Chapitre 1

Introduction

Le polycopié qui commence ici est loin d'être un produit original (même si les erreurs qu'il contient sont de la responsabilité exclusive de ses auteurs). Il s'inspire du très bon livre de Liret et Martinais, Analyse $1^{ère}$ année (en particulier, beaucoup d'exercices sont issus de cet ouvrage), disponible chez Dunod. Plusieurs idées sont également tirées des polycopiés de Thierry Gallouet, Petru Mironescu et Alain Yger, disponibles sur leur page web respective.

On dessine souvent l'ensemble des nombres réels sous forme d'une droite. D'ailleurs, les éléments de $\mathbb{R}$, les nombres réels, sont souvent appelés des *points* de $\mathbb{R}$. Quand on y songe, cet ensemble des réels est bien mystérieux. Citons l'un des paradoxes de Zénon[1]. Imaginons une flèche lancée en direction d'une cible. Alors Zénon prétend que la flèche n'atteindra jamais sa cible. En effet, supposons pour fixer les idées que la flèche soit tirée à 10 m de la cible. Il faudra bien d'abord que la flèche atteigne la moitié de la distance qui la sépare de la cible. Il lui reste alors une distance de $10.\frac{1}{2}$ m pour atteindre la cible. Mais la flèche doit d'abord parcourir la moitié de la trajectoire restante, et lorsqu'elle y parvient, une distance de $(10.\frac{1}{2}).\frac{1}{2} = 10.\frac{1}{2^2}$ m la sépare encore de la cible. On peut reproduire indéfiniment cette remarque, et à l'étape n, la distance restante à parcourir est $10.\frac{1}{2^n}$ m. Vous savez déjà montrer que la suite $(\frac{10}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il n'empêche que chaque terme de cette suite est strictement positif. C'est donc bien que la distance qui sépare la flèche de la cible reste indéfiniment strictement positive : la flèche n'atteint jamais sa cible ! Peut-être que ce cours ne sera pas inutile pour éclairer ce paradoxe...

Au premier semestre, vous avez rappelé ce qu'était une suite de réels, défini précisément la notion de limite d'une suite et établi des résultats importants sur les limites de suites. On en rappelle maintenant les principaux que nous utiliserons librement dans la suite. Lorsqu'une suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on dira qu'elle *converge* (mais vous devez être conscients que dans certains ouvrages, on dit qu'elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Proposition 1 (Unicité de la limite d'une suite convergente) *Une suite a au plus une limite.*

Proposition 2 (Passage à la limite dans une inégalité) *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites finies. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \le v_n$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \le \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Cette proposition a plusieurs variantes. Par exemple,

Proposition 3 *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \le v_n$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*

Le célèbre théorème des gendarmes :

1. philosophe grec du $5^{ème}$ siècle avant J.C. resté célèbre pour ses paradoxes sur le mouvement

Proposition 4 *Soient trois suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_n \leq v_n \leq w_n$ *et que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendent vers la même limite l. Alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers l.*

Proposition 5 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante.*

1. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, alors elle converge.*
2. *Sinon, elle converge vers* $+\infty$.

Proposition 6 (limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient) *Soient deux suites convergentes* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers des limites finies, notées* l *et* m *respectivement. Alors*

1. *La limite de la suite* $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existe et vaut* $l + m$.
2. *La limite de la suite* $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existe et vaut* lm.
3. *Si* $m \neq 0$ *et que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, *la limite de la suite* $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *existe et vaut* $\frac{l}{m}$.

Proposition 7 *On considère une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dont aucun terme n'est nul.*

1. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *alors* $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $\frac{1}{l}$.
2. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes strictement positifs et tend vers* 0, *alors* $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
3. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$, *alors* $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0.

Chapitre 2

Limite, continuité, dérivabilité : l'approche par les suites

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de limite, continuité et dérivabilité, en nous appuyant sur la notion de limite de suite rappelée dans le chapitre précédent.

2.1 Fonctions

On rappelle qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ ou encore de la forme $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,+\infty[$, où $a,b\in\mathbb{R}$. Par exemple, $[a,b]$ est l'ensemble des nombres réels qui sont supérieurs ou égaux à a ET inférieurs ou égaux à b.

Les extrémités des intervalles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ sont a et b. Les extrémités des intervalles $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$ sont a et $+\infty$. Et vous devinez celles de $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$!

On s'intéresse dans tout ce cours à des fonctions f définies sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction f définie sur D fait correspondre à tout élément x de D un nombre réel noté $f(x)$ (l'image de x par f). L'ensemble D sur lequel une fonction f est définie est appelé le domaine de définition de f. On ne considèrera que le cas où D est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles disjoints deux à deux (ce qui signifie que chaque fois qu'on prend deux intervalles dans cette réunion, leur intersection est vide).

L'image d'une fonction $f : D\to\mathbb{R}$ est l'ensemble des images d'éléments de D par f. Il est noté $f(D)$. On a donc

$$f(D) := \{y\in\mathbb{R} | \exists\, x\in D \text{ tel que } y=f(x)\}.$$

Dans toute la suite du cours, on utilisera les conventions suivantes, qui permettent de simplifier les énoncés.

1. Lorsqu'on se donne une fonction f définie sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$, on sous-entend que cet intervalle n'est ni vide ni réduit à un point.
2. Lorsqu'on se donne une fonction f définie sur une partie $D\subset\mathbb{R}$, on sous-entend que D est un intervalle (ni vide ni réduit à un point) ou une réunion finie de tels intervalles deux à deux disjoints.
3. Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, on notera $[a,b]$ l'ensemble des réels compris au sens large entre a et b même si $a>b$. On adoptera une convention analogue pour les autres types d'intervalle.

Soit $D\subset\mathbb{R}$. Lorsque D est un intervalle, on a déjà vu ce qu'était une extrémité de D. Plus généralement, lorsque D est une réunion d'intervalles disjoints deux à deux, on dit que a est une extrémité de D si a est une extrémité de l'un des intervalles qui composent cette réunion.

Exercice 1 *Donner un exemple D de réunion finie d'intervalles disjoints pour lequel une extrémité de D est une extrémité commune à deux intervalles de cette réunion.*

Exercice 2 *Soit $D \subset \mathbb{R}$ une réunion finie d'intervalles disjoints deux à deux.*

1. *Soit $a \in D$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenue dans D qui tend vers a.*
2. *Montrer que c'est encore le cas si a est une extrémité de D.*
3. *Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de D qui converge. Montrer que la limite est un point ou une extrémité de D (on pourra commencer par extraire une sous-suite qui est entièrement contenue dans l'un des intervalles composant D).*

2.2 Limite d'une fonction

On considére une fonction f définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

Définition 1 (Limite finie) *Soient a un point ou une extrémité de D et $l \in \mathbb{R}$. On dit que l est une limite de f en a si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D tendant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.*

Exercice 3 *Montrer qu'alors la fonction $x \mapsto f(x) - l$ tend vers 0 en a.*

On a bien sûr une définition analogue pour des limites infinies :

Définition 2 (Limite infinie) *Soit a un point ou une extrémité de D. On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D tendant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

On peut se demander si une telle limite est unique. On vous a déjà fait le même coup pour les suites : vous savez qu'une suite convergente a une seule limite.

Proposition 8 (Unicité de la limite) *Soit a un point ou une extrémité de D. Alors f a au plus une limite en a.*

Preuve : Supposons par l'absurde que f admettent en a deux limites distinctes l et l' (qui sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ une suite qui tend vers a. D'après la définition de la limite d'une fonction en un point, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend à la fois vers l et vers l'. Cela contredit l'unicité de la limite d'une suite.

Conclusion : il existe au plus un réel l qui soit limite de f en a.

□

Vous connaissez la notation $l = \lim_{x\to a} f(x)$. Attention, chaque fois que vous écrivez une telle égalité, demandez-vous d'abord si la limite existe (ce qui nécessite parfois une preuve !)

Noter que si $a \in D$, on peut considérer la suite constante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont égaux à a. Alors si f a une limite en a, cette limite est nécessairement $f(a)$. Dans ce cas, on dit que f est *continue* en a. Si f a une limite en tous les points de D, on dit que f est continue sur D.

Exercice 4 *Existence et valeur éventuelle des limites de $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x}$ en 0 et $+\infty$.*

Les limites se comportent bien avec l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. En voici un premier exemple, qui est l'analogue du passage à la limite dans les inégalités de suites :

Proposition 9 *Soient f et g deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de D. On suppose que $f \leq g$ (ce qui veut dire : pour tout $x \in D$, on a $f(x) \leq g(x)$) et aussi que f et g admettent des limites finies en a. Alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ une suite qui tend vers a. On considère les suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Comme f et g ont des limites, ce sont des suites convergentes et $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$, $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{n \to +\infty} g(x_n)$. Comme $f \leq g$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq g(x_n)$.

Par le théorème de passage à la limite dans les inégalités de suites : on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq \lim_{n \to +\infty} g(x_n)$.

Conclusion : $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

□

On a aussi pour les fonctions l'analogue du théorème des gendarmes que vous connaissez pour les suites :

Proposition 10 *Soient f, g et h trois fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de D. On suppose que $f \leq g \leq h$ et aussi que f et h admettent des limites en a qui sont égales à un nombre $l \in \mathbb{R}$. Alors g admet une limite en a qui vaut l.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in N}$ une suite de A qui tend vers a. Montrons que $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l. Comme $f \leq g \leq h$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$. Comme f a une limite en a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite l. De même, la suite $(h(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l. On applique alors le théorème des gendarmes aux trois suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(h(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ pour conclure : $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l.

Conclusion : La limite de g en a existe et vaut l.

□

Exercice 5 *La limite en 0 des fonctions suivantes existent-elles et si oui, que vaut-elle ?*

1. $x \in]0, +\infty[\mapsto \sin \frac{1}{x}$,
2. $x \in]0, +\infty[\mapsto x \sin \frac{1}{x}$

Exercice 6 *On considère deux fonctions $f, g : D \to R$. Soit a un point ou une extrémité de D. On suppose que $f \leq g$ et que f tend vers $+\infty$ en a. Montrer que g tend vers $+\infty$ en a.*

Exercice 7 *On considère deux fonctions $f, g : D \to R$. Soit a un point ou une extrémité de D. On suppose que f est bornée et que g tend vers 0 en a. Montrer que la fonction fg tend vers 0 en a.*

2.3 Fonctions dérivables

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ (les intervalles ouverts sont ceux de la forme $]a, b[,]a, +\infty[,] - \infty, b[,] - \infty, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).

Définition 3 *Soient $x_0 \in I$. Alors on dit que f est dérivable en x_0 s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 et telle que pour tout $x \in I$ on a*

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x). \tag{2.1}$$

Proposition 11 *Si f est dérivable en x_0, alors le nombre a qui vérifie (2.1) est unique. On l'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et on le note $f'(x_0)$.*

Preuve :

$\square$

Lorsque f est dérivable en tout point de I, on peut considérer la fonction $x \in I \mapsto f'(x)$. C'est la (fonction) *dérivée* de f.

Etant donné $x_0 \in I$, on peut considérer la fonction

$$\phi : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Elle est définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Noter que $I \setminus \{x_0\}$ est la réunion de deux intervalles disjoints et que x_0 est une extrémité de $I \setminus \{x_0\}$. On peut donc considérer la limite de ϕ en x_0.

Proposition 12 *Si la fonction f est dérivable en x_0, alors la fonction $\phi : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0.*

Preuve :

$\square$

La réciproque de la proposition précédente est vraie. On la démontrera ultérieurement.

Proposition 13 *Si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.*

Preuve :

$\square$

Exercice 8 *Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur domaine de définition et calculer leur dérivée :*

1. $x \mapsto 1$,
2. $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2.4 Opérations sur les limites et les fonctions continues ou dérivables

On se donne deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$. On sait alors construire une nouvelle fonction notée $f + g$ qui à tout élément $x \in D$ fait correspondre $f(x) + g(x)$. On définit de même les fonctions fg et (lorsque g ne s'annule pas sur D) $\frac{f}{g}$.

Soit maintenant a un point ou une extrémité de D. On suppose que la limite de f en a existe et vaut $l \in \mathbb{R}$; de même, on suppose que la limite de g en a existe et vaut $m \in \mathbb{R}$.

Proposition 14 (limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient)

1. *La limite de la fonction $f + g$ en a existe et vaut $l + m$.*
2. *La limite de la fonction fg en a existe et vaut lm.*
3. *Si $m \neq 0$ et que g ne s'annule pas sur D, la limite de la fonction $\frac{f}{g}$ en a existe et vaut $\frac{l}{m}$.*

Preuve : On commence par montrer 1). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D qui tend vers a. Montrons que la suite $((f+g)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l+m$. Comme f et g convergent, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, la première vers l, la seconde vers m. Par le théorème de la limite d'une somme de suites appliqué aux deux suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, on conclut que la suite $((f+g)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l + m$.

Conclusion : La limite de la fonction $f + g$ en a existe et vaut $l + m$.

Les points 2) et 3) se montrent de manière analogue, simplement en remplaçant le théorème de la limite d'une somme de suites par le théorème de la limite d'un produit de suites ou d'un quotient de suites.

$\square$

On peut donner des résultats analogues lorsqu'on remplace l ou m par $+\infty$ ou $-\infty$. Vous connaissez et pouvez démontrer ces résultats ! On les utilisera dans la suite.

Exercice 9 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto x^n$ a une limite en $+\infty$ et calculer cette limite. Que dire maintenant si n est un entier strictement négatif ?*

Dans la proposition suivante, on introduit une nouvelle fonction $h : E \to \mathbb{R}$ et on suppose que E contient $f(D)$. Cela permet de définir la fonction $h \circ f$ qui à tout élément $x \in D$ associe le nombre $h(f(x))$ (qui a bien un sens puisque $f(x) \in E$).

Proposition 15 (Composition de limites) *On suppose que f admet une limite notée l en a. Alors l est un point ou une extrémité de E. Si de plus h admet une limite notée m en l, alors la fonction $h \circ f$ admet une limite en a qui vaut m.*

Preuve : Montrons d'abord que l est un point ou une extrémité de E. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans D qui tend vers a. Comme f tend vers l en a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Comme $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans $f(D)$, l est donc la limite d'une suite de points de $f(D) \subset E$. Donc l est un point ou une extrémité de E (par l'exercice 2).

Montrons maintenant que la fonction $h \circ f$ admet une limite en a qui vaut m. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de D qui tend vers a. Comme f tend vers l en a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Comme h tend vers m en l, la suite $(h(f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers m.

Conclusion : $h \circ f$ admet une limite en a qui vaut m.

$\square$

On déduit des théorèmes précédents que la somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) ou la composée (lorsqu'elle est définie) de fonctions continues est continue.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposition 16

1. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f + g$ est dérivable en x_0.*
2. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors fg est dérivable en x_0.*

Preuve : Comme f et g sont dérivables en x_0, il existe ϵ_1, ϵ_2 deux fonctions définies sur I, qui tendent vers 0 en x_0 telles que pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon_1(x), g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\epsilon_2(x).$$

Montrons d'abord que $f + g$ est dérivable en x_0. On a

$$(f + g)(x) = (f + g)(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + g'(x_0)) + (x - x_0)(\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)).$$

La fonction $\epsilon_3(x) := \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)$ tend vers 0 en x_0 (comme somme de fonctions qui tendent vers 0 en x_0). Donc $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Montrons à présent que fg est dérivable en x_0. On a

$$(fg)(x) = (fg)(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)) + (x - x_0)\epsilon_4(x)$$

avec

$$\epsilon_4(x) = \epsilon_1(x)g(x_0) + \epsilon_2(x)f(x_0) + (x - x_0)(\epsilon_1(x)g'(x_0) + \epsilon_2(x)f'(x_0)).$$

La fonction ϵ_4 tend vers 0 en x_0 comme somme et produits de fonctions qui tendent vers 0 en x_0.

On en déduit que fg est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$.

$\square$

On considère une autre fonction $h : J \to \mathbb{R}$ où J est un intervalle qui contient $f(I)$. En particulier, la fonction $h \circ f$ est bien définie.

Proposition 17 *Soit $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 et que h est dérivable en $f(x_0)$. Alors $h \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0))f'(x_0).$$

Preuve : Comme f est dérivable en x_0, il existe $\epsilon_1 : I\backslash \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 telle que pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon_1(x). \tag{2.2}$$

Comme h est dérivable en $f(x_0)$, il existe $\epsilon_2 : J \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $f(x_0)$ telle que pour tout $y \in J$ on a

$$h(y) = h(f(x_0)) + (y - f(x_0))h'(f(x_0)) + (y - f(x_0))\epsilon_2(y).$$

Soit $x \in I$. En insérant $y = f(x)$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$h(f(x)) = h(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))h'(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))\epsilon_2(f(x)).$$

Puis en utilisant l'expression de $f(x)$ donnée par (2.2), on obtient

$$h(f(x)) = h(f(x_0)) + (x - x_0)h'(f(x_0))f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon_3(x),$$

avec

$$\epsilon_3(x) = h'(f(x_0))\epsilon_1(x) + f'(x_0)\epsilon_2(f(x)) + \epsilon_1(x)\epsilon_2(f(x)).$$

Par théorème sur les composées, produits et sommes de limites, ϵ_3 tend vers 0 en x_0. On conclut par la proposition 3.

□

Corollaire 1 *On suppose que f et g sont dérivables en x_0 et que g ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Preuve : On montre d'abord que la fonction $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est dérivable en x_0 de nombre dérivée $-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$. Comme g est dérivable en x_0, il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 telle que pour tout $x \in I$ on a

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x). \tag{2.3}$$

Alors pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{(x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)}{g(x)g(x_0)}.$$

Donc

$$\frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = -\frac{g'(x_0) + \epsilon(x)}{g(x)g(x_0)}.$$

Le numérateur tend vers $-g'(x_0)$ en x_0 tandis que le dénominateur tend vers $g(x_0)^2$. On déduit du théorème sur les limites de quotient que la fonction $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est dérivable en x_0 de nombre dérivée $-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

En utilisant ensuite le théorème sur le produit de fonctions dérivables, on obtient que $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 de dérivée

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

□

Exercice 10 *1. Soit n un entier ≥ 2 et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

En déduire que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en a et calculer sa dérivée.

2. *Même question lorsque n est un entier ≤ -2.*

2.5 Exercices supplémantaires

On admet toutes les propriétés, notamment d'existence de limites et de dérivabilité, des fonctions usuelles : $\cos, \sin, \exp, \ln, x^a, a^x \dots$

Exercice 11 *On considère la fonction : $x \mapsto \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.*

1. *Quel est son domaine de définition ?*
2. *Cette fonction admet-elle des limites aux extrémités de son domaine de définition ? Si oui, que valent ses limites ?*
3. *Cette fonction est-elle dérivable ?*

Exercice 12 *Soient $n, p \in \mathbb{N}_*$. On considère les fonctions polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n b_p > 0$. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$. En déduire que $+\infty$ est une extrémité de D. Discuter selon n et p la limite de f en $+\infty$.*

Exercice 13 *Montrer que les fonctions suivantes ont une limite en $+\infty$ et calculer ces limites.*

1. $x \mapsto \sqrt{x} - x$,
2. $x \mapsto \exp(\sqrt{x} - x)$,
3. $x \mapsto 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1)$,
4. $x \mapsto \frac{1+\exp x}{1-\exp x}$,
5. $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$,
6. $x \mapsto \sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2-a^2}$, *où a est un réel strictement positif fixé,*
7. $x \mapsto x(\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2-a^2})$, *où a est un réel strictement positif fixé,*
8. $x \mapsto \frac{\sqrt{2x^3+1}}{\sqrt{x^3+2}}$,
9. $x \mapsto \tan \frac{(\pi+x)(1-\pi x)}{(1-2x)^2}$,
10. $x \mapsto \sqrt{x} + \sin x$.

Exercice 14 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x) - x$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - x| \leq M$. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a une limite en $+\infty$.*

Exercice 15 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x^3 + ax + b} - x\sqrt{x}$. Calculer la limite de f en $+\infty$.*

Exercice 16 *Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^3+8}{x+2}$ a une limite finie en -2.*

Exercice 17 *Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et telle que*

1. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$,
2. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \pi$,

3. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -\infty$,
4. $x \mapsto f(x) - x$ *n'ait pas de limite en* $+\infty$.

Exercice 18 *La fonction* $x \mapsto x\sin x$ *a-t'elle une limite en* $+\infty$ *?*

Exercice 19 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe* $T > 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $f(x+T) = f(x)$ *(on dit alors que* f *est périodique de période* T*). On suppose de plus que* f *admet une limite finie en* $+\infty$. *Montrer que* f *est une fonction constante.*

Exercice 20 *Soit* f *une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et calculer leur dérivée :*

$$x \mapsto \exp f(x) \quad ; \quad x \mapsto (f(\sin x))^2 \quad ; \quad x \mapsto (f(x))^3.$$

Exercice 21

1. *Soient* n *et* p *des entiers positifs. Calculer la limite de* $x \mapsto \frac{x^n - x^p}{x-1}$ *en* 1.
2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable en* 1 *et soit* n *un entier strictement positif. Calculer la limite de* $x \mapsto \frac{f(x^n)-f(x)}{x-1}$ *quand* x *tend vers* 1.
3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable en* 0 *et vérifiant* $f(0) = 0$. *Calculer la limite de* $\frac{(f(2x))^2 - f(3x^2)}{x^2}$ *quand* x *tend vers* 0.

Chapitre 3

Théorème des accroissements finis et applications

3.1 Monotonie et extrema

Dans toute cette section, f désigne une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 4 (Maximum) *Soit $x_0 \in I$.*

1. *On dit que $x_0 \in I$ est un point de maximum de f si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.*
2. *On dit que $x_0 \in I$ est un point de maximum local de f s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.*

Evidemment, un point de maximum est un point de maximum local (n'importe quelle valeur de ϵ convient !).

Si x_0 est un maximum local et si I est un intervalle ouvert, il existe $\epsilon' > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon', x_0 + \epsilon'[\subset]a, b[$. Quitte à remplacer ϵ par $\min(\epsilon, \epsilon')$, on peut donc supposer que $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset I$ et $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$.

On définit de manière analogue la notion de point de minimum et de point de minimum local. On parle d'extremum pour désigner un maximum ou un minimum.

Exercice 22 *Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ puis celui de la fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$. Donner les points de maximum et minimum, éventuellement locaux de cette dernière fonction.*

Théorème 1 (Théorème de Fermat) *Ici I est un intervalle ouvert et f est dérivable sur I. Si un point $x_0 \in I$ est un point d'extremum local, alors $f'(x_0) = 0$.*

Preuve : Supposons par exemple que x_0 est un point de minimum local. On sait donc qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset I$, on a $f(x) \geq f(x_0)$. Par ailleurs, la fonction $\phi(h) = \frac{f(h) - f(x_0)}{h - x_0}$ qui est définie sur $I \setminus \{x_0\}$, admet une limite en x_0, qui vaut $f'(x_0)$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $]x_0, +\infty[\cap I$ qui converge vers x_0. Alors $(\phi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres positifs qui tend vers $f'(x_0)$. Par le théorème sur le passage à la limite dans les inégalités pour les suites, $f'(x_0) \geq 0$. En considérant une suite dans $] - \infty, x_0[\cap I$, on obtient de même $f'(x_0) \leq 0$.

Conclusion : $f'(x_0) = 0$.

□

Définition 5 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est*

1. *croissante si pour tout $x, y \in I$,*

$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y),$$

2. *strictement croissante si pour tout $x, y \in I$,*

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

On définit de manière analogue les fonctions (strictement) décroissantes.

3.2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Dans toute cette section, f désigne une fonction définie sur un segment $[a, b] \subset I$.

Théorème 2 *On suppose f continue sur $[a, b]$. Alors f admet un point de maximum et un point de minimum sur I.*

Ce théorème, qui repose sur une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, sera démontré dans un chapitre ultérieur. Bien entendu, nous n'utiliserons pas pour sa preuve de théorème qui repose sur lui.

Théorème 3 (Théorème de Rolle) *On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f'(c) = 0.$$

Preuve : Par le théorème 2, il existe un point de minimum x_0 et un point de maximum x_1 pour f. On procède par disjonction de cas. Si $x_0 \in]a, b[$, alors par le théorème 1, $f'(x_0) = 0$ et on peut prendre $c = x_0$. Si $x_1 \in]a, b[$, on peut de manière analogue prendre $c = x_1$. Si on n'est dans aucun des deux cas précédents, c'est que $x_0 \in \{a, b\}$ et $x_1 \in \{a, b\}$. Alors pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(a) = f(b) = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) = f(a) = f(b).$$

Donc f est constante sur $[a, b]$. Comme une fonction constante est dérivable de dérivée nulle, tout élément c de $]a, b[$ convient.

□

Théorème 4 (Théorème des accroissements finis) *On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Preuve : On introduit la fonction $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Par théorème sur les sommes et produits de fonctions dérivables et continues, la fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Enfin, $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle appliqué à g, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Ceci se réécrit

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

La conséquence la plus importante du théorème des accroissements finis est le lien entre la monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée.

Proposition 18 *On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. *Si pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur $[a,b]$.*
2. *Si pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.*

Preuve : Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$ avec $x_1 < x_2$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[x_1, x_2]$. Il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Cette quantité est ≥ 0 dans le premier cas, et > 0 dans le second, ce qui permet de conclure.

□

Vous saurez énoncer et démontrer un théorème analogue pour la décroissance. Les tableaux de variations que vous aurez à produire sont donc maintenant parfaitement justifiés !

Exercice 23 *Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$. Montrer que f est une fonction constante.*

Voici une autre conséquence du théorème des accroissements finis, qui permet d'établir de nombreuses inégalités. Pensez à lui de temps en temps...

Théorème 5 (Inégalité des accroissements finis) *On suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose de plus qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, on a $|f'(x)| \leq M$. Alors pour tout $x, y \in [a,b]$, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

On dit alors que f est lipschitzienne de constante de Lipschitz M.

Preuve : Soient $x, y \in [a,b]$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[x,y]$. Alors il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Comme $|f'(c)| \leq M$, on obtient

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq M|x - y|.$$

□

Exercice 24 *Soient $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Montrer que l'on a $|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2|x - y|$.*

Exercice 25 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Une primitive $F : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable de dérivée f. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,*

$$F_1(x) - F_2(x) = \alpha.$$

Un théorème important de l'analyse, que vous démontrerez l'année prochaine, affirme que toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive $F : I \to \mathbb{R}$. On peut pour cela utiliser la théorie de l'intégration (que vous connaissez déjà un peu mais que vous étudierez rigoureusement l'année prochaine) : une primitive de f est donnée pour chaque $x_0 \in I$ par

$$F : x \in I \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

3.3 Equations différentielles d'ordre 1 sur un intervalle

Etant donné deux fonction continues $a, b : I \to \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert I, on s'intéresse à l'équation $f' - af = b$ sur I. Une solution de cette équation est une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, on a

$$f'(x) - a(x)f(x) = b(x). \tag{3.1}$$

Le but est de trouver toutes les fonctions f qui sont solution de cette équation.

Pour cela, on va procéder par analyse et synthèse : on va se donner une fonction dérivable f dont on suppose qu'elle est solution. On va essayer d'en déduire un maximum d'informations, de critères sur f : c'est l'étape d'analyse. Puis on vérifie que toutes les fonctions qui vérifient ces critères sont bien solutions. On aura trouvé ainsi l'ensemble des solutions : l'étape d'analyse permet de ne pas oublier de solution, tandis que l'étape de synthèse nous assure que toutes les fonctions trouvées sont bien des solutions.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une solution de (3.1) (s'il en existe). Comme a est continue, on sait qu'elle admet une primitive $A : I \to \mathbb{R}$.

On multiplie (3.1) par la fonction $x \mapsto \exp(-A(x))$:

$$f'(x)\exp(-A(x)) - f(x)a(x)\exp(-A(x)) = b(x)\exp(-A(x)).$$

On reconnaît alors dans le membre de gauche la dérivée de $x \mapsto f(x)\exp(-A(x))$. Comme la fonction $x \mapsto b(x)\exp(-A(x))$ est continue comme produit de fonctions continues, elle admet des primitives. Soit B l'une d'elles. Alors l'équation précédente se réécrit :

$$(f(x)\exp(-A(x)))' = B'(x).$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x)\exp(-A(x)) - B(x)$ est de dérivée nulle. Elle est donc constante sur I : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x)\exp(-A(x)) - B(x) = \alpha$, ce qui se réécrit

$$f(x) = (\alpha + B(x))\exp(A(x)).$$

Noter que $x \mapsto \alpha + B(x)$ est une primitive (comme B) de $x \mapsto b(x)\exp(-A(x))$.

Conclusion de l'étape d'analyse : Si f est une solution, alors il existe une primitive A de a et une primitive B de $x \mapsto b(x)\exp(-A(x))$ telle que

$$f(x) = B(x)\exp(A(x)).$$

Passons à l'étape de synthèse : soit A une primitive de a et B une primitive de $x \mapsto b(x)\exp(-A(x))$. On pose $f : x \mapsto B(x)\exp(A(x))$. Alors f est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables. De plus,

$$f'(x) = B'(x)\exp(A(x)) + B(x)A'(x)\exp(A(x)) = (b(x)\exp(-A(x)) + B(x)a(x))\exp(A(x)).$$

On en déduit

$$f'(x) - a(x)f(x) = (b(x)\exp(-A(x)) + B(x)a(x))\exp(A(x)) - a(x)B(x)\exp(A(x)) = b(x).$$

Conclusion : l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f qui s'écrivent sous la forme $x \mapsto B(x)\exp(A(x))$, où A est une primitive de a et B est une primitive de $b\exp(-A)$.

Exercice 26 *Résoudre l'équation $y' - y = e^x$.*

Exercice 27 *Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de (3.1) qui sont égales en un point $x_0 \in I$.*

1. *Montrer que $f_1 - f_2$ est solution de l'équation différentielle homogène correspondante : $f' - af = 0$.*
2. *En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a tels que $(f_1 - f_2)(x) = \alpha\exp(A(x))$.*
3. *En déduire que $f_1 = f_2$.*

Parfois, on associe à l'équation $f' - af = b$ une condition initiale, c'est-à-dire un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Cela signifie qu'on ne veut retenir que les solutions f qui vérifient $f(x_0) = y_0$. D'après l'exercice précédent, il y a au plus une solution de l'équation qui vérifie cette condition. En fait, une telle solution existe. En effet, notons A une primitive de a. Quitte à rajouter à A une constante (à savoir $-A(x_0)$), ça reste une primitive et on peut supposer que $A(x_0) = 0$. Ensuite, on prend pour B une primitive de $b\exp(-A)$ et quitte à lui ajouter une constante (à savoir $-B(x_0) + y_0$), on peut supposer que $B(x_0) = y_0$. Alors la fonction $f = B\exp A$ est solution et vérifie $f(x_0) = y_0$.

Conclusion : il existe une unique solution f de (3.1) telle que $f(x_0) = y_0$.

3.4 Exercices supplémentaires

Exercice 28 *Etudier le sens des variations des fonctions f et g définies sur $[0, \pi/2[$ par $f(x) = \tan x - x$ et $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$. En déduire que l'on a $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.*

Exercice 29

1. *Montrer que l'on a $x \cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.*
2. *Etudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$.*

Exercice 30 *Soit $p \in \mathbb{N}_*$.*

1. *Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour valeur maximale 2^{p-1}.*
2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que l'on a*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Exercice 31 *Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on définit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_n : x \in [0, 1] \mapsto (1 - x)(1 + x)^n$.*

1. *Etudier les variations de la fonction f_n.*
2. *Montrer qu'il existe un unique nombre $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 1$.*
3. *Montrer que x_n et x_{n+1} appartiennent à un même intervalle sur lequel la fonction f_n est décroissante.*
4. *Montrer que l'on a $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Exercice 32

1. *Montrer que pour tout $x > 0$,*

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,*

$$\ln(n + 1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

3. *Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.*

Exercice 33 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe k réels distincts appartenant à I en lesquels f s'annule, k étant un entier ≥ 2. Démontrer qu'il existe au moins $k - 1$ réels distincts appartenant à I en lesquels f' s'annule.*

Exercice 34 *Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$ et P le polynôme $P(x) = x^n + ax + b$.*

1. *Combien le polynôme P' a-t'il de racines réelles ?*
2. *Montrer que le polynôme P a au plus deux racines réelles si n est pair et au plus trois racines réelles si n est impair.*

Exercice 35 *Soit f une fonction dérivable. On suppose que la fonction f' est bornée. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+|x|}$ est bornée.*

Exercice 36 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, dérivable sur* $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$. *On suppose que* $f' : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ *admet une limite en* 0 *notée* l. *Montrer que* f *est dérivable en* 0 *et que* $f'(0) = l$.

Exercice 37 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *et soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. *On suppose que* f, g *sont continues sur* $[a, b]$, *dérivables sur* $]a, b[$, *et que* $g'(x) = 0$ *quel que soit* $x \in]a, b[$.

1. *Montrer que pour tout* $x \in]a, b]$, *on a* $g(x) - g(a) \neq 0$.
2. *On note* $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. *Soit* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $u(x) = f(x) - pg(x), x \in [a, b]$. *Montrer que* $u(a) = u(b)$. *en déduire qu'il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. *On suppose que* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe. On note* l *cette limite. Montrer que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l.$$

Exercice 38 *Résoudre l'équation :* $y'(x) = xy(x) - \cos x, x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 4

Le retour des limites

4.1 La caractérisation des limites avec les quantificateurs

4.1.1 Suites et quantificateurs

Au premier semestre, lorsque vous avez défini la limite d'une suite, vous avez utilisé des quantificateurs. Etant donné une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit qu'elle converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$,

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Par le quantificateur "pour tout $\varepsilon > 0$", on traduit l'idée que les termes de la suite deviennent *arbitrairement* proches de ℓ. Cet $\varepsilon > 0$ qu'on peut prendre aussi petit qu'on veut donne en quelque sorte une marge d'erreur.

Par le quantificateur, "il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$," on traduit l'idée qu'il faut parfois attendre longtemps avant de pouvoir passer sous la marge d'erreur donnée par $\varepsilon > 0$. Intuitivement, plus la marge d'erreur qu'on s'autorise est petite (i.e. plus ε est petit), plus le rang n_ε à partir duquel on passe sous la marge d'erreur devra être pris grand. En particulier, n_ε dépend de ε.

Exercice 39 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :*

1. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.*
2. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $a < b + \varepsilon$, alors $a \leq b$.*
3. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|a - b| < \varepsilon$, alors $a = b$.*

Au premier chapitre, on a donné la définition de la limite d'une fonction, en utilisant les suites. Dans cette section, on va donner une caractérisation des limites, i.e. une définition équivalente en utilisant les quantificateurs. On se donne donc dans toute la suite une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une union finie d'intervalles disjoints.

Théorème 6 *Soient $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D et $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet l comme limite en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap]a - \eta, a + \eta[$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$.*

Preuve : Il s'agit d'établir une équivalence entre le fait que l soit la limite de f en a et une certaine propriété qu'on notera (P) : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap]a - \eta, a + \eta[$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$. On va prouver successivement les deux implications.

On commence par montrer que si la propriété (P) est vérifiée alors la limite de f en a existe et vaut l. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans D qui converge vers a. Montrons que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Pour cela on va utiliser la définition de la limite d'une suite. Soit $\epsilon > 0$.

Par la propriété (P), il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D\cap]a-\eta, a+\eta[$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|x_n - a| \leq \eta$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $|f(x_n) - l| \leq \epsilon$. Ceci démontre que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Conclusion partielle : si la propriété (P) est vérifiée alors la limite de f en a existe et vaut l.

Réciproquement, on procède par contraposée. On nie la propriíé (P) : il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in D\cap]a-\eta, a+\eta[$ vérifiant $|f(x) - l| > \epsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons cette assertion avec le choix $\eta = \frac{1}{n+1}$: on obtient l'existence d'un point $x_n \in D\cap]a-\frac{1}{n+1}, a+\frac{1}{n+1}[$ vérifiant $|f(x_n) - l| > \epsilon$. Alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l. Pourtant, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a (puisque $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$) . Ainsi il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a sans que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende vers l. Donc f n'admet pas l comme limite en a.

Conclusion partielle : si f admet l comme limite en a alors la propriété (P) est vérifiée.

$\square$

Comme pour les suites, quand on écrit "pour tout $\varepsilon > 0$" on se donne une marge d'erreur qu'on peut choisir arbitrairement petite. Pour passer en-dessous de cette marge d'erreur, il faut qu'on soit suffisamment proche de a. C'est ce qu'on exprime par les termes "il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D\cap]a-\eta, a+\eta[$." Lorsque x est dans ce petit intervalle autour de a, on est sûr que $f(x)$ est proche de ℓ de moins de ε. Intuitivement, plus on se donne un ε petit, plus on doit prendre η petit aussi.

Les autres cas de figure (limite non finie, ou bien limite en $\pm\infty$) peuvent également s'exprimer en termes de quantificateurs :

Proposition 19

1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D. La fonction f admet $+\infty$ comme limite en a si et seulement si pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D\cap]a-\eta, a+\eta[$, on a $f(x) \geq C$.*
2. *On suppose que $+\infty$ est une extrémité de D et soit $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet l comme limite en $+\infty$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq x_\varepsilon$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$.*
3. *On suppose que $+\infty$ est une extrémité de D . La fonction f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si et seulement si pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $x_C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq x_C$, on a $f(x) \geq C$.*

Exercice 40

1. *Exprimer en termes de quantificateurs la phrase "f tend vers $-\infty$ en $+\infty$" puis la phrase "f tend vers $-\infty$ en $-\infty$."*
2. *Démontrer la proposition précédente en s'inspirant de la preuve du théorème 6.*

Désormais, selon la difficulté rencontrée, on pourra utiliser la définition de limite avec les suites, ou bien la caractérisation des limites en termes de quantificateurs.

Exercice 41 *Soient $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f admet l comme limite en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D\cap]a-\eta, a+\eta[$, on a $|f(x) - l| < 2\epsilon$.*

On utilisera souvent l'exercice précédent (et parfois avec 3ε au lieu de 2ε).

Exercice 42 *Soient $a, l \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :*

1. *f ne tend pas vers l quand x tend vers a,*
2. *f ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$,*
3. *f ne tend pas vers $+\infty$ en a,*
4. *f n'a pas de limite finie en $+\infty$.*

4.1.2 Limites à droite, à gauche, épointées

Définition 6 (Limite à droite) *Soit $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D. On suppose que D contient un intervalle de la forme $]a, b[$. On dit qu'un réel $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$) est une limite de f à droite en a si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D\cap]a, +\infty[$ tendant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$).*

Ainsi, pour une limite à droite, on ne considère que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (contenues dans D) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n > a$. Bien sûr, dans l'énoncé précédent, la limite à droite est unique, comme d'habitude (la preuve est la même que celle de la proposition 8). On emploie la notation suivante $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ pour la limite à droite.

Comme pour les limites, on dispose d'une caractérisation des limites à droite en termes de quantificateurs.

Proposition 20 *Soit $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D. On suppose que D contient un intervalle de la forme $]a, b[$.*

1. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors f admet ℓ comme limite à droite en a si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in]a, a + \eta[\cap D$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.*
2. *La fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a + \eta[\cap D$, on a $f(x) \geq C$ (resp. $f(x) \leq C$).*

Preuve : On montre par exemple le deuxième point pour $+\infty$ (la preuve du premier point est très semblable et laissée en exercice). Il s'agit d'établir une équivalence entre le fait que f tende vers $+\infty$ à droite en a et une certaine propriété qu'on notera (P) : pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D\cap]a, a + \eta[$, on a $f(x) \geq C$. On va prouver successivement les deux implications.

On commence par montrer que si la propriété (P) est vérifiée alors f tend vers $+\infty$ à droite en a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $D\cap]a, +\infty[$ qui converge vers a. Montrons que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$. Soit $C \in \mathbb{R}$. Par la propriété (P), il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D\cap]a, a + \eta[$, on a $f(x) \geq C$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|x_n - a| \leq \eta$. De plus, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D\cap]a, +\infty[$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \in D\cap]a, a + \eta[$. Par la propriété (P), cela implique $f(x_n) \geq C$. Ceci démontre que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion partielle : si la propriété (P) est vérifiée alors la limite à droite de f en a existe et vaut $+\infty$.

Réciproquement, on procède par contraposée. On nie la proprifé (P) : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in D\cap]a, a + \eta[$ vérifiant $f(x) < C$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons cette assertion avec le choix $\eta = \frac{1}{n+1}$: on obtient l'existence d'un point $x_n \in D\cap]a, a + \frac{1}{n+1}[$ vérifiant $f(x_n) < C$. Alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. En particulier, elle ne converge pas vers $+\infty$. Pourtant, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a (puisque $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$) et est contenue dans $D\cap]a, +\infty[$. Donc f n'admet pas $+\infty$ comme limite à droite en a.

Conclusion partielle : si f tend vers $+\infty$ à droite en a alors la propriété (P) est vérifiée.

□

Tout ce qui précède peut être formulé pour les limites à gauche.

Définition 7 (limite épointée) *Soit $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D. On suppose que D contient un ensemble de la forme $]c, a[\cup]a, b[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$) comme limite épointée en a si f admet ℓ (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$) comme limite à gauche et à droite en a.*

La caractérisation en termes de quantificateurs d'une limite épointée se déduit aisément de la définition et de la proposition 20 :

Proposition 21 *Soit $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de D. On suppose que D contient un ensemble de la forme $]c, a[\cup]a, b[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors f admet ℓ comme limite épointée en a si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in (D \setminus \{a\})\cap]a-\eta, a+\eta[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.*

Preuve : Par définition, si f admet ℓ comme limite *épointée* en a, alors f admet ℓ comme limite à droite et à gauche en a. Si on traduit ceci en termes de quantificateurs :

1. (limite à gauche) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a[\cap D$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$,
2. (limite à droite) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\delta[\cap D$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta(= \min(\eta, \delta)) > 0$ tel que pour tout $x \in (D \setminus \{a\})\cap]a-\theta, a+\theta[$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Conclusion partielle : si f admet ℓ comme limite *épointée* en a, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $x \in (D \setminus \{a\})\cap]a-\theta, a+\theta[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in (D \setminus \{a\})\cap]a-\eta, a+\eta[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Alors en particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in (D\cap]a-\eta, a[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Ceci est la traduction en termes de quantificateurs que f admet ℓ comme limite à gauche en a. De même, f admet ℓ comme limite à droite en a. Par définition d'une limite épointée, on a donc montré :

Conclusion : si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in (D \setminus \{a\})\cap]a-\eta, a+\eta[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, alors f admet ℓ comme limite épointée en a.

□

On a un énoncé analogue lorsque f admet $\pm\infty$ comme limite épointée en a.

Plaçons-nous dans la situation où D contient un ensemble de la forme $]c, a[\cup]a, b[$. Lorsque a n'appartient pas à D, les notions de limite et de limite épointée en a coïncident. La notion de limite épointée en $a \in \mathbb{R}$ ne diffère de la notion de limite que lorsque $a \in D$. Dans ce cas, on ne considère pas la valeur de f en a pour calculer la limite épointée. Examinons par exemple la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Alors f admet une limite à gauche et à droite en 0, qui sont égales à 0. Donc f a une limite épointée en 0 qui vaut 0. En revanche, f n'a pas de limite en 0 !

Plus généralement, lorsque $a \in D$ et que f admet une limite épointée en a, il n'est pas nécessairement vrai que cette limite soit égale à $f(a)$. En revanche, on a

Proposition 22 *Soit $a \in D$. On suppose que f admet une limite épointée en a et que cette limite vaut $f(a)$. Alors f admet une limite en a (autrement dit, f est continue en a).*

Preuve : Montrons que f admet une limite en a. Soit $\epsilon > 0$. Comme f admet $f(a)$ comme limite épointée en a, il existe (proposition 21) $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap D$, $x \neq a$, on a $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. Bien sûr, on a aussi $|f(a) - f(a)| \leq \epsilon$. Ainsi, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap A$, on a $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$ ce qui montre que f admet une limite en a.

□

Exercice 43 *On considère la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$H(x) = \begin{cases} -1 \textit{ si } x < 0, \\ 0 \textit{ si } x = 0, \\ 1 \textit{ si } x > 0. \end{cases}$$

Déterminer si f a une limite à gauche, à droite, épointée ou une limite tout court en 0.

Définition 8 (Prolongement par continuité) *Soit $a \in \mathbb{R}$ une extrémité de D qui n'appartient pas à D. On suppose que f a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a. On pose*

$$\overline{f} : D \cup \{a\} \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$$

On dit que $\overline{f}$ est le prolongement par continuité de f en a.

Exercice 44 *Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, admettent-elles des limites à gauche, à droite, épointées, ou des limites aux points indiqués ?*

1. $f_1(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ *pour* $x \neq 0$ *et* $f_1(0) = 1$, *limites en* 0,
2. $f_2(x) = \frac{sin(\sqrt{x^2})}{x}$ *pour* $x \neq 0$ *et* $f_2(0) = 1$, *limites en* 0,
3. $f_3(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ *où E est la fonction partie entière, limites en $n \in \mathbb{Z}$.*

Exercice 45 *Les fonctions suivantes, définies sur $]0, 1[$, admettent-elles des limites à droite en 0 et à gauche en 1 ?*

1. $f_1(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$,
2. $f_2(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$,
3. $f_3(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ *où $a > 0$ est un paramètre fixé,*
4. $f_4(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

4.1.3 Dérivées à gauche et à droite

Dans cette section, on se donne une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On rappelle pour commencer qu'une fonction dérivable est continue :

Proposition 23 *Soit $x_0 \in I$. On suppose que I contient un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Preuve : D'après la proposition 3, il existe $\epsilon : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 telle que

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x).$$

Alors par les théorèmes d'opération sur les limites, f admet une limite épointée en x_0 qui vaut $f(x_0)$. On en déduit que f est continue en x_0.

$\square$

Définition 9 (Dérivée à droite) *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que I contient un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \alpha[$. On définit la fonction*

$$\varphi : x \in I \setminus \{x_0\} \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si φ a une limite à droite en x_0. On note $f'_d(x_0)$ la limite à droite de φ en x_0 : c'est le nombre dérivé à droite de f en x_0.

Vous devinez la définition de la dérivabilité à gauche.

Proposition 24 *Soit $x_0 \in I$. On suppose que I contient un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. On suppose aussi que f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

Preuve : On introduit
$$\varphi : x \in I \setminus \{x_0\} \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Par hypothèse, φ a une limite à gauche et une limite à droite en x_0, égales à $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Donc φ admet $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ comme limite épointée en x_0, et donc comme limite tout court puisque x_0 n'est pas dans le domaine de définition de φ. Par définition, f est donc dérivable en x_0 de dérivée $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

□

Théorème 7 (Prolongement dérivable) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, on suppose que $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ (à droite) en a. Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.*

Preuve : Introduisons
$$\varphi : x \in]a, b] \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Il s'agit de montrer que φ a une limite à droite en a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ (à droite) en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a + \eta[$, on a $|f'(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in]a, a+\eta[$. Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f qui est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$, il existe $c \in]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Donc
$$\varphi(x) = f'(c).$$
Comme $a < c < x < a + \eta$, on a $|f'(c) - \ell| \leq \epsilon$ donc aussi $|\varphi(x) - \ell| \leq \epsilon$. Ceci montre que φ a une limite à droite en a qui vaut ℓ.

Conclusion : f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

□

Exercice 46 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, on suppose que $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ à droite en a. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en a.*

4.2 Borne supérieure

Définition 10 (majorant et borne supérieure) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que M est un majorant de A si pour tout $x \in A$, on a $x \leq M$.*
2. *On dit que s est la borne supérieure de A si s est le plus petit des majorants : s est un majorant de A et pour tout majorant M de A on a $s \leq M$.*

On admettra que TOUTE PARTIE NON VIDE MAJOREE de $\mathbb{R}$ ADMET UNE BORNE SUPERIEURE.

On peut considérer cet énoncé comme un axiome, ou comme une propriété de $\mathbb{R}$ lorsqu'on *construit* $\mathbb{R}$ à partir des axiomes de la théorie des ensembles. Ce qui est évident en revanche, c'est l'unicité de la borne supérieure, une fois qu'on a admis son existence. En effet, si s_1 et s_2 sont deux bornes supérieures pour le même ensemble A, alors s_2 étant un majorant et s_1 le plus petit des majorants, on a $s_1 \leq s_2$. De même, $s_2 \leq s_1$. Donc $s_1 = s_2$, ce qui établit l'unicité de la borne supérieure.

Si A est une partie non vide majorée, on note $\sup A$ sa borne supérieure. L'existence d'une borne supérieure pour toute partie non vide majorée implique (par passage à l'opposé) l'existence d'un plus petit minorant pour les parties non vides minorées. C'est ce qu'on appelle la borne inférieure d'une partie non vide et minorée. Si B est non vide et minoré, on note $\inf B$ sa borne inférieure.

Proposition 25 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et s un majorant de A. Alors s est la borne supérieure de A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $s < x + \varepsilon$.*

Preuve : On sait que s est un majorant de A.

Supposons que s est la borne supérieure de A. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A (sinon s ne serait pas le plus petit des majorants de A). Donc il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x$. Autrement dit, $s < x + \varepsilon$.

Réciproquement, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $s < x + \varepsilon$, montrons que s est le plus petit des majorants de A. Soit M un majorant de A. Supposons par l'absurde que $M < s$. Posons $\varepsilon = s - M$. Il existe $x \in A$ tel que $s < x + \varepsilon$. Alors $x > s - \varepsilon = M$. Ceci contredit le fait que M est un majorant de A. Ainsi, $M \geq s$ et s est bien le plus petit des majorants de A.

□

Dans l'énoncé précédent, comme s est un majorant de A et $x \in A$, on a aussi $x \leq s$.

Proposition 26 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et s un majorant de A. Alors s est la borne supérieure de A si et seulement s'il existe une suite dans A qui converge vers s.*

Preuve : On utilise la caractérisation donnée par la proposition précédente. Supposons pour commencer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers s. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - s| < \varepsilon$. On en déduit $s < x_n + \varepsilon$. Donc par la proposition précédente, s est la borne supérieure de A.

Réciproquement, si s est la borne supérieure de A, on applique la proposition précédente pour chaque valeur de $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$: il existe $x_n \in A$ tel que $x_n \leq s < x_n + \frac{1}{n+1}$. Ainsi, $|x_n - s| \leq \frac{1}{n+1}$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers s.

□

L'une des conséquences importantes de la notion de borne supérieure est le théorème suivant :

Théorème 8 *Une suite croissante majorée converge.*

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. Considérons l'ensemble $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. On note s sa borne supérieure. On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers s.

Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation des bornes supérieures, on sait qu'il existe $x \in A$ tel que $x \leq s \leq x + \varepsilon$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_{n_0}$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $u_{n_0} \leq u_n$ (car la suite est croissante) et $u_n \leq s$ (car s est un majorant). Ainsi

$$s - \varepsilon \leq x = u_{n_0} \leq u_n \leq s,$$

d'où $|u_n - s| \leq \varepsilon$. Ceci démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers s.

□

Exercice 47 *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On note $-A$ l'ensemble $\{-a; a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Comparer* $\inf(-A)$ *et* $\sup A$.

Exercice 48 *Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que* $\sup A \leq \sup B$*. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?*

Exercice 49 *Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose*

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ *avec* $\sup A + \sup B$.

Exercice 50 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'éléments de A qui converge vers $+\infty$.*

4.3 Retour sur les suites

Théorème 9 (Théorème des suites adjacentes) *On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$,*
3. *la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Alors les deux suites sont convergentes et tendent vers la même limite.

Preuve : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 (car $v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc elle converge vers une limite notée ℓ. De même, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, donc converge vers une limite notée m. Par théorème sur la limite d'une somme, on obtient que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell - m$. Par hypothèse, $\ell - m = 0$.

Conclusion : les deux suites sont convergentes et tendent vers la même limite.

$\square$

Définition 11 (Suite extraite) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On peut alors définir pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $v_n = u_{\varphi(n)}$. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Remarque 1 *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.*

Preuve : On montre cette remarque par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a bien $\varphi(0) \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\varphi(n) \geq n$. Comme ϕ est strictement croissante, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1 \geq n+1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

$\square$

Théorème 10 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors il existe une suite extraite convergente.*

Preuve : On va utiliser un procédé de dichotomie et le théorème des suites adjacentes. Comme la suite est bornée, il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$.

1ère étape On définit par récurrence deux suites adjacentes : une suite croissante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite décroissante $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que $[a_k, b_k]$ contienne une infinité de termes de la suite : pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : u_n \in [a_k, b_k]\}$ est infini. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$.

1 *initialisation* On pose $a_0 = a, b_0 = b$.

2 *hérédité* On suppose construits $a_0 \leq a_1 \leq \dots a_k \leq b_k \leq \cdots \leq b_0$ tels que $[a_k, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$. On construit alors a_{k+1}, b_{k+1}. On découpe l'intervalle $[a_k, b_k]$ en deux. Puisque $[a_k, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite (hypothèse de récurrence), l'une des deux moitiés (éventuellement les deux) contient aussi une infinité de termes de la suite. Si $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ contient une infinité de termes de la suite, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$. Sinon, on pose $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ et $b_{k+1} = b_k$. Dans les deux cas, $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient une infinité de termes de la suite, $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$ et par hypothèse de récurrence $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

3 *conclusion* Les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont ainsi définies par récurrence et vérifient les propriétés demandées.

2ème étape On construit maintenant par récurrence une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u_{\phi(k)} \in [a_k, b_k]$.

1 *initialisation* On pose $\phi(0) = 0$. On a bien $u_{\phi(0)} = u_0 \in [a_0, b_0]$ car $[a_0, b_0] = [a, b]$.

2 *hérédité* On suppose construits $\phi(0) < \cdots < \phi(k)$ tels que pour tout $i \in \{0, \ldots k\}$, on a $u_{\phi(i)} \in [a_i, b_i]$. On construit alors $\phi(k+1)$. Comme l'intervalle $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est encore vrai qu'il contient une infinité de termes de termes de la suite de rang $> \phi(k)$ (puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite de rang $\leq \phi(k)$). Comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, on peut définir

$$\phi(k+1) := \min\{n \in \mathbb{N} : n > \phi(k), u_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]\}.$$

On a bien $\phi(k+1) > \phi(k)$ et $u_{\phi(k+1)} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

3 *conclusion* L'application ϕ est ainsi définie par récurrence et vérifie les propriétés demandées.

3ème étape Par le théorème des suites adjacentes, les deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune l. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k \leq u_{\phi(k)} \leq b_k$, on déduit du théorème des gendarmes que $(u_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.

□

Définition 12 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$, on a $|u_n - u_m| \leq \epsilon$.*

Proposition 27 *Une suite convergente est de Cauchy.*

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrons qu'elle est de Cauchy. Notons l sa limite. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite d'une suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|l - u_n| < \epsilon$. On en déduit que pour tout $n, m \geq n_0$, on a par l'inégalité triangulaire

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| \leq 2\epsilon.$$

Ceci montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

□

Théorème 11 *Une suite de Cauchy converge.*

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

1ère étape Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On choisit dans la définition d'une suite de Cauchy $\epsilon = 1$. Il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$, on a $|u_n - u_m| \leq 1$. On prend $n = n_0$. Alors pour tout $m \geq n_0$, on a $|u_m - u_{n_0}| \leq 1$ et donc par l'inégalité triangulaire

$$|u_m| \leq |u_m - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \leq 1 + |u_{n_0}|.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_m| \leq \max(|u_0|, \ldots, |u_{n_0}|) + 1.$$

Conclusion partielle : la suite est bornée.

Comme la suite est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers une limite notée l.

2ème étape Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $\epsilon > 0$. On applique la définition de suite de Cauchy : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$, on a $|u_n - u_m| \leq \epsilon$. Comme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $|u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon$. Pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a $\phi(n) \geq n \geq n_0$ (voir remarque 1) donc

$$|u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |u_{\phi(n)} - u_n| \leq \epsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|u_n - l| \leq |u_{\phi(n)} - u_n| + |u_{\phi(n)} - l| \leq 2\epsilon.$$

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

□

4.4 Exercices supplémentaires

Exercice 51 *On considère la fonction* $f : x \mapsto x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. *Donner le domaine de définition de* f. *Montrer que* f *est continu sur son domaine de définition. Peut-on prolonger* f *par continuité à* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 52 *Les fonctions suivantes peuvent-elle être prolongées par continuité sur* $\mathbb{R}$ *?*

1. $x \mapsto \frac{x^3-8}{x-2}$,
2. $x \mapsto \frac{x^3-2x^2-x+2}{1-|x|}$,

Exercice 53 *Soient* $a < b$ *deux réels et* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une application strictement croissante. On pose* $A = \{f(x); x \in]a, b[\}$, $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$ *(si* A *est non minorée, on pose* $\alpha = -\infty$*, si* A *est non majorée, on pose* $\beta = +\infty$*).*

1. *Montrer que* $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ *(on pourra distinguer les cas* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha = -\infty$*). Montrer que* $\lim_{x\to b} f(x) = \beta$.
2. *Soit* $c \in]a, b[$. *Montrer que* f *admet une limite à droite en* c *notée* $f_d(c)$ *et une limite à gauche en* c*, notée* $f_g(c)$. *Montrer que* $f_g(c) \leq f(c) \leq f_d(c)$.
3. *On suppose que* $f_g(c) = f_d(c)$ *pour tout* $c \in]a, b[$. *Montrer que* f *est continue sur* $]a, b[$.

Exercice 54 *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose que* $f(a) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* f *est dérivable sur l'intervalle* $]a, +\infty[$. *Posons* $b = \exp(-a)$.

1. *Soit* $g : [0, b] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $g(0) = 0$ *et* $g(x) = f(-\ln x)$ *si* $x \neq 0$. *Montrer que* g *est continue.*
2. *Calculer* $g(b)$. *Montrer que* g *est dérivable sur l'intervalle* $]0, b[$ *et calculer* $g'(x)$.
3. *Montrer qu'il existe* $c \in]a, +\infty[$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Commentaire ?*

Exercice 55 *Soit* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *une application croissante. On pose* $A = \{x \in [0, 1] : f(x) \leq x\}$. *Montrer que*

1. $A \neq \emptyset$,
2. *Si* $x \in A$*, alors* $f(x) \in A$,
3. A *possède une borne inférieure* $a \in [0, 1]$,
4. $f(a) = a$.

On a donc montré que toute application croissante de $[0, 1]$ *dans* $[0, 1]$ *possède un point fixe.*

Chapitre 5

Approximation

Dans toute cette section, on se donne un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, ainsi qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

5.1 Fonctions de classe C^n et formules de Taylor

On rappelle que f est continue sur I si f est continue en chaque point x de I, autrement dit f a une limite en chaque point x de I (et donc par définition d'une limite et le fait que f est définie en x, cette limite vaut nécessairement $f(x)$). Il revient au même de dire que pour tout $x \in I$,

1. si x n'est pas une extrémité de I, alors f a une limite épointée en x et cette limite vaut $f(x)$,
2. si x est l'extrémité gauche de I (dans ce cas, I est donc de la forme $[x, y[$ ou $[x, y]$), alors f a une limite à droite qui vaut $f(x)$,
3. si x est l'extrémité droite de I, vous devinez la suite !

On note $C^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

De même, on dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point de I : pour tout $x \in I$,

1. si x n'est pas une extrémité de I, f est dérivable en x,
2. si x est l'extrémité gauche de I, f est dérivable à droite en x,
3. si x est l'extrémité droite de I, f est dérivable à gauche en x.

Alors la fonction dérivée f' est bien définie sur I.

Définition 13 (Fonctions continûment dérivables) *On dit que f est continûment dérivable sur I si f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I. On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I.*

Noter que si $f \in C^1(I)$, alors f est continue sur I (puisque si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point). Autrement dit, $C^1(I) \subset C^0(I)$.

Plus généralement, on définit

Définition 14 *Pour tout $n \geq 1$, on définit par récurrence l'ensemble $C^n(I)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in C^1(I)$ telles que $f' \in C^{n-1}(I)$.*

Autrement dit, $f \in C^n(I)$ si les dérivées de f jusqu'à l'ordre n $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existent et sont continues sur I (il suffit de demander que $f^{(n)}$ soit continue. Les autres dérivées $f', \ldots, f^{(n-1)}$ sont forcément continues puisque dérivables).

On note aussi

$$C^\infty(I) = \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

Il résulte de la définition que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C^{n+1}(I) \subset C^n(I)$.

Les ensembles $C^n(I)$ sont stables par les opérations usuelles :

Proposition 28 (Somme et produits de fonctions de classe C^n) *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in C^n(I)$. Alors $f + g$ et fg sont aussi dans $C^n(I)$.*

On rappelle que $f + g$ désigne la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$ tandis que fg désigne la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$.

Preuve : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $f, g \in C^n(I)$, on a $(f + g) \in C^n(I)$ et $(fg) \in C^n(I)$.

— *Initialisation* : On a vu au premier chapitre que la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons-la pour $n + 1$. Soient $f, g \in C^{n+1}(I)$.
On a d'abord $(f + g)' = f' + g'$. Comme $f, g \in C^{n+1}(I)$, on a $f', g' \in C^n(I)$ (par définition de $C^{n+1}(I)$). Par hypothèse de récurrence (pour la somme), $(f' + g') \in C^n(I)$. Ainsi $(f + g)' \in C^n(I)$ et donc $(f + g) \in C^{n+1}(I)$.
On a ensuite $(fg)' = f'g + fg'$. Comme $f, g \in C^{n+1}(I)$, on a $f', g \in C^n(I)$. Par hypothèse de récurrence (pour le produit), $f'g \in C^n(I)$. De même, $fg' \in C^n(I)$. De nouveau par hypothèse de récurrence (cette fois, pour la somme), $f'g+fg' \in C^n(I)$. Ainsi $(fg)' \in C^n(I)$ et finalement, $fg \in C^{n+1}(I)$.

— *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $f, g \in C^n(I)$, $f + g$ et fg sont aussi dans $C^n(I)$.

□

Proposition 29 (Composée de fonctions de classe C^n) *Soit J un autre intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide, non réduit à un point). Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $h : J \to R$. On suppose que $f(I) \subset J$ de sorte que la composée $h \circ f : I \to \mathbb{R}$ est bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^n(I)$ et $h \in C^n(J)$, alors $h \circ f \in C^n(I)$.*

Preuve : La preuve est laissée en exercice.

□

Exercice 56 *Montrer la proposition précédente.*

Le plus souvent, pour justifier qu'une fonction est C^∞, on la décrit comme somme, produit, composée de fonctions usuelles dont on sait qu'elles sont C^∞. Mais il faut d'abord montrer une fois pour toute que ces fonctions usuelles sont C^∞. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 57 *Montrer que les fonctions suivantes sont C^∞ sur leur domaine de définition :*

1. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$*
2. $x \mapsto e^x$
3. $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$
4. $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \ln x$
5. *une fonction polynôme, une fonction rationnelle.*

Parfois, il faut revenir aux définitions (de continuité, de dérivabilité) pour montrer qu'une fonction est C^∞. Le théorème de prolongement dérivable peut s'avérer bien utile. C'est le cas dans l'exercice suivant.

Exercice 58 *On définit pour tout $x \in]0, +\infty[$,*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

1. *Montrer que f se prolonge par continuité à 0. On note encore f le prolongement.*
2. *Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$. Est-ce que $f \in C^1([0,+\infty[)$?*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,*
$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}.$$
En déduire que $f \in C^\infty([0,+\infty[)$.
4. *On prolonge f par parité à $\mathbb{R}$. On note encore f le prolongement. A-t'on $f \in C^\infty(\mathbb{R})$?*

On établit maintenant la première formule de Taylor

Théorème 12 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{n+1}(I)$. Soient $a, b \in I, a \neq b$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)\frac{(b-a)}{1!} + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

On rappelle que la notation $]a,b[$ désigne l'intervalle ouvert d'extrémités a et b même si $b < a$. La formule précédente est le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre n de f sur $[a,b]$.

Preuve : Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} + M\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

vérifie $\varphi(a) = f(b)$. Il suffit de poser

$$M = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}).$$

C'est possible car $a \neq b$. Ainsi définie, $\varphi(a) = f(b)$ (on a choisi M pour ça !) et $\varphi(b) = f(b)$. De plus, φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ comme somme et produits de fonctions qui le sont. Le théorème de Rolle implique alors qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Calculons la dérivée de φ. Pour cela, on dérive chaque terme de la somme mais attention : dans le premier terme, on a $f^{(0)}(x)(b-x)^0 = f(x)$, on traite donc à part ce premier terme. Pour tout $x \in I$,

$$\varphi'(x) = f'(x) + \sum_{k=1}^{n}(f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} - f^{(k)}(x)k\frac{(b-x)^{k-1}}{k!}) - M(n+1)\frac{(b-x)^n}{(n+1)!}.$$

On découpe la somme $\Sigma \ldots$ en deux :

$$\sum_{k=1}^{n}(f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} - f^{(k)}(x)k\frac{(b-x)^{k-1}}{k!}) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

On réindexe la deuxième somme $(k-1) \to k$:

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} = f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!}.$$

On a donc

$$\varphi'(x) \;=\; f'(x) \;+\; \sum_{k=1}^{n} f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} \;-\; f'(x) \quad - \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} \;-\; M\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Ainsi

$$\varphi'(x) = f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!} - M\frac{(b-x)^n}{n!} = (f^{(n+1)}(x) - M)\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Appliqué en $x = c$, on obtient

$$0 = \varphi'(c) = (f^{(n+1)}(c) - M)\frac{(b-c)^n}{n!}$$

Comme $c \in]a, b[$, en particulier $c \neq b$ et on déduit de l'égalité précédente

$$M = f^{(n+1)}(c).$$

Ainsi,

$$f(b) = \varphi(a) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

qui est la formule demandée.

$\square$

La formule de Taylor-Lagrange permet de comparer une fonction à un polynôme et de majorer l'écart entre les deux sur tout un intervalle. On peut la voir comme une généralisation du théorème des accroissements finis, qui permet d'avoir des encadrements plus précis.

Exercice 59

1. *Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle entre un point x et le point 0 et à l'ordre n.*
2. *Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{a^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*
3. *En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}).$$

Exercice 60 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

1. $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$
2. $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^4}{4!}$
3. $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}| \leq \frac{x^6}{6!}$

On déduit de la première formule de Taylor la seconde :

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young) *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n(I)$. Alors pour tout $a \in I$, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(x-a)^k}{k!} + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

Preuve : On fixe $a \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on définit

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n}(f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(x-a)^k}{k!}).$$

Montrons que ε tend vers 0 quand x tend vers a. Soit $\theta > 0$. Par continuité de $f^{(n)}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, on a $|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)| \leq \theta$. Soit $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap(I \setminus \{a\})$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f sur $[a, x]$ à l'ordre $n-1$ (c'est possible car $f \in C^n([a, x])$) : il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c_x)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

En ajoutant et retranchant $f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + (f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a))\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Par définition de $\varepsilon(x)$, il vient

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)).$$

Comme $c_x \in]a, x[\subset]a-\eta, a+\eta[\cap I$, on a $|f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)| \leq \theta$. Finalement, on obtient

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{\theta}{n!} \leq \theta.$$

On a ainsi montré que pour tout $\theta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap(I \setminus \{a\})$, on a

$$|\varepsilon(x)| \leq \theta.$$

Autrement dit, ε tend vers 0 en a. On peut le prolonger par continuité en a et on a bien alors pour tout $x \in I$, (distinguer les cas $x \neq a$ et $x = a$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(x-a)^k}{k!} + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

□

Exercice 61 *Montrer que la fonction*

$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

a une limite quand x tend vers 0 et calculer cette limite.

5.2 Développements limités

Définition 15 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 s'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x). \tag{5.1}$$

Proposition 30 (Unicité du développement limité) *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors les coefficients $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que* (5.1) *soit vérifié sont uniques.*

Preuve : Supposons qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_1 : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 d'une part, et $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 d'autre part tels que pour tout $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x) \tag{5.2}$$
$$= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x). \tag{5.3}$$

Montrons alors par récurrence forte sur $0 \leq k \leq n$ que $a_k = b_k$.

— *Initialisation* En prenant $x = x_0$ dans (5.2), il vient

$$f(x_0) = a_0 = b_0.$$

(Comme ε_1 et ε_2 ont une limite nulle en x_0 et qu'ils sont définis en x_0, alors $\epsilon_1(x_0) = 0 = \epsilon_2(x_0)$).

— *Hérédité* Soit $k \leq n - 1$ et supposons que $a_i = b_i$ pour tout $0 \leq i \leq k$. Montrons que $a_{k+1} = b_{k+1}$. Par hypothèse de récurrence : pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} &a_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x) \\ &= f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - \dots - a_k(x - x_0)^k = f(x) - b_0 - b_1(x - x_0) - \dots - b_k(x - x_0)^k \\ &\qquad = b_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \dots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

On en déduit pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} &a_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x) \\ &\qquad = b_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \dots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

On divise par $(x - x_0)^{k+1}$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$\begin{aligned} &a_{k+1} + \dots + a_n(x - x_0)^{n-k-1} + (x - x_0)^{n-k-1} \varepsilon_1(x) \\ &\qquad = b_{k+1} + \dots + b_n(x - x_0)^{n-k-1} + (x - x_0)^{n-k-1} \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Le membre de gauche tend vers a_{k+1} en x_0 quand le membre de droite tend vers b_{k+1}. Comme les deux membres sont égaux sur $I \setminus \{x_0\}$, on en déduit (par unicité de la limite des fonctions définies sur $I \setminus \{x_0\}$) que

$$a_{k+1} = b_{k+1}.$$

— *Conclusion* : pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $a_k = b_k$.

□

Les nombres $a_0, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients du développement limité de f en x_0.

Exercice 62 *Montrer que si $f \in C^n(I)$, alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I. Quels sont les coefficients de ce développement limité ?*

Exercice 63 *Soit $n \in \mathbb{N}_*$. Montrer que si f a un développement limité en un point $x_0 \in I$ à l'ordre n, alors il a un développement limité à l'ordre $n - 1$.*

Exercice 64 *1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.*

2. *Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.*
3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et que pourtant f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 65 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est $C^\infty(\mathbb{R})$ et calculer son développement limité à tout ordre en 0. Conclusion ?

Lorsqu'on doit calculer le développement limité en un point $x_0 \in I$ d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, il est souvent commode d'introduire la fonction g définie sur l'intervalle $I - x_0 = \{x - x_0 : x \in I\}$ par $g(y) = f(y + x_0), y \in I - x_0$. On écrit alors le développement limité de g en 0 (s'il existe) :

$$g(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n + y^n \varepsilon(y) \text{ où } \varepsilon(y) \to 0 \text{ quand } y \to 0.$$

On en déduit en posant $x = y + x_0$

$$f(x) = g(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \alpha(x)$$

où on a noté $\alpha(x) = \varepsilon(x - x_0)$, qui tend vers 0 quand x tend vers x_0. On obtient ainsi le développement limité de f en x_0.

A la lumière de la remarque qui précède, et pour simplifier la présentation des calculs dans les preuves des propositions à venir, on ne considère que des développements limités en 0. Mais vous saurez généraliser sans peine dans les exercices aux développements limités en des points différents de 0.

Dans la suite, lorsqu'on écrit "on considère le développement limité à l'ordre n de f en 0 : $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$", il est sous-entendu qu'ici que

1. f est défini sur un intervalle contenant 0,
2. P désigne un polynôme de degré n (on a vu que s'il en existe un, alors il est unique),
3. ε tend vers 0 quand x tend vers 0.

Proposition 31 (Somme et produit par un réel de développements limités) *Soient f et g deux fonctions ayant pour développements limités à l'ordre n au point 0*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \text{ et } g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors le développement limité de $f + g$ à l'ordre n au point 0 est

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, celui de λf est

$$(\lambda f)(x) = (\lambda P)(x) + x^n (\lambda \varepsilon_1)(x).$$

Preuve : Vous pouvez écrire la preuve seul. Vous observerez notamment que les polynômes $P + Q$ et λP sont bien de degré n, et que les fonctions ε et $\lambda\varepsilon_1$ tendent bien vers 0 en 0.

□

Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, x \in \mathbb{R}$ est un polynôme et $p \in \mathbb{N}$, alors le polynôme tronqué à l'ordre p est

$$T_p(P)(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p \text{ si } p \leq n, \\ P(x) \text{ si } p \geq n. \end{cases}$$

Donc $T_p(P)$ est un polynôme de degré au plus p (il se peut que $a_p = 0$).

Exercice 66 *1. Si P et Q sont des polynômes de degré resp. $n, m \geq p$, alors $T_p(P + Q) = T_p(P) + T_p(Q)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}, T_p(\lambda P) = \lambda T_p(P)$.*

2. Si f a pour développement limité $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ à l'ordre n en 0, et $p \in \{0, \ldots, n\}$, alors le développement limité de f à l'ordre p en 0 est $f(x) = T_p(P)(x) + x^p \alpha(x)$ avec α à déterminer.

3. Si P est un polynôme de degré $n \geq 1$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$, alors P a un développement limité à l'ordre p en 0 de la forme

$$P(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x),$$

avec ε à déterminer.

Rappelons avant de poursuivre que le produit de deux polynômes est un polynôme : si $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x_j$, alors

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = (\sum_{i=0}^m a_i x^i)(\sum_{j=0}^n b_j x^j) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{m+n} x^k \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} a_i b_j.$$

Dans le cas particulier $n = m$, on a donc

$$(PQ)(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Proposition 32 *Soient f et g deux fonctions ayant pour développements limités à l'ordre n au point 0*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \text{ et } g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors fg admet un développement limité à l'ordre n au point 0 de la forme

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0.

Preuve : On a pour tout $x \in I$

$$(fg)(x) = P(x)Q(x) + x^n(P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)).$$

On peut écrire

$$P(x)Q(x) = (PQ)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon_3(x)$$

avec $\varepsilon_3(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon_4(x)$$

avec

$$\varepsilon_4(x) = \varepsilon_3(x) + P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x).$$

En utilisant le fait que P et Q sont continus en 0 et que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tendent vers 0 en 0, les théorèmes sur les limites de somme et de produit permettent de conclure que ε_4 tend vers 0 en 0, d'où la proposition.

$\square$

Remarque 2 *Si au lieu de multiplier deux fonctions, on multiplie trois fonctions f, g, h ayant chacune un développement limité :*

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x) \quad , \quad g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x) \quad \text{et} \quad h(x) = R(x) + x^n\varepsilon_3(x),$$

alors le produit fgh admet un développement limité de la forme

$$(fgh)(x) = T_n(PQR)(x) + x^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0.

En effet, on écrit d'abord grâce à la proposition précédente appliquée aux fonctions f et g :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n\varepsilon_4(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0.$$

On réapplique la proposition précédente, cette fois aux fonctions fg et h :

$$((fg)h)(x) = T_n(T_n(PQ)T_n(R)) + x^n\varepsilon_5(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0.$$

Il reste à voir que $T_n(T_n(PQ)T_n(R)) = T_n(PQR)$. C'est une conséquence de l'exercice suivant :

Exercice 67 *Soient $P : x \mapsto \sum_{i=1}^m a_i x^i$ et $Q : x \mapsto \sum_{j=1}^n b_j x^j$ deux polynômes. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$T_p(PQ)(x) = T_p(T_p(P)T_p(Q))(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bien sûr, la remarque 2 se généralise à un nombre fini quelconque de facteurs.

Rappelons aussi que la composée de deux polynômes est un polynôme. En effet, si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$ et $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_qx^q$, alors

$$P \circ Q(x) = a_0 + a_1Q(x) + \cdots + a_p(Q(x))^p.$$

Or, le produit de deux polynômes est un polynôme. On en déduit que pour tout $k \geq 2$, le produit de k polynômes est un polynôme (par récurrence sur k). En particulier, un polynôme multiplié k fois par lui-même est encore un polynôme. Donc $P \circ Q$ est un polynôme comme somme de polynômes.

Proposition 33 *Soient f et g deux fonctions ayant pour développements limités à l'ordre n au point 0*

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x) \text{ et } g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x).$$

On suppose que la composée $f \circ g$ est bien définie et que $g(0) = 0$. Alors $f \circ g$ admet un développement limité de à l'ordre n au point 0 de la forme

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0.

Preuve : Supposons d'abord que $n = 0$. Alors P est constant, $P(x) = f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $(P \circ Q)(x) = f(0) = T_0(P \circ Q)$. Comme $g(0) = 0$, on a $(f \circ g)(0) = f(0)$. En utilisant que $f \circ g$ est continu en 0, on peut écrire

$$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(0) + \varepsilon(x) = T_0(P \circ Q)(0) + \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0.

Supposons maintenant $n \geq 1$. Il existe $a_0, \ldots, a_n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$. On a

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + (g(x))^n \varepsilon_1(g(x)).$$

De plus,

$$P(g(x)) = a_0 + a_1 g(x) + a_2 (g(x))^2 + \cdots + a_n (g(x))^n.$$

Par les deux propositions précédentes sur les sommes et produits de développements limités, et aussi en utilisant la remarque 2, on sait que

$$P(g(x)) = a_0 + a_1 Q + a_2 T_n(Q^2) + \cdots + a_n T_n(Q^n) + x^n \varepsilon_3(x)$$

où ε_3 est une fonction qui tend vers 0 en 0. Autrement dit,

$$P(g(x)) = T_n(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + \cdots + a_n Q^n) + x^n \varepsilon_3(x) = T_n(P \circ Q) + x^n \varepsilon_3(x).$$

Par ailleurs, $g(0) = 0$ donc le terme constant de Q est nul. Il existe $b_1, \ldots, b_n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n$. Ainsi,

$$g(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x) = x h(x)$$

en notant $h(x) = b_1 + \cdots + b_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x)$. Alors

$$(g(x))^n = x^n (h(x))^n$$

et finalement

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q) + x^n \varepsilon_3(x) + x^n (h(x))^n \varepsilon_1(g(x)) = T_n(P \circ Q) + x^n \varepsilon_4(x),$$

en posant

$$\varepsilon_4(x) = \varepsilon_3(x) + (h(x))^n \varepsilon_1(g(x)).$$

Quand x tend vers 0, ε_1 et g tendent vers 0 donc par composition, $\varepsilon_1 \circ g$ aussi. En utilisant les théorèmes sur les limites des sommes et produits, la fonction h tend vers b_1, donc la fonction $h^n \varepsilon_1 \circ g$ tend vers 0, et aussi ε_4, d'où la proposition.

$\square$

En utilisant cette dernière proposition et le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, on peut calculer le développement limité de l'inverse d'une fonction :

Proposition 34 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ayant pour développement limité à l'ordre n au point 0*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

On suppose que f ne s'annule pas sur I. Alors $\frac{1}{f}$ admet un développement limité de à l'ordre n au point 0.

Preuve : Comme $f(0) = P(0) \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{P(x) + x^n \varepsilon(x)} = \frac{1}{P(0)} \frac{1}{1 + \frac{P(x) - P(0) + x^n \varepsilon(x)}{P(0)}}.$$

On utilise ensuite le développement limité de la fonction $g : y \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{1-y}$

$$g(y) = \sum_{k=0}^{n} y^k + y^n \varepsilon_1(y) = Q(y) + y^n \varepsilon_1(y),$$

où $Q(y) = \sum_{k=0}^{n} y^k$ et ε_1 est une fonction qui tend vers 0 en 0. On pose $\varepsilon_2(x) = -\frac{\varepsilon(x)}{P(0)}$et on considère la fonction $h : x \mapsto -\frac{P(x)}{P(0)} + 1 + x^n \varepsilon_2(x)$. Elle est continue en 0 et $h(0) = 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]-\eta, \eta[$, on a $|h(x)| < 1$. On peut donc écrire pour tout $x \in]-\eta, \eta[$:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{P(0)} g \circ h(x).$$

Par construction, h admet un développement limité à l'ordre n en 0. Comme c'est aussi le cas de g, par le théorème de composition des développements limités,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{P(0)} (T_n(Q \circ R)(x)) + x^n \varepsilon_3(x),$$

en posant $R(x) = -\frac{P(x)}{P(0)} + 1$ et où ε_3 est une fonction qui tend vers 0 en 0. L'égalité précédente est vraie seulement sur $I \cap]-\eta, \eta[$. Pour qu'elle reste vraie sur I tout entier, il suffit d'étendre ε_3 en posant pour tout $x \in I \setminus]-\eta, \eta[$:

$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{P(0)} (T_n(Q \circ R)(x)) \right).$$

Cela ne change pas le fait que ε_3 tend vers 0 en 0. En conclusion, $\frac{1}{f}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

□

Exercice 68 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner les développements limités à l'ordre n des fonctions* $\exp, \cos, \sin$ *puis des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^a$ (où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre), $x \mapsto \ln(1+x)$.*

5.3 Exercices supplémentaires

Exercice 69 *Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.*

1. *Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle de classe C^1 ?*
2. *Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle de classe C^2 ?*

Exercice 70 *Montrer que pour tout $x > 0$, on a*

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} \leq (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

Exercice 71

1. *Développement limité de $x \mapsto \exp(x-1)$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le développement limité de $x \mapsto \exp x$ à l'ordre 3 au point -1.*

2. *Développement limité de* $x \mapsto \sqrt{x}$ *à l'ordre* 2 *au point* 4.
3. *Développement limité à l'ordre* 2 *de* $x \mapsto \ln x$ *au point* e.
4. *Développement limité à l'ordre* 3 *de* $x \mapsto \arctan \frac{1}{1-x}$ *au point* 0.
5. *Développement limité à l'ordre* 7 *de* $x \mapsto x^4 - 1$ *au point* 0 *puis au point* -1.
6. *Développement limité à l'ordre* 3 *de* $x \mapsto \sin x - \cos x + \tan x + \frac{1}{1-x}$ *au point* 0.
7. *Développement limité à l'ordre* 3 *de* $x \mapsto \ln \sin x$ *au point* $\frac{\pi}{2}$.
8. *Développement limité à l'ordre* 4 *de* $x \mapsto (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}$ *au point* 0.
9. *Développement limité à l'ordre* 4 *de* $x \mapsto e^{\cos x}$ *au point* 0.

Exercice 72 *On définit* f *sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. *Montrer que* f *se prolonge par continuité en* 0 *puis donner le développement limité à l'ordre* 3 *en* 0 *de* f.

Exercice 73 *Soit* $0 < \alpha < 1$. *Calculer la limite de* $f(x) = (x+3)^\alpha - (x+1)^\alpha$ *en* $+\infty$.

Exercice 74 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x.$$

Exercice 75 *Montrer que les fonctions suivantes, définies sur* $\mathbb{R}^*$, *se prolongent par continuité en* 0 *:*

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1+x^2} - \cos x)$,
2. $g : x \mapsto \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$,
3. $h : x \mapsto \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2}$,
4. $i : x \mapsto \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Exercice 76 *On définit* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. *Montrer que* f *se prolonge par continuité en* 0 *puis que* f *admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 77 *Soit* $n \geq 1$ *et* $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ *le développement limité de* f *à l'ordre* n *en* 0 *(donc* P *est un polynôme de degré* n *et la fonction* ε *tend vers* 0 *en* 0*). Montrer que si* f *est paire (resp. impair), alors* P *est pair (resp. impair).*

Exercice 78 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *telle que* $f(0) = 0$. *Calculer la limite de*

$$\frac{f(x) + f(-x)}{x^2}$$

quand x *tend vers* 0.

Exercice 79 *Soit* f *une fonction qui admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n *: il existe un polynôme* P *de degré* n *et une fonction* ε *qui tend vers* 0 *en* 0 *telle que pour tout* $x \in I$, *on a* $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$. *On suppose que* f *admet une primitive* F. *Le but de cet exercice est de montrer que* F *admet un développement limité à l'ordre* $n+1$ *en* 0.

1. *Montrer qu'il existe un unique polynôme* Q *de degré* $n+1$ *tel que* $Q' = P$ *et* $Q(0) = F(0)$.
2. *Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction* $F - Q$ *entre un point* $x \neq 0$ *et* 0 *puis conclure.*

Exercice 80 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in I$. On dit que f admet un minimum local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, on a $f(x) \geq f(a)$.*

1. *Montrer que si f admet un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.*
2. *Montrer que si f vérifie : $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.*
3. *Donner un exemple de fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tels que $f'(a) = 0 = f''(a)$ et f n'admet pas un minimum local en a.*

Exercice 81 *On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \textit{ si } x \leq -1, \\ e^{\frac{1}{x^2-1}} \textit{ si } -1 < x < 1, \\ 0 \textit{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$,*
2. (a) *Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$,*

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux polynômes p_n et q_n tels que pour tout $x \in]-1,1[$*

   $$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

   On ne demande pas de calculer p_n et q_n mais seulement de montrer leur existence.

   (c) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f^{(n)}(x) = 0$.*
3. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. (Penser au théorème de prolongement dérivable !)*
4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le développement limité de f à l'ordre n au point 1.*

Exercice 82 *Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = a(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - \cos x.$$

1. *Calculer en fonction de a la limite de f en 0. En déduire que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.*

   Dans la suite, on note de nouveau f ce prolongement à $\mathbb{R}$. On note C_f le graphe de f.
2. *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.*
3. *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser en fonction de a la dérivée de f en 0.*
4. *Donner la tangente à C_f en $(0, f(0))$ et préciser en fonction de a la position locale de C_f par rapport à cette tangente.*

Chapitre 6

Résolution d'équations de la forme $f(x) = 0$

6.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Dans cette section, on se donne $a < b$.

Théorème 14 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Preuve : On procède par dichotomie : on construit par récurrence deux suites adjacentes : une suite croissante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite décroissante $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ contenues dans $[a, b]$ telles que $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ et $f(a_k)f(b_k) \leq 0$.

1. *initialisation* On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
2. *hérédité* On suppose construits $a_0 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k \leq \cdots \leq b_0$ tels que $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ et $f(a_k)f(b_k) \leq 0$. On construit a_{k+1} et b_{k+1}. On distingue 2 cas selon le signe de $f(\frac{a_k+b_k}{2})$: si $f(a_k)f(\frac{a_k+b_k}{2}) \leq 0$, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$. Sinon on pose $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ et $b_{k+1} = b_k$ (noter qu'on est forcément dans l'un des deux cas, puisque par hypothèse de récurrence, $f(a_k)$ et $f(b_k)$ sont de signe opposé ou l'un des deux est nul). Dans les deux cas, on a bien $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$, $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$ (par récurrence) et $f(a_{k+1})f(b_{k+1}) \leq 0$.
3. *conclusion* Les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont ainsi construites par récurrence et vérifient les propriétés demandées.

Comme les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune, notée l. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(a_k)f(b_k) \leq 0$. Par continuité de f, on a par passage à la limite $f(l)^2 \leq 0$. C'est donc que $f(l) = 0$.

□

Corollaire 2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $y \in [f(a), f(b)]$. Alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.*

Preuve : Posons $g : x \in [a, b] \to f(x) - y$. Alors g est continue sur $[a, b]$. De plus,

$$g(a)g(b) = (f(a) - y)(f(b) - y) \leq 0.$$

On applique le théorème précédent à g : il existe $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$. On en déduit $f(x) = y$.

□

Remarque 3 *Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $x, y \in I$, on a $[x, y] \subset I$.*

Preuve : par disjonction de cas, il suffit de le vérifier pour tous les types d'intervalles (ouvert, semi-ouvert, fermé, borné, majoré, minoré ou $\mathbb{R}$ tout entier).

$\square$

Corollaire 3 *Soit I un intervalle de R et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Preuve : Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ et $y \in]y_1, y_2[$. Montrons que $f(I)$ contient y. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Supposons par exemple que $x_1 < x_2$. On applique le théorème des valeurs intermédiaires à $f|_{[x_1,x_2]}$: il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$. On en déduit que $y \in f(I)$. D'après la remarque précédente,

Conclusion : $f(I)$ est un intervalle.

6.2 Image d'un segment par une application continue

Théorème 15 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.*

L'énoncé précédent veut dire qu'il existe $m, M \in f([a, b])$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$. Autrement dit, m est la valeur minimale de f sur $[a, b]$ et M est la valeur maximale de f sur $[a, b]$.

Preuve : Montrons que f est bornée sur $[a, b]$. Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{x \in [a, b] : |f(x)| \geq n\}$ soit non vide. Il existe donc $x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans $[a, b]$, par conséquent bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $l \in [a, b]$. Par continuité de $|f|$, $(|f(x_{\phi(n)})|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|f(l)|$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(x_{\phi(n)})| \geq n$, la suite $(|f(x_{\phi(n)})|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$: contradiction. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{x \in [a, b] : |f(x)| \geq n\}$ soit vide. Autrement dit, pour tout $x \in [a, b]$, on a $|f(x)| \leq n$.

Conclusion partielle : f est bornée.

Notons M la borne supérieure de $f([a, b])$. Montrons que $M \in f([a, b])$. Par caractérisation des bornes supérieures, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f([a, b])$ qui converge vers M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans $[a, b]$. Donc elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $l \in [a, b]$. Par continuité de f, la suite $(f(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$. Or $f(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$. De plus la suite $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M. On en déduit que $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers M. Par unicité de la limite $f(l) = M$. Ainsi, $M \in f([a, b])$.

On montrerait de même que la borne inférieure m de $f([a, b])$ est atteinte.

$\square$

Corollaire 4 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note m la valeur minimale de f et M la valeur maximale de f. Alors $f([a, b]) = [m, M]$.*

Preuve : Par le théorème précédent, $f([a, b]) \subset [m, M]$ et il existe $c, d \in [a, b]$ tel que $f(c) = m, f(d) = M$. Montrons l'inclusion réciproque $f([a, b]) \supset [m, M]$. Soit $y \in [m, M]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $f|_{[c,d]}$, il existe $x \in [c, d]$ tel que $f(x) = y$. Comme $[c, d] \subset [a, b]$, on a $x \in [a, b]$ et donc $y \in f([a, b])$. Ainsi $f([a, b]) \supset [m, M]$.

$\square$

6.3 Fonctions monotones

On considère un intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$ avec $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.
fonctions strictement monotones sont injectives

Proposition 35 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors elle admet une limite à gauche finie ou égale à $+\infty$ en β et une limite à droite finie ou égale à $-\infty$ en α.*

Preuve : On montre seulement la première assertion. On pose $B = f(I)$. Autrement dit

$$B = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in I \text{ tel que } y = f(x)\} = \{f(x), x \in I\}.$$

On distingue alors deux cas : si B est majoré ou non.

1^{er} **cas : B majoré** Alors l'ensemble B admet une borne supérieure, notée s. Montrons que f admet une limite à droite en β qui vaut s. Soit $\epsilon > 0$. Comme s est la borne supérieure de B, il existe $y \in B$ tel que $s - \epsilon \leq y \leq s$. Par définition de B, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Posons $\eta := \beta - x$. Alors $\eta > 0$ (car $x < \beta$). Pour tout $z \in [\beta - \eta, \beta[$, $f(z) \leq s$ puisque $f(z) \in B$ et s est un majorant de B. La croissance de f implique

$$s - \epsilon \leq y = f(x) = f(\beta - \eta) \leq f(z) \leq s.$$

Ainsi, f admet s comme limite à droite en b.

$2^{ème}$ **cas : B non majoré** Montrons que f tend vers $+\infty$ à droite en β. Soit $C > 0$. Comme B n'est pas majoré, il existe $y \in B$ tel que $y \geq C$. Par définition de B, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Posons $\eta := \beta - x$. Alors $\eta > 0$ (car $x < \beta$). Pour tout $z \in [\beta - \eta, \beta[$, la croissance de f implique

$$C \leq y = f(x) = f(\beta - \eta) \leq f(z).$$

Ainsi, f admet $+\infty$ comme limite à droite en β.

□

Proposition 36 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante. Alors $f(I) =]\mu, \nu[$ avec $\mu = \inf f(I)$ si f est minoré et $\mu = -\infty$ sinon ; $\nu = \sup f(I)$ si f est majoré et $\nu = +\infty$ sinon.*

Preuve : Comme l'image continue d'un intervalle est un intervalle, on sait que $f(I)$ est un intervalle. L'extrémité gauche d'un intervalle est sa borne inférieure s'il est minoré, $-\infty$ sinon. Appliquant ceci à $f(I)$, on en déduit que μ est l'extrémité gauche de $f(I)$. De même, μ est l'extrémité droite de $f(I)$. Il reste à montrer que $\nu \notin f(I)$ et $\mu \notin f(I)$.

Supposons par l'absurde que $\mu \in f(I)$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = \mu$. Soit $x \in]\alpha, c[$. Comme f est strictement monotone, $f(x) < f(c) = \mu$, ce qui contredit la définition de μ. Ainsi $\mu \notin f(]\alpha, \beta[)$. De même, $\nu \notin f(I)$.

Conclusion : $f(I) =]\mu, \nu[$.

□

On sait qu'une fonction strictement monotone $f : I \to \mathbb{R}$ est injective. Elle définit donc une fonction bijective sur son image. On peut vérifier facilement que son inverse est aussi strictement monotone. Plus remarquable : si f est *continue* stricement monotone, son inverse est aussi *continue* strictement monotone.

Proposition 37 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante. On définit μ et ν comme dans la proposition précédente et on note $J :=]\mu, \nu[$ et $g : J \to \mathbb{R}$ son inverse. Alors g est continue et strictement croissante.*

Preuve : Montrons d'abord que g est strictement croissante. Soient $y_1 < y_2$ deux points de J. Supposons par l'absurde que $g(y_1) \geq g(y_2)$. Alors comme f est croissante, on a $f(g(y_1)) \geq f(g(y_2))$ et donc $y_1 \geq y_2$: contradiction. Ainsi, g est strictement croissante.

Montrons que g est continue sur J. Soit $y_0 \in J$ et $\epsilon > 0$. On a $g(y_0) \in I$. Soit $\epsilon_1 \leq \epsilon$ tel que $[g(y_0) - \epsilon_1, g(y_0) + \epsilon_1] \subset I$. Notons $y_- = f(g(y_0) - \epsilon_1)$ et $y_+ = f(g(y_0) + \epsilon_1)$. On a donc $g(y_-) = g(y_0) - \epsilon_1)$ et $g(y_+) = g(y_0) + \epsilon_1)$. Comme f est strictement croissante $y_- < y_0 < y_+$. De plus, pour tout $y \in]y_-, y_+[$, on a

$$g(y_0) - \epsilon_1 = g(y_-) \leq g(y) \leq g(y_+) = g(y_0) + \epsilon_1,$$

et donc $|g(y) - g(y_0)| \leq \epsilon_1 \leq \epsilon$. Posons $\eta := \min(|y_0 - y_-|, |y_0 - y_+|)$. Alors pour tout $y \in]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$, on a $|g(y) - g(y_0)| \leq \epsilon$, ce qui montre la continuité de g en y_0.

Conclusion : g est continue et strictement croissante.

□

Exercice 83 *Généraliser et démontrer les 3 propositions précédentes au cas où f est définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$.*

6.4 Réciproque d'une fonction dérivable

Dans cette section, on se donne une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I et que la dérivée f' ne s'annule pas sur I : pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \neq 0$. On sait alors que f est strictement monotone sur I, et donc bijective de I sur $f(I)$. On a également vu $f(I)$ est un intervalle ouvert, noté J dans la suite et que sa réciproque $g : J \to I$ est continu. C'est l'objet de la proposition suivante d'étudier la dérivabilité de g :

Proposition 38 *On suppose que la fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ a une dérivée qui ne s'annule pas sur I. Alors sa réciproque $g : J := f(I) \to I$ est dérivable et pour tout $y \in J$,*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Preuve : Soit $y_0 \in J$ et montrons que g est dérivable en y_0. Comme f est dérivable en $x_0 := g(y_0)$, il existe $\epsilon : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 telle que pour tout $x\ inI \setminus \{x_0\}$, on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x).$$

Pour tout $y \in J \setminus \{y_0\}$, écrivons l'égalité précédente avec $x = g(y)$. On a en utilisant $f \circ g(y) = y$ et $y_0 = f(x_0)$:

$$y - y_0 = (f'(g(y_0)) + \epsilon(g(y)))(g(y) - g(y_0)).$$

En particulier, si $y \neq y_0$, alors $f'(g(y_0)) + \epsilon(g(y)) \neq 0$. On peut donc écrire

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(g(y_0)) + \epsilon(g(y))}.$$

La fonction g tend vers $g(y_0) = x_0$ en y_0. Donc la fonction $\epsilon \circ g$ qui est définie sur $J \setminus \{y_0\}$ tend vers 0 en y_0 (par théorème de limite de fonctions composées). On en déduit que le quotient $y \mapsto \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ tend vers $\frac{1}{f'(g(y_0))}$ en y_0.

Conclusion : g est dérivable en y_0 et $g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$.

□

On retrouve facilement la formule en dérivant $(f \circ g)'$