sont évalués au point  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Par passage en coordonnées polaires, il vient

$$\int_{B(0,R)} g(x) \nabla f(x) dx = \int_0^{2\pi} u_r d\theta \int_0^R r k(r, \theta) \partial_r h(r, \theta) dr + \int_0^R dr \int_0^{2\pi} k(r, \theta) \partial_\theta h(r, \theta) u_\theta d\theta.$$

Par intégrations par parties, on a

$$\int_0^R r k(r, \theta) \partial_r h(r, \theta) dr = R k(R, \theta) h(R, \theta) - \int_0^R (k(r, \theta) h(r, \theta) + r \partial_r k(r, \theta) h(r, \theta)) dr.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi} u_r d\theta \int_0^R r k(r, \theta) \partial_r h(r, \theta) dr = \int_{\partial B(0,R)} f(\sigma) g(\sigma) u_\sigma d\sigma - \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (k(r, \theta) h(r, \theta) + r \partial_r k(r, \theta) h(r, \theta)) u_r d\theta.$$

De même, par intégrations par parties, cette fois par rapport à  $\theta$ , on obtient

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} k(r, \theta) \partial_\theta h(r, \theta) u_\theta d\theta = - \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \partial_\theta k(r, \theta) h(r, \theta) u_\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R k(r, \theta) h(r, \theta) u_r dr.$$

(le terme de bord s'annule par  $2\pi$  périodicité et on a aussi utilisé que  $\partial_\theta u_\theta = -u_r$ ). En sommant ces deux quantités, on a finalement

$$\int_{B(0,R)} g(x) \nabla f(x) dx = \int_{\partial B(0,R)} f(\sigma) g(\sigma) u_\sigma d\sigma - \int_{B(0,R)} f(x) \nabla g(x) dx,$$

ce qui est le résultat attendu, puisque  $u_\sigma = \nu_\sigma$ .

### 3.1.2 Le cas de $\mathbb{R}^n$

Le passage en coordonnées sphériques dans  $\mathbb{R}^n$  est une généralisation de ce qui précède. On définit cette fois-ci l'application  $\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (x_1, \dots, x_n)$  par

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Cette application est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$  mais là encore, on va déterminer le domaine sur lequel restreindre  $\Phi$  pour que cela devienne un  $C^\infty$  difféomorphisme. On commence par la matrice jacobienne de

$\Phi$  dans la base canonique

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -r \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & r \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} & r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-1} & r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-1} \\ \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} & r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} & r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \\ \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dots & -r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\ \dots & r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Notons  $\Delta_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  le déterminant de cette matrice, c'est-à-dire le jacobien de  $\Phi$ . On commence par factoriser les  $n - 1$  dernières colonnes par  $r$  :  $\Delta_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \Delta_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ . On va calculer le déterminant  $\Delta_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  en le développant selon la première ligne. Noter que seuls les deux premiers coefficients de cette première ligne, à savoir  $\cos \theta_1$  et  $-\sin \theta_1$  sont non nuls. Dans le mineur  $A_{n-1}$  correspondant à  $\cos \theta_1$  dans  $\Delta_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ , on factorise la première colonne par  $\cos \theta_1$  et les  $n - 2$  dernières par  $\sin \theta_1$ . On obtient  $A_{n-1} = \cos \theta_1 \sin^{n-2} \theta_1 \Delta_{n-1}(1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ . Dans le mineur  $B_{n-1}$  correspondant à  $-\sin \theta_1$  dans  $\Delta_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ , on factorise la première colonne par  $\sin \theta_1$  et les  $n - 2$  dernières par  $\sin \theta_1$ . On obtient  $B_{n-1} = \sin \theta_1 \sin^{n-2} \theta_1 \Delta_{n-1}(1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ . Finalement,

$$\begin{aligned} \Delta_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r^{n-1} \Delta_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} (\cos \theta_1 A_{n-1} + \sin \theta_1 B_{n-1}) \\ &= r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \Delta_{n-1}(1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}). \end{aligned}$$

On en déduit par une récurrence immédiate

$$\Delta_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

On restreint  $\Phi$  au domaine  $\Delta := ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times \cdots \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Alors la différentielle de  $\Phi$  est inversible en tout point de  $\Delta$ . Pour montrer que  $\Phi$  est un difféomorphisme global de  $\Delta$  sur  $\Phi(\Delta)$ , il suffit donc de montrer par le théorème d'inversion globale que  $\Phi$  est injective sur  $\Delta$ .

Commençons par observer que si  $x_1, \dots, x_n$  sont définis par (3.1), on a

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2. \quad (3.2)$$

Cette identité s'obtient par récurrence sur  $n$ .

Maintenant, soient  $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}), (r', \theta'_1, \dots, \theta'_{n-1}) \in \Delta$  tels que

$$(x_1, \dots, x_n) := \Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \Phi(r', \theta'_1, \dots, \theta'_{n-1}).$$

Par (3.2), on obtient  $r = r'$ . On peut donc supposer  $r = r' = 1$ . Ensuite, on démontre par récurrence sur  $1 \leq i \leq n - 2$  que  $\theta_i = \theta'_i$ . On a  $x_1 = \cos \theta_1 = \cos \theta'_1$ . Comme le cosinus définit une bijection de  $]0, \pi[$  sur  $] -1, 1[$ , on a bien  $\theta_1 = \theta'_1$ . Supposons que  $\theta_j = \theta'_j$  pour tout  $1 \leq j \leq i$  avec  $i \leq n - 3$  et montrons que  $\theta_{i+1} = \theta'_{i+1}$ . Comme  $\sin \theta_j > 0$  pour tout  $1 \leq j \leq i$ , l'égalité  $x_{i+1} = \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_i \cos \theta_{i+1} = \sin \theta'_1 \cdots \sin \theta'_i \cos \theta'_{i+1}$  implique que  $\theta_{i+1} = \theta'_{i+1}$ , toujours par injectivité de  $\cos$  sur  $]0, \pi[$ . On a donc montré que  $\theta_i = \theta'_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n - 2$ . On a donc

$$\frac{x_{n-1}}{\sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}} = \cos \theta_{n-1} = \cos \theta'_{n-1} \quad , \quad \frac{x_n}{\sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}} = \sin \theta_{n-1} = \sin \theta'_{n-1}$$

d'où il suit que  $\theta_{n-1} = \theta'_{n-1}$  (remarquer qu'ici on avait besoin des deux équations, car  $\cos$  n'est plus injectif sur  $]0, 2\pi[$  contrairement à  $(\cos, \sin)$ ). Ainsi  $\Phi$  est injective.

On cherche à présent l'image de  $\Phi : U := \Phi(\Delta)$ . Un dessin pour  $n = 3$  suggère que  $U = \mathbb{R}^n \setminus F$  avec  $F := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_n = 0, x_{n-1} \geq 0\}$ . D'abord, il est facile de voir qu'aucun point de  $F$  n'est dans l'image de  $\Phi$ . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  donné par les équations (3.1) qui appartienne à  $F$ . Comme  $x_n = 0$  et  $\sin \theta_j > 0$  pour  $1 \leq j \leq n-2$ , on a forcément  $\theta_{n-1} = \pi$  (seule valeur de  $]0, 2\pi[$  où le sinus s'annule). Mais alors  $x_{n-1} = -r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} < 0$ , ce qui apporte la contradiction désirée. Réciproquement, soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus F$  et montrons que  $x \in \Phi(\Delta)$ . On pose  $r := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ . Comme  $x \neq 0$ , on a  $r > 0$ . On va définir  $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$  par récurrence de sorte que les  $n-2$  premières lignes de (3.1) soient vérifiées.

Comme  $|x_1| < r$  (car  $x_n \neq 0$  ou  $x_{n-1} < 0$ ), il existe  $\theta_1 \in ]0, \pi[$  tel que  $\frac{x_1}{r} = \cos \theta_1$ . Ici, on a utilisé que  $\cos$  est surjective de  $]0, \pi[$  sur  $] -1, 1[$ . Supposons construits  $\theta_j$  pour  $1 \leq j \leq i$  avec  $i \leq n-3$  de sorte que les  $i$  premières lignes de (3.1) soient vérifiées. En utilisant l'analogie de (3.2) avec  $i$  au lieu de  $n$ , on voit que

$$x_1^2 + \cdots + x_i^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_i = r^2.$$

Par ailleurs,  $x_1^2 + \cdots + x_{i+1}^2 < r^2$  (car  $x_{n-1}$  ou  $x_n$  sont non nuls). Donc  $x_{i+1}^2 < r^2 \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_i$ . On en déduit qu'il existe  $\theta_{i+1} \in ]0, \pi[$  tel que

$$\frac{x_{i+1}}{r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{i+1}} = \cos \theta_{i+1}.$$

On a construit ainsi par récurrence  $\theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in ]0, \pi[$  tels que les  $n-2$  premières lignes de (3.1) soient vérifiées. Posons enfin

$$y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}}, \quad y_n = \frac{x_n}{r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}}.$$

L'analogie de (3.2) pour  $n-2$  donne  $x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{n-2} = r^2$  d'où

$$y_{n-1}^2 + y_n^2 = \frac{r^2 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2)}{r^2 \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{n-2}} = 1.$$

Donc il existe  $\theta_{n-1} \in [0, 2\pi[$  tel que  $y_{n-1} = \cos \theta_{n-1}, y_n = \sin \theta_{n-1}$ . Enfin, comme  $y_{n-1} \leq 0$  ou  $y_n \neq 0$ , on peut écarter l'éventualité  $\theta_{n-1} = 0$ . Ceci conclut la preuve de  $U = \Phi(\Delta)$ .

En résumé,  $\Phi$  est un  $C^1$  difféomorphisme du domaine  $\Delta = ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times \cdots \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  sur  $U = \mathbb{R}^n \setminus F$  avec  $F = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_n = 0, x_{n-1} \geq 0\}$ . Le jacobien de  $\Phi$  en  $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  est  $r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}$ . On peut donc utiliser  $\Phi$  comme changement de variable.

Pour tout  $R > 0$ , pour toute fonction  $f \in L^1(B(0, R))$ , on a (en utilisant le fait que  $F$  est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ )

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R)} f(x) dx &= \int_{B(0, R) \cap U} f(x) dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(B(0, R) \cap U)} f(\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})) r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \\ &= \int_{r=0}^R r^{n-1} dr \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \cdots \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} f(\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})). \end{aligned}$$

Souvent, on écrit

$$\int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \cdots \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} f(\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})) = \int_{S^{n-1}} f(r \cdot \omega) d\omega,$$

où  $S^{n-1}$  désigne la sphère unité dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit parfois que

$$d\omega = \sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$$

est l'élément de volume sur la sphère. Plus généralement, sur la sphère  $S^{n-1}(0, r)$  de rayon  $r$ , on écrit

$$\int_{S^{n-1}(0,r)} f(\sigma) d\sigma = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(r \cdot \omega) d\omega.$$

**Exercice 63** Pour quelles valeurs de  $a > 0$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{|x|^a}$  est-elle intégrable sur  $B(0, 1)$  ? sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$  ? sur  $\mathbb{R}^n$  ?

On peut montrer comme dans le cas de la dimension 2 la formule de Stokes suivante : si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions  $C^1$ , on a pour tout  $R > 0$

$$\int_{B(0,R)} f(x) \nabla g(x) dx = \int_{\partial B(0,R)} g(\sigma) f(\sigma) \nu_\sigma d\sigma - \int_{B(0,R)} g(x) \nabla f(x) dx$$

où  $\nu$  est la normale extérieure au domaine, en l'occurrence, pour tout  $\sigma \in \partial B(0, R)$ , la normale  $\nu_\sigma$  en  $\sigma$  est  $\frac{\sigma}{|\sigma|}$ .

**Exercice 64** Montrer la formule de Stokes pour  $n = 3$ .

## 3.2 Solutions fondamentales

On ne considère ici que des équations aux dérivées partielles à coefficients constants et définies sur tout  $\mathbb{R}^n$ . Elles sont donc de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha u = f, \quad (3.3)$$

où les données sont :

- le second membre  $f$  est une fonction ou une distribution tempérée définie sur  $\mathbb{R}^n$ ,
- les coefficients  $a_\alpha$  sont des éléments de  $\mathbb{C}$ .

L'inconnue est  $u$ . Le premier problème est de savoir ce qu'on entend par *solution* de cette équation. C'est une question qui traverse l'histoire des mathématiques : D'Alembert résolvait l'équation des ondes, Laplace l'équation qui porte son nom, ou Fourier l'équation de la chaleur, alors qu'ils ne connaissaient pas la notion de distribution tempérée !

Aujourd'hui, face à une EDP, on procède généralement en deux temps. On commence par mettre la main sur une solution, où ce dernier mot est à entendre en un sens éventuellement très faible. Pour nous, cela signifie qu'on cherche  $u$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et les dérivées partielles dans l'équation sont à comprendre au sens des distributions. Une fois qu'on a trouvé une solution, on étudie ses propriétés, et il arrive parfois qu'on parvienne à montrer qu'elle est  $C^\infty$ . Dans ce cas, cette solution faible sera aussi une solution forte : elle vérifiera l'équation en un sens classique, avec des dérivées à comprendre de la manière habituelle (vous savez en effet que pour une fonction  $C^\infty$ , les dérivées au sens des distributions coïncident avec les dérivées au sens classique).

**Définition 28 (Solution fondamentale)** On dit que  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est une solution fondamentale de (3.3) si

$$\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha E = \delta. \quad (3.4)$$

L'intérêt d'une solution fondamentale est fondamental ! En effet, si on arrive à trouver une solution fondamentale  $E$ , alors on saura résoudre l'équation pour tout  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Considérons  $u = E * f$ . Alors  $u$  est bien défini comme élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On a de plus

$$\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha u = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha (E * f) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (\partial^\alpha E) * f = \left( \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha E \right) * f = \delta * f = f.$$

Ainsi,  $u$  sera une solution de (3.3) dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . De surcroît, si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ce qui précède reste vrai et on sait de plus que  $u = E * f$  s'identifie à une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Ce sera donc automatiquement une solution classique de (3.3).

On peut montrer (c'est un résultat assez difficile) que (3.3) admet toujours une solution dans l'espace des distributions (un espace plus gros que l'espace des distributions tempérées). Pour mettre la main sur une solution fondamentale qui soit une distribution tempérée (lorsque c'est possible), la transformée de Fourier est un outil extrêmement utile.

Supposons que (3.4) admette une solution dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On prend alors la transformée de Fourier dans les deux membres. Il vient par linéarité

$$\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{E}(\xi) = 1.$$

Posons  $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha$ . On a donc  $P(\xi) \widehat{E}(\xi) = 1$ . Si la fonction  $\xi \mapsto \frac{1}{P(\xi)}$  s'identifie à une distribution tempérée  $T$ , alors on peut poser  $E := \mathcal{F}^{-1}T$  pour obtenir une solution fondamentale.

**Exercice 65** Montrer que l'EDP  $-\Delta u + \lambda u = f$ , où  $\lambda > 0$  et  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , admet toujours une solution  $u$  au sens des distributions tempérées. Que dire si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ? Et si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ?

**Exercice 66 (Equation de Laplace)** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère  $E(x) = \frac{1}{|x|}$ . Montrer que  $E$  est une distribution tempérée puis calculer  $\Delta E$  (utiliser la formule de Stokes). En déduire que l'équation  $\Delta u = f$  admet une solution dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  pour  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 67 (Equation des ondes)** Dans  $\mathbb{R}^2$ , on pose

$$E(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } t - |x| > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  puis calculer  $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E$ .

**Exercice 68 (Equation de la chaleur)** Dans  $\mathbb{R}^2$ , on pose

$$E(x, t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside. Montrer que  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  puis calculer  $(\partial_t - \partial_{xx}^2)E$ .

**Exercice 69 (Régularité)** On suppose qu'il existe  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  solution de (3.3) telle que  $E$  s'identifie à une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

- 1) Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Calculer  $\partial^\alpha(\varphi E)$  (au sens des distributions).
- 2) On suppose que  $\varphi = 1$  sur  $B^n(0, 1)$ . Montrer que

$$\psi := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha(\varphi E) - \delta$$

s'identifie à un élément de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

- 3) En déduire que si  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est telle que  $Pu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors  $u$  est elle-même une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
- 4) Dans  $\mathbb{R}^3$ , on suppose que  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  est solution de  $\Delta u = 0$  au sens des distributions tempérées. Montrer que  $u$  est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ .



# Bibliographie

- [1] J.-M. Bony, Cours d'analyse, Editions de l'école polytechnique.
- [2] W. Rudin, Analyse fonctionnelle.
- [3] C. Zuily et H. Queffelec, Analyse pour l'agrégation, Dunod.
- [4] C. Zuily, Distributions et équations aux dérivées partielles. Exercices corrigés, Hermann.