

Chaines de Markov

Clément Pellegrini

clement.pellegrini@math.univ-toulouse.fr

Institut de Mathématiques de Toulouse,
Equipe de Statistique et Probabilité,
Bureau 220 Bâtiment 1R1

- Les chaînes de Markov sont un objet central dans la théorie des probabilités
- Il s'agit de l'étude de suite de variables aléatoires (X_n) satisfaisant la propriété dite de Markov d'où leur nom.
- Ces variables aléatoires modélisent (décrivent) l'état d'un système dont l'évolution (la dynamique, les changements d'états) est aléatoire
- Ici $n \in \mathbb{N}$ représente le temps et X_n va représenter l'état du système au temps n .
- Ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes entre elles. La variable X_n dépend des variables précédentes (pas de toute comme nous allons le voir)

- Les chaînes de Markov sont un objet central dans la théorie des probabilités
- Il s'agit de l'étude de suite de variables aléatoires (X_n) satisfaisant la propriété dite de Markov d'où leur nom.
- Ces variables aléatoires modélisent (décrivent) l'état d'un système dont l'évolution (la dynamique, les changements d'états) est aléatoire
- Ici $n \in \mathbb{N}$ représente le temps et X_n va représenter l'état du système au temps n .
- Ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes entre elles. La variable X_n dépend des variables précédentes (pas de tout comme nous allons le voir)

- Les chaînes de Markov sont un objet central dans la théorie des probabilités
- Il s'agit de l'étude de suite de variables aléatoires (X_n) satisfaisant la propriété dite de Markov d'où leur nom.
- Ces variables aléatoires modélisent (décrivent) l'état d'un système dont l'évolution (la dynamique, les changements d'états) est aléatoire
- Ici $n \in \mathbb{N}$ représente le temps et X_n va représenter l'état du système au temps n .
- Ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes entre elles. La variable X_n dépend des variables précédentes (pas de toute comme nous allons le voir)

- Les chaînes de Markov sont un objet central dans la théorie des probabilités
- Il s'agit de l'étude de suite de variables aléatoires (X_n) satisfaisant la propriété dite de Markov d'où leur nom.
- Ces variables aléatoires modélisent (décrivent) l'état d'un système dont l'évolution (la dynamique, les changements d'états) est aléatoire
- Ici $n \in \mathbb{N}$ représente le temps et X_n va représenter l'état du système au temps n .
- Ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes entre elles. La variable X_n dépend des variables précédentes (pas de toute comme nous allons le voir)

- **Vaste champ d'application**
- **Physique, biologie, finance, outil d'aide à la prise de décision**
- Matrice google, proposition de contenu internet, maximisation de gain, contrôle stochastique (bandit manchot), apprentissage par renforcement, battage de cartes
- Elaboration de stratégie, description du comportement en temps long de phénomène complexe, mise en évidence de paradoxe, phénomène contre intuitif
- Nombreux développements dans le monde de la recherche statistique et probabiliste
- Champ d'investigation infini

- **Vaste champ d'application**
- Physique, biologie, finance, outil d'aide à la prise de décision
- Matrice google, proposition de contenu internet, maximisation de gain, contrôle stochastique (bandit manchot), apprentissage par renforcement, battage de cartes
- Elaboration de stratégie, description du comportement en temps long de phénomène complexe, mise en évidence de paradoxe, phénomène contre intuitif
- Nombreux développements dans le monde de la recherche statistique et probabiliste
- Champ d'investigation infini

- **Vaste champ d'application**
- Physique, biologie, finance, outil d'aide à la prise de décision
- Matrice google, proposition de contenu internet, maximisation de gain, contrôle stochastique (bandit manchot), apprentissage par renforcement, battage de cartes
- Elaboration de stratégie, description du comportement en temps long de phénomène complexe, mise en évidence de paradoxe, phénomène contre intuitif
- Nombreux développements dans le monde de la recherche statistique et probabiliste
- Champ d'investigation infini

- **Vaste champ d'application**
- Physique, biologie, finance, outil d'aide à la prise de décision
- Matrice google, proposition de contenu internet, maximisation de gain, contrôle stochastique (bandit manchot), apprentissage par renforcement, battage de cartes
- Elaboration de stratégie, description du comportement en temps long de phénomène complexe, mise en évidence de paradoxe, phénomène contre intuitif
- Nombreux développements dans le monde de la recherche statistique et probabiliste
- Champ d'investigation infini

- Généralité - Définitions
- Propriété de Markov
- Classification des états
- Mesure invariante - Théorèmes limites

GENERALITE - DEFINITIONS

- Dans tout ce qui suit on travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Dans tout ce qui suit E désignera un ensemble fini ou dénombrable.
L'ensemble E correspond aux états d'un certain système.
 - Etat de la météo
 - Valeur d'un objet - état du stock
 - Position d'une particule - nombre de particules
 - Action
- Comme E est fini ou dénombrable on dit que l'ensemble est discret.

- Dans tout ce qui suit on travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Dans tout ce qui suit E désignera un ensemble fini ou dénombrable. **L'ensemble E correspond aux états d'un certain système.**
 - Etat de la météo
 - Valeur d'un objet - état du stock
 - Position d'une particule - nombre de particules
 - Action
- Comme E est fini ou dénombrable **on dit que l'ensemble est discret.**

- Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoire (X_n)

$$X_n : \Omega \rightarrow E$$

- La famille de v.a (X_n) va décrire l'évolution de l'état de notre système.
- La donnée de X_0, X_1, \dots, X_n correspond à la suite d'état occupée par le système jusqu'au temps n . **On parle de trajectoire de la CM jusqu'au temps n .**
- Lorsque l'on parle de simulation ou de réalisation de la CM, on parle de la succession des états pris par la CM c'est à dire la donnée de

$$X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$$

Definition

Soit (X_n) une suite de v.a à valeurs dans un espace E .

On dit que (X_n) est une chaîne de Markov CM si pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j) \in E^{n+1}$ on a

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Definition

Si de plus

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = \mathbb{P}[X_1 = j | X_0 = i]$$

pour tout n alors on dit que la chaîne de Markov est homogène CMH.

♣ On dit que conditionnellement au **présent** le **futur** est indépendant du **passé**. On parle d'**absence de mémoire**.

Definition

Soit (X_n) une suite de v.a à valeurs dans un espace E .

On dit que (X_n) est une chaîne de Markov CM si pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j) \in E^{n+1}$ on a

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Definition

Si de plus

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = \mathbb{P}[X_1 = j | X_0 = i]$$

pour tout n alors on dit que la chaîne de Markov est homogène CMH.

♣ On dit que conditionnellement au **présent** le **futur** est indépendant du **passé**. On parle d'**absence de mémoire**.

On peut voir qu'une CMH (X_n) peut toujours s'écrire sous la forme

$$X_{n+1} = f(X_n, \epsilon_n), n \in \mathbb{N}$$

avec (ϵ_n) une suite de v.a.i.i.d indépendante de X_0 .

C'est un moyen pratique de montrer qu'une suite (X_n) est une CM.

Definition

Soit (X_n) une CMH, la matrice P définie par

$$P(i, j) = \mathbb{P}[X_1 = j | X_0 = i], i, j \in E$$

s'appelle la matrice de transition de (X_n) .

La matrice P est appelée **matrice de transition**.

Définitions

- ♣ La somme des lignes est égale à 1

$$\sum_{j \in E} P(i, j) = 1$$

- ♣ Lorsque la somme des colonnes est aussi égale à 1 on dit que la matrice P est bistochastique.

♣ Si E est fini, par exemple de cardinal d , on peut toujours numéroter les éléments de E arbitrairement de 1 à d , et ainsi assimiler E avec l'ensemble $\{1, \dots, d\}$.

- ♣ P est alors représentée par la matrice de transition $d \times d$

$$P = \begin{pmatrix} P(1, 1) & \cdots & P(1, d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(d, 1) & \cdots & P(d, d) \end{pmatrix}$$

- ♣ La somme des lignes est égale à 1

$$\sum_{j \in E} P(i, j) = 1$$

- ♣ Lorsque la somme des colonnes est aussi égale à 1 on dit que la matrice P est bistochastique.
- ♣ Si E est fini, par exemple de cardinal d , on peut toujours numéroter les éléments de E arbitrairement de 1 à d , et ainsi assimiler E avec l'ensemble $\{1, \dots, d\}$.
- ♣ P est alors représentée par la matrice de transition $d \times d$

$$P = \begin{pmatrix} P(1,1) & \cdots & P(1,d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(d,1) & \cdots & P(d,d) \end{pmatrix}$$

- ♣ La somme des lignes est égale à 1

$$\sum_{j \in E} P(i, j) = 1$$

- ♣ Lorsque la somme des colonnes est aussi égale à 1 on dit que la matrice P est bistochastique.
- ♣ Si E est fini, par exemple de cardinal d , on peut toujours numéroter les éléments de E arbitrairement de 1 à d , et ainsi assimiler E avec l'ensemble $\{1, \dots, d\}$.
- ♣ P est alors représentée par la matrice de transition $d \times d$

$$P = \begin{pmatrix} P(1, 1) & \cdots & P(1, d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(d, 1) & \cdots & P(d, d) \end{pmatrix}$$

Ici on va chercher à simuler la CMH avec la formulation

$$X_{n+1} = f(X_n, \epsilon_{n+1})$$

avec $\epsilon_j \sim \pi$

Méthode

$X_0 =$ simulation selon la loi ν ;

pour i entre 1 et n ,

$\epsilon_i =$ simulation selon la loi π ;

$X_i = f(X_{i-1}, \epsilon_i)$;

sortir (X_0, \dots, X_n) ;

Dans le cas où E est encodé par l'ensemble $\{1, \dots, d\}$, on rappelle que la loi de X_{i+1} sachant X_i est la mesure sur $\{1, \dots, d\}$ avec pour probas les coefficients

$$(P(X_i, 1), \dots, P(X_i, d))$$

de la X_i -ème ligne de la matrice P .

Pour simuler une chaîne de Markov définie par la loi initiale ν de X_0 et une matrice de transition P (comme dans la définition 1.3), on peut donc écrire le code suivant.

Méthode

$X_0 = \text{simulation selon la loi discrete } \nu;$

pour i entre 1 et n ,

$X_i = \text{simulation selon la loi discrete } (P(X_{i-1}, 1), \dots, P(X_{i-1}, d));$

sortir $(X_0, \dots, X_n);$

Proposition

La loi d'une CMH (X_n) est entièrement déterminée par sa matrice de transition et sa loi initiale $\mu_0(i) = \mathbb{P}[X_0 = i]$, $i \in E$ on a

$$\mathbb{P}[X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0] = P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mu_0(i_0)$$

pour tout i_n, \dots, i_0 élément de E .

Preuve:

Proposition

Chapman Kolmogorov: pour tout $i, j \in E$ et pour tout n, m

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = j | X_0 = i_0] = \sum_{k \in E} \mathbb{P}[X_m = j | X_0 = k] \mathbb{P}[X_n = k | X_0 = i_0]$$

En particulier $\mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] = P^n(i, j)$ et

$$X_n \sim \mu P^n, n \in \mathbb{N}$$

avec μ la mesure initiale de X_0

Exemple

A Hong Kong, il existe 6 classes de tarification, de 1 (fort bonus) à 6 (fort malus)

Si un assuré n'a pas eu de sinistre, il passe de i à $\max\{1, i - 1\}$

Si l'assuré a eu au moins un sinistre, il passe de i à 6.

On note p la probabilité de ne pas avoir de sinistre

Exemple

A Hong Kong, il existe 6 classes de tarification, de 1 (fort bonus) à 6 (fort malus)

Si un assuré n'a pas eu de sinistre, il passe de i à $\max\{1, i - 1\}$

Si l'assuré a eu k sinistres, il passe de i à $\min\{6, i + k\}$.

Si le nombre de sinistres suit une loi de Poisson. On note

$$p_k = P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$$

et

$$\bar{p}_k = p_0 + \dots + p_k,$$

Exemple

Deux joueurs jouent à pile ou face, chaque fois que X gagne, il touche 1 de Y , et réciproquement.

Ils partent respectivement d'un capital X_0 et Y_0 , et le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.

La fortune d'un joueur prend les valeurs $\{0, 1, 2, \dots, X_0 + Y_0\}$.

Exemple

On considère une file d'attente. A chaque date n arrive un nouveau client avec probabilité p et pas de client avec probabilité $1 - p$. Un client dans la file qui se fait servir quitte la file avec probabilité q , ou attend encore avec probabilité $1 - q$.

On note X_n le nombre de clients présents dans la file à la date n . (X_n) est une chaîne de Markov

Séries de succès : des candidats doivent répondre à une suite de questions de difficulté variable, les performances des différents candidats sont indépendantes.

La probabilité pour chaque candidat de bien répondre à une question de niveau k est p_k , celle de donner une réponse fausse est $q_k = 1 - p_k$. Lorsqu'un candidat donne une réponse fausse, il est remplacé par le candidat suivant qui démarre au niveau 0. X_n représente le niveau atteint par le candidat en lice à l'instant n

Exemple

Modèle de diffusion gazeuse :

On considère une enceinte faite de deux compartiments séparés par une cloison poreuse. Au départ le compartiment de gauche contient a molécules de gaz de type A, celui de droite b molécules de gaz de type B. On modélise la diffusion au travers de la paroi en supposant qu'à chaque instant, il y a tirage au hasard d'une molécule dans chaque compartiment et échange des deux molécules tirées.

La composition des deux urnes après le n -ième échange est complètement déterminée par la donnée de la variable X_n nombre de molécules de gaz A dans l'urne de gauche.

Processus de branchement :

de nombreux exemples de chaînes de Markov interviennent en génétique (modèles de reproduction) et en physique (désintégrations atomiques).

On suppose qu'à la fin de son existence chaque organisme i de la n -ième génération donne naissance à un nombre aléatoire $Y_{i,n}$ de descendants.

Les variables aléatoires $(Y_{i,n})$ sont supposées indépendantes et de même loi. Le nombre X_n d'organismes de la n -ième génération vérifie

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_{i,n}$$

Promenades aléatoires

Soit $(Y_n), n \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans \mathbb{Z} (ou \mathbb{Z}^d).

Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} (ou \mathbb{Z}^d), indépendante des (Y_n) , on pose

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n Y_i$$

pour tout entier $n \geq 1$.

(X_n) est une CMH.

PROPRIETE DE MARKOV

Definition

Soit (X_n) une CMH, on pose

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

Un temps d'arrêt τ est une v.a $\Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

ou de manière équivalente

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Rappel, dans notre cadre

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\}, i_0, \dots, i_n \in E)$$

Exemple $\tau = \inf\{n, X_n = i\}$ pour $i \in E$

Théorème

MARKOV FAIBLE.

Soit (X_n) une CMH et soit $m \in \mathbb{N}$.

Conditionnellement à l'événement $\{X_m = i\}$ la suite de v.a $(X_{n+m})_{n \geq 0}$ est une CMH de matrice de transition P et de loi initiale δ_i et indépendante de (X_0, \dots, X_m)

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, X_m = i_0 \cap A | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[A | X_m = i]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_m = \sigma(\{X_0, \dots, X_m\})$.

En effet être indépendant d'une famille de v.a c'est être indépendant de la tribu engendrée par cette famille de v.a

Théorème

MARKOV FAIBLE.

Soit (X_n) une CMH et soit $m \in \mathbb{N}$.

Conditionnellement à l'événement $\{X_m = i\}$ la suite de v.a $(X_{n+m})_{n \geq 0}$ est une CMH de matrice de transition P et de loi initiale δ_i et indépendante de (X_0, \dots, X_m)

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, X_m = i_0 \cap A | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[A | X_m = i]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_m = \sigma(\{X_0, \dots, X_m\})$.

En effet être indépendant d'une famille de v.a c'est être indépendant de la tribu engendrée par cette famille de v.a

- On cherche à démontrer que

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, X_m = i_0 \cap A | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[A | X_m = i]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_m = \sigma(\{X_0, \dots, X_m\})$.

- Pour cela il suffit de se restreindre aux ensembles qui engendrent la tribu **ceci est un fait général qui simplifie les calculs**. On considère un ensemble

$$A = \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\}$$

pour tout x_0, \dots, x_m

- On veut donc montrer que

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0 \cap \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[\{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i]$$

- On cherche à démontrer que

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, X_m = i_0 \cap A | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[A | X_m = i]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_m = \sigma(\{X_0, \dots, X_m\})$.

- Pour cela il suffit de se restreindre aux ensembles qui engendrent la tribu **ceci est un fait général qui simplifie les calculs**. On considère un ensemble

$$A = \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\}$$

pour tout x_0, \dots, x_m

- On veut donc montrer que

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0 \cap \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[\{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i]$$

- On cherche à démontrer que

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, X_m = i_0 \cap A | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[A | X_m = i]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_m = \sigma(\{X_0, \dots, X_m\})$.

- Pour cela il suffit de se restreindre aux ensembles qui engendrent la tribu **ceci est un fait général qui simplifie les calculs**. On considère un ensemble

$$A = \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\}$$

pour tout x_0, \dots, x_m

- On veut donc montrer que

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0 \cap \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[\{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i]$$

- Reprenons

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0 \cap \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[\{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i]$$

- La condition $X_m = x_m, X_m = i_0, X_m = i$ revient à imposer $x_m = i_0 = i$
tous les autres cas sont triviaux (on trouve $0 = 0$)
- On est donc ramener à montrer

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0]$$

- Reprenons

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0 \cap \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[\{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i]$$

- La condition $X_m = x_m, X_m = i_0, X_m = i$ revient à imposer $x_m = i_0 = i$ tous les autres cas sont triviaux (on trouve 0 = 0)
- On est donc ramener à montrer

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0]$$

- Reprenons

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0 \cap \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[\{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\} | X_m = i]$$

- La condition $X_m = x_m, X_m = i_0, X_m = i$ revient à imposer $x_m = i_0 = i$ tous les autres cas sont triviaux (on trouve $0 = 0$)
- On est donc ramener à montrer

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0]$$

Définitions

- Reprenons, on veut montrer

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] = P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0]$$

- On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \frac{\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_m = i_0]} &= \\ \frac{\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0]}{P[X_m = i_0, \dots, X_0 = x_0, X_m = i_0]} \times & \\ \frac{P[X_m = i_0, \dots, X_0 = x_0, X_m = i_0]}{\mathbb{P}[X_m = i_0]} &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0, \dots, X_0 = x_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] & \end{aligned}$$

Définitions

- Reprenons, on veut montrer

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] = P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0]$$

- On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \frac{\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_m = i_0]} &= \\ \frac{\mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_m = i_0, \dots, X_0 = x_0, X_m = i_0]} \times & \\ \frac{\mathbb{P}[X_m = i_0, \dots, X_0 = x_0, X_m = i_0]}{\mathbb{P}[X_m = i_0]} &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0, \dots, X_0 = x_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] & \end{aligned}$$

Définitions

- On va utiliser le caractère markovien et Chapman Kolomogorov
- A ce stade on a donc montré

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \end{aligned}$$

- En utilisant Chapman Kolmogorov car la CM est homogène on a le résultat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0] & \end{aligned}$$

Définitions

- On va utiliser le caractère markovien et Chapman Kolomogorov
- A ce stade on a donc montré

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \end{aligned}$$

- En utilisant Chapman Kolmogorov car la CM est homogène on a le résultat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0] & \end{aligned}$$

- On va utiliser le caractère markovien et Chapman Kolomogorov
- A ce stade on a donc montré

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_{m+1} = i_1, | X_m = i_0] \times & \\ \mathbb{P}[X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \end{aligned}$$

- En utilisant Chapman Kolmogorov car la CM est homogène on a le résultat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+m} = i_n, \dots, X_m = i_0, X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_m = i_0] &= \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{m-1} = x_{m-1} | X_m = i_0] & \end{aligned}$$

Un peu de conditionnement discret

Par définition, pour deux évènements A et B

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B]}{P[B]}$$

On généralise cette notion pour une variable aléatoire X . On définit

$$\mathbb{E}[f(X)|B] = \frac{\mathbb{E}[f(X)\mathbf{1}_B]}{P[B]}$$

Un peu de conditionnement discret

Par définition, pour deux évènements A et B

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B]}{P[B]}$$

On généralise cette notion pour une variable aléatoire X . On définit

$$\mathbb{E}[f(X)|B] = \frac{\mathbb{E}[f(X)\mathbf{1}_B]}{P[B]}$$

Conditionnement

Rappelons nous la formule des probabilités totales.

Soit I un ensemble fini ou dénombrable et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une partition de Ω c'est à dire

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j, \quad \mathbb{P}[\Omega_i] \neq 0$$

♣ Soit A un évènement

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i \in I} \mathbb{P}[A|\Omega_i]\mathbb{P}[\Omega_i] \quad (1)$$

♣ On a la même formule

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[f(X)|\Omega_i]\mathbb{P}[\Omega_i] \quad (2)$$

Conditionnement

Rappelons nous la formule des probabilités totales.

Soit I un ensemble fini ou dénombrable et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une partition de Ω c'est à dire

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j, \quad \mathbb{P}[\Omega_i] \neq 0$$

♣ Soit A un évènement

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i \in I} \mathbb{P}[A|\Omega_i]\mathbb{P}[\Omega_i] \quad (1)$$

♣ On a la même formule

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[f(X)|\Omega_i]\mathbb{P}[\Omega_i] \quad (2)$$

Conditionnement

Comment allons nous utiliser cette formule

Soit X une v.a et Y une v.a à valeur dans l'espace E on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i \in E} \mathbb{E}[f(X)|Y = i] \mathbb{P}[Y = i] \quad (3)$$

Qu'est ce qu'il en est dans le cadre Markov? On souhaite souvent calculer

$$\mathbb{E}_x[g((X_{n+1}))] = \mathbb{E}[g((X_{n+1}))|X_0 = x], \text{ avec } g : \Omega^{\mathbb{N}} \rightarrow E.$$

C'est à dire que $g((X_{n+1}))$ est potentiellement une fonction de tout le processus.

$$Ex : T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}$$

où A désigne un évènement. Rq T_A est un temps d'arrêt.

Conditionnement

Comment allons nous utiliser cette formule

Soit X une v.a et Y une v.a à valeur dans l'espace E on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i \in E} \mathbb{E}[f(X)|Y = i] \mathbb{P}[Y = i] \quad (3)$$

Qu'est ce qu'il en est dans le cadre Markov? On souhaite souvent calculer

$$\mathbb{E}_x[g((X_{n+1}))] = \mathbb{E}[g((X_{n+1}))|X_0 = x], \text{ avec } g : \Omega^{\mathbb{N}} \rightarrow E.$$

C'est à dire que $g((X_{n+1}))$ est potentiellement une fonction de tout le processus.

$$Ex : T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}$$

où A désigne un évènement. Rq T_A est un temps d'arrêt.

Conditionnement

Comment allons nous utiliser cette formule

Soit X une v.a et Y une v.a à valeur dans l'espace E on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i \in E} \mathbb{E}[f(X)|Y = i] \mathbb{P}[Y = i] \quad (3)$$

Qu'est ce qu'il en est dans le cadre Markov? On souhaite souvent calculer

$$\mathbb{E}_x[g((X_{n+1}))] = \mathbb{E}[g((X_{n+1}))|X_0 = x], \text{ avec } g : \Omega^{\mathbb{N}} \rightarrow E.$$

C'est à dire que $g((X_{n+1}))$ est potentiellement une fonction de tout le processus.

$$Ex : T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}$$

où A désigne un évènement. Rq T_A est un temps d'arrêt.

Pour cela on conditionne "souvent" par rapport à la première valeur prise par notre chaîne de Markov. On obtient alors la formule suivante en utilisant la propriété de Markov

$$E_x[g((X_{n+1}))] = \sum_{y \in E} E_y[g((X_n))]P(x, y) \quad (4)$$

Si on pose $u_n(x) = E_x[g((X_n))]$ pour tout $x \in E$ on a la formule

$$u_{n+1}(x) = (Pu_n)(x)$$

où Pu_n correspond au produit de la matrice de transition P par le vecteur u_n

Détaillons le cas fini.

Theorem

Soit $g : E^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et soit (X_n) une CMH alors si $\mathbb{E}[|g((X_{n+1}))|] < \infty$ on a

$$\mathbb{E}_x[g((X_{n+1}))] = \sum_{y \in E} E_y[g((X_n))]P(x, y)$$

En définissant le vecteur colonne $u_n(x) = E_x[g((X_n))]$ pour $x \in E$ on a

$$u_{n+1} = Pu_n$$

$$u_n = \begin{pmatrix} u_n(1) \\ \vdots \\ u_n(i) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Application

On considère

$$T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}, \text{ et } S_A(X_n) = \inf\{n \geq 1, X_n \in A\}$$

On pose pour tout $x \in E$ $z(x) = P_x(T_A(X_n) < \infty)$ alors on a

$$z(x) = 1, \text{ si } x \in A, \text{ et}$$

$$z(x) = Pz(x) \text{ si } x \notin A$$

De la même manière si on pose pour tout $x \in E$ $u(x) = \mathbb{E}_x[T_A]$ on a

$$u(x) = 0, \text{ si } x \in A, \text{ et}$$

$$u(x) = 1 + Pu(x) \text{ si } x \notin A$$

Application

On considère

$$T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}, \text{ et } S_A(X_n) = \inf\{n \geq 1, X_n \in A\}$$

On pose pour tout $x \in E$ $z(x) = P_x(T_A(X_n) < \infty)$ alors on a

$$z(x) = 1, \text{ si } x \in A, \text{ et}$$

$$z(x) = Pz(x) \text{ si } x \notin A$$

De la même manière si on pose pour tout $x \in E$ $u(x) = \mathbb{E}_x[T_A]$ on a

$$u(x) = 0, \text{ si } x \in A, \text{ et}$$

$$u(x) = 1 + Pu(x) \text{ si } x \notin A$$

- Rappel

$$T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}, \text{ et } S_A(X_n) = \inf\{n \geq 1, X_n \in A\}$$

- On a

$$S_A(X_n) = 1 + T_A(X_{n+1})$$

- En effet si $S_A(X_n) = k$ ceci équivaut à $X_1 \notin A, \dots, X_{k-1} \notin A, X_k \in A$
Dans ce cas là on voit donc que $T_A(X_{n+1}) = k - 1$ et donc le résultat est établi.
- On peut utiliser ça pour écrire que si $x \notin A$ alors

$$P_x(T_A(X_n) < \infty) = P_x(S_A(X_n) < \infty) = P_x(1 + T_A(X_{n+1}) < \infty)$$

- Rappel

$$T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}, \text{ et } S_A(X_n) = \inf\{n \geq 1, X_n \in A\}$$

- On a

$$S_A(X_n) = 1 + T_A(X_{n+1})$$

- En effet si $S_A(X_n) = k$ ceci équivaut à $X_1 \notin A, \dots, X_{k-1} \notin A, X_k \in A$
Dans ce cas là on voit donc que $T_A(X_{n+1}) = k - 1$ et donc le résultat est établi.
- On peut utiliser ça pour écrire que si $x \notin A$ alors

$$P_x(T_A(X_n) < \infty) = P_x(S_A(X_n) < \infty) = P_x(1 + T_A(X_{n+1}) < \infty)$$

- Rappel

$$T_A(X_n) = \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}, \text{ et } S_A(X_n) = \inf\{n \geq 1, X_n \in A\}$$

- On a

$$S_A(X_n) = 1 + T_A(X_{n+1})$$

- En effet si $S_A(X_n) = k$ ceci équivaut à $X_1 \notin A, \dots, X_{k-1} \notin A, X_k \in A$
Dans ce cas là on voit donc que $T_A(X_{n+1}) = k - 1$ et donc le résultat est établi.
- On peut utiliser ça pour écrire que si $x \notin A$ alors

$$P_x(T_A(X_n) < \infty) = P_x(S_A(X_n) < \infty) = P_x(1 + T_A(X_{n+1}) < \infty)$$

Conditionnement

- Voyons une application concrète de cette formule. Un collectionneur souhaite récolter les m figurines distinctes que l'on trouve dans les paquets de céréales, chaque paquet contenant une seule figurine prise au hasard parmi les m possibles.
- **Combien de paquets devra-t-il acheter en moyenne ?** Soit, pour $n \geq 0$, X_n le nombre de figurines obtenues après l'achat de n paquets. Le processus (X_n) est une chaîne de Markov homogène partant de $X_0 = 0$ à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$.
- La matrice de transition est donnée par $P(0, 1) = 1, P(m, m) = 1$ et

$$P(k, k) = \frac{k}{m}, P(k, k + 1) = \frac{m - k}{m} \text{ si } k \in \{1, \dots, m - 1\}$$

- Le nombre moyen de paquets à acheter pour obtenir la collection complète est $\mathbb{E}_0[T_m]$.

Conditionnement

- Voyons une application concrète de cette formule. Un collectionneur souhaite récolter les m figurines distinctes que l'on trouve dans les paquets de céréales, chaque paquet contenant une seule figurine prise au hasard parmi les m possibles.
- **Combien de paquets devra-t-il acheter en moyenne ?** Soit, pour $n \geq 0$, X_n le nombre de figurines obtenues après l'achat de n paquets. Le processus (X_n) est une chaîne de Markov homogène partant de $X_0 = 0$ à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$.
- La matrice de transition est donnée par $P(0, 1) = 1, P(m, m) = 1$ et

$$P(k, k) = \frac{k}{m}, P(k, k+1) = \frac{m-k}{m} \text{ si } k \in \{1, \dots, m-1\}$$

- Le nombre moyen de paquets à acheter pour obtenir la collection complète est $\mathbb{E}_0[T_m]$.

Conditionnement

- Voyons une application concrète de cette formule. Un collectionneur souhaite récolter les m figurines distinctes que l'on trouve dans les paquets de céréales, chaque paquet contenant une seule figurine prise au hasard parmi les m possibles.
- **Combien de paquets devra-t-il acheter en moyenne ?** Soit, pour $n \geq 0$, X_n le nombre de figurines obtenues après l'achat de n paquets. Le processus (X_n) est une chaîne de Markov homogène partant de $X_0 = 0$ à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$.
- La matrice de transition est donnée par $P(0, 1) = 1, P(m, m) = 1$ et

$$P(k, k) = \frac{k}{m}, P(k, k+1) = \frac{m-k}{m} \text{ si } k \in \{1, \dots, m-1\}$$

- Le nombre moyen de paquets à acheter pour obtenir la collection complète est $\mathbb{E}_0[T_m]$.

Conditionnement

- Voyons une application concrète de cette formule. Un collectionneur souhaite récolter les m figurines distinctes que l'on trouve dans les paquets de céréales, chaque paquet contenant une seule figurine prise au hasard parmi les m possibles.
- **Combien de paquets devra-t-il acheter en moyenne ?** Soit, pour $n \geq 0$, X_n le nombre de figurines obtenues après l'achat de n paquets. Le processus (X_n) est une chaîne de Markov homogène partant de $X_0 = 0$ à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$.
- La matrice de transition est donnée par $P(0, 1) = 1, P(m, m) = 1$ et

$$P(k, k) = \frac{k}{m}, P(k, k + 1) = \frac{m - k}{m} \text{ si } k \in \{1, \dots, m - 1\}$$

- Le nombre moyen de paquets à acheter pour obtenir la collection complète est $\mathbb{E}_0[T_m]$.

Deux joueurs jouent à pile ou face, chaque fois que X gagne, il touche 1 de Y , et réciproquement.

Ils partent respectivement d'un capital X_0 et Y_0 , et le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.

La fortune d'un joueur prend les valeurs $\{0, 1, 2, \dots, X_0 + Y_0\}$.
Calculer la probabilité que le joueur X soit ruiné?

- La fortune du joueur est donc

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n Y_i$$

avec Y_i i.i.d telle que $\mathbb{P}[Y_i = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[Y_i = -1]$

- On introduit

$$T_0(X_n) = \inf\{n \geq 0 | X_n = 0\}, \quad T_{X_0+Y_0}(X_n) = \inf\{n \geq 0 | X_n = X_0 + Y_0\}$$

et

$$u(k) = \mathbb{P}_k(T_0 < T_{X_0+Y_0})$$

- On a $u(0) = 1$ et $u(X_0 + Y_0) = 0$

- Si $0 < k < X_0 + Y_0$ alors on a

$$u(k) = \mathbb{P}_k(T_0(X_n) < T_{X_0+Y_0}(X_n)) \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}_k(1 + T_0(X_{n+1}) < 1 + T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (6)$$

$$= \mathbb{P}_k(T_0(X_{n+1}) < T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (7)$$

$$= (Pu)(k) \quad (8)$$

$$= pu(k+1) + (1-p)u(k-1) \quad (9)$$

- On réécrit l'équation de récurrence double sous la forme

$$pu(k+1) - u(k) + (1-p)u(k-1) = 0$$

- On résoud l'équation caractéristique associée

$$px^2 - x + (1-p) = 0$$

- Si $0 < k < X_0 + Y_0$ alors on a

$$u(k) = \mathbb{P}_k(T_0(X_n) < T_{X_0+Y_0}(X_n)) \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}_k(1 + T_0(X_{n+1}) < 1 + T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (6)$$

$$= \mathbb{P}_k(T_0(X_{n+1}) < T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (7)$$

$$= (Pu)(k) \quad (8)$$

$$= pu(k+1) + (1-p)u(k-1) \quad (9)$$

- On réécrit l'équation de récurrence double sous la forme

$$pu(k+1) - u(k) + (1-p)u(k-1) = 0$$

- On résoud l'équation caractéristique associée

$$px^2 - x + (1-p) = 0$$

- Si $0 < k < X_0 + Y_0$ alors on a

$$u(k) = \mathbb{P}_k(T_0(X_n) < T_{X_0+Y_0}(X_n)) \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}_k(1 + T_0(X_{n+1}) < 1 + T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (6)$$

$$= \mathbb{P}_k(T_0(X_{n+1}) < T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (7)$$

$$= (Pu)(k) \quad (8)$$

$$= pu(k+1) + (1-p)u(k-1) \quad (9)$$

- On réécrit l'équation de récurrence double sous la forme

$$pu(k+1) - u(k) + (1-p)u(k-1) = 0$$

- On résoud l'équation caractéristique associée

$$px^2 - x + (1-p) = 0$$

- Si $0 < k < X_0 + Y_0$ alors on a

$$u(k) = \mathbb{P}_k(T_0(X_n) < T_{X_0+Y_0}(X_n)) \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}_k(1 + T_0(X_{n+1}) < 1 + T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (6)$$

$$= \mathbb{P}_k(T_0(X_{n+1}) < T_{X_0+Y_0}(X_{n+1})) \quad (7)$$

$$= (Pu)(k) \quad (8)$$

$$= pu(k+1) + (1-p)u(k-1) \quad (9)$$

- On réécrit l'équation de récurrence double sous la forme

$$pu(k+1) - u(k) + (1-p)u(k-1) = 0$$

- On résoud l'équation caractéristique associée

$$px^2 - x + (1-p) = 0$$

- si $p \neq 1/2$ les racines sont

$$r_1 = \frac{1 + |2p - 1|}{2p}, r_2 = \frac{1 - |2p - 1|}{2p}$$

- si $p = 1/2$ il y a une racine double

$$r = 1$$

Conditionnement

- Traitons le cas $p > 1/2$ on a $r_1 = 1, r_2 = \frac{1-p}{p}$ La solution générale est donc de la forme

$$u(k) = \lambda 1^k + \mu \left(\frac{1-p}{p} \right)^k = \lambda 1 + \mu \left(\frac{1-p}{p} \right)^k$$

$u(0) = 1$ implique $\lambda + \mu = 1$ et $u(X_0 + Y_0) = 0$ implique $\lambda + \mu \left(\frac{1-p}{p} \right)^{X_0+Y_0} = 0$ ce qui donne

$$\lambda = -\frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{X_0+Y_0}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{X_0+Y_0}}, \mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{X_0+Y_0}}$$

- Ainsi

$$u(k) = \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^k - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{X_0+Y_0}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{X_0+Y_0}}$$

- Il suffit alors d'appliquer $k = X_0$ pour avoir le résultat recherché

Conditionnement

- Traisons le cas $p > 1/2$ on a $r_1 = 1, r_2 = \frac{1-p}{p}$ La solution générale est donc de la forme

$$u(k) = \lambda 1^k + \mu \left(\frac{1-p}{p}\right)^k = \lambda 1 + \mu \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$$

$u(0) = 1$ implique $\lambda + \mu = 1$ et $u(X_0 + Y_0) = 0$ implique $\lambda + \mu \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0} = 0$ ce qui donne

$$\lambda = -\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}, \mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}$$

- Ainsi

$$u(k) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}$$

- Il suffit alors d'appliquer $k = X_0$ pour avoir le résultat recherché

- Si on pose

$$v(k) = \mathbb{P}_k(T_{X_0+Y_0} < T_0)$$

alors $v(Y_0)$ correspond à la probabilité que ce soit Y qui soit ruiné

- On montrer que

$$v(k) = pv(k+1) + (1-p)v(k-1)$$

et $v(0) = 0$ et $v(X_0 + Y_0) = 1$ c'est inversé.

- On a alors

$$v(k) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}$$

- Un calcul simple montre que

$$u(k) + v(k) = 1$$

donc le jeu se termine.

- Si on pose

$$v(k) = \mathbb{P}_k(T_{X_0+Y_0} < T_0)$$

alors $v(Y_0)$ correspond à la probabilité que ce soit Y qui soit ruiné

- On montrer que

$$v(k) = pv(k+1) + (1-p)v(k-1)$$

et $v(0) = 0$ et $v(X_0 + Y_0) = 1$ c'est inversé.

- On a alors

$$v(k) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}$$

- Un calcul simple montre que

$$u(k) + v(k) = 1$$

donc le jeu se termine.

- Si on pose

$$v(k) = \mathbb{P}_k(T_{X_0+Y_0} < T_0)$$

alors $v(Y_0)$ correspond à la probabilité que ce soit Y qui soit ruiné

- On montrer que

$$v(k) = pv(k+1) + (1-p)v(k-1)$$

et $v(0) = 0$ et $v(X_0 + Y_0) = 1$ c'est inversé.

- On a alors

$$v(k) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_0+Y_0}}$$

- Un calcul simple montre que

$$u(k) + v(k) = 1$$

donc le jeu se termine.

- Reste le cas $p = 1/2$. Dans ce cas il y a une racine double et donc on a que

$$u(k) = (\lambda + \mu k)r^k = (\lambda + \mu k)$$

- $u(0) = 1$ donne $\lambda = 1$ et $u(X_0 + Y_0) = 0$ donne $\mu = \frac{-1}{X_0 + Y_0}$

- Ainsi

$$u(k) = 1 - \frac{k}{X_0 + Y_0}$$

- Si $k = \frac{X_0 + Y_0}{2}$ on trouve 1/2 !!!!!

Théorème

MARKOV FORT. Soit (X_n) une CMH et soit τ un temps d'arrêt. Conditionnellement à l'événement $\{X_\tau = i\}$ et $\{\tau < \infty\}$, la suite de v.a $(X_{n+\tau})$ est une CMH de matrice de transition P et de loi initiale δ_i et indépendante de \mathcal{F}_τ

Ici \mathcal{F}_τ va désigner la tribu définie par

$$A \in \mathcal{F}_\tau \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+\tau} = i_n, \dots, X_{m+\tau} = i_1, X_\tau = i_0 \cap A | X_\tau = i, \tau < +\infty] = \\ P(i_{n-1}, i_n) \dots P(i_0, i_1) \delta_{i, i_0} \mathbb{P}[A | X_m = i, \tau < +\infty] \end{aligned}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_\tau$.

Intuitivement, indépendant de \mathcal{F}_τ signifie indépendant de (X_0, \dots, X_τ)

CLASSIFICATION DES ETATS

Definition

Soient i et j deux éléments de E on dit que j est accessible à partir de i si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$P^n(i, j) > 0$$

on écrit $i \rightarrow j$.

On dit que i et j communiquent et on note

$$i \leftrightarrow j$$

si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$.

En particulier $i \rightarrow j$ ssi il existe i_0, \dots, i_n avec $i_0 = i$ et $i_n = j$ tel que

$$\mathbb{P}[X_n = j, \dots, X_1 = i_1 | X_0 = i] = P(i_{n-1}, j) \dots P(i, i_1) > 0$$

En d'autres termes il existe un chemin de probabilité strictement positive qui mène de i à j .

Definition

Soient i et j deux éléments de E on dit que j est accessible à partir de i si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$P^n(i, j) > 0$$

on écrit $i \rightarrow j$.

On dit que i et j communiquent et on note

$$i \leftrightarrow j$$

si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$.

En particulier $i \rightarrow j$ ssi il existe i_0, \dots, i_n avec $i_0 = i$ et $i_n = j$ tel que

$$\mathbb{P}[X_n = j, \dots, X_1 = i_1 | X_0 = i] = P(i_{n-1}, j) \dots P(i, i_1) > 0$$

En d'autres termes il existe un chemin de probabilité strictement positive qui mène de i à j .

La relation \leftrightarrow est une relation d'équivalence et donc partitionne E en classe

Definition

On dit qu'une CMH est irréductible si elle n'a qu'une classe d'équivalence

- Pour déterminer les classes d'équivalence on travaille sur le graphe de la CM.
- Le graphe est obtenu en traçant pour tout couple d'états (i, j) un arc allant de i à j si et seulement si $P(i, j) > 0$

La relation \leftrightarrow est une relation d'équivalence et donc partitionne E en classe

Definition

On dit qu'une CMH est irréductible si elle n'a qu'une classe d'équivalence

- Pour déterminer les classes d'équivalence on travaille sur le graphe de la CM.
- Le graphe est obtenu en traçant pour tout couple d'états (i, j) un arc allant de i à j si et seulement si $P(i, j) > 0$

Exemple

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notion de récurrence et transience

Definition

Un état i est dit **récurrent** si partant de i la CM revient \mathbb{P}_i p.s en i .

Un état **non récurrent** est dit **transient**.

On pose

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1 | X_n = i\}$$

alors i est récurrent si $\mathbb{P}_i[\tau_i < \infty] = \mathbb{P}[\tau_i < \infty | X_0 = i] = 1$

et i est transient si $\mathbb{P}_i[\tau_i < \infty] = \mathbb{P}[\tau_i < \infty | X_0 = i] < 1$

Attention on a pris ici $n \geq 1$.

Notion de récurrence et transience

Definition

Un état i est dit **récurrent** si partant de i la CM revient \mathbb{P}_i p.s en i .

Un état **non récurrent** est dit **transient**.

On pose

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1 | X_n = i\}$$

alors i est récurrent si $\mathbb{P}_i[\tau_i < \infty] = \mathbb{P}[\tau_i < \infty | X_0 = i] = 1$

et i est transient si $\mathbb{P}_i[\tau_i < \infty] = \mathbb{P}[\tau_i < \infty | X_0 = i] < 1$

Attention on a pris ici $n \geq 1$.

Notion de récurrence et transience

Definition

Un état i est dit **récurrent** si partant de i la CM revient \mathbb{P}_i p.s en i .

Un état **non récurrent** est dit **transient**.

On pose

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1 | X_n = i\}$$

alors i est récurrent si $\mathbb{P}_i[\tau_i < \infty] = \mathbb{P}[\tau_i < \infty | X_0 = i] = 1$

et i est transient si $\mathbb{P}_i[\tau_i < \infty] = \mathbb{P}[\tau_i < \infty | X_0 = i] < 1$

Attention on a pris ici $n \geq 1$.

Définitions

On considère la promenade aléatoire $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n Y_i$ où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes valant $+1, -1$, ou 0 avec les probabilités respectives p, q, r , telles que $p + q + r = 1$ et S_0 une variable aléatoire entière indépendante des $(Y_i)_{i \geq 1}$.

(S_n) est une chaîne de Markov sur \mathbb{Z} dont la matrice de transition est donnée par

$$\forall i \in \mathbb{Z}, P(i, i+1) = p, P(i, i-1) = q, P(i, i) = r$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on note $u(k)$ la probabilité de passage par l'état 0 à partir de l'état k : $u(k) = P_k(\exists n \geq 0, S_n = 0) = P(\exists n \geq 0, S_n = 0 | S_0 = k)$ La suite $u(k)$ vérifie:

$$(p + q)u(k) = p u(k + 1) + q u(k - 1) \text{ et } u(0) = 1$$

Définitions

On considère la promenade aléatoire $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n Y_i$ où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes valant $+1, -1$, ou 0 avec les probabilités respectives p, q, r , telles que $p + q + r = 1$ et S_0 une variable aléatoire entière indépendante des $(Y_i)_{i \geq 1}$.

(S_n) est une chaîne de Markov sur \mathbb{Z} dont la matrice de transition est donnée par

$$\forall i \in \mathbb{Z}, P(i, i+1) = p, P(i, i-1) = q, P(i, i) = r$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on note $u(k)$ la probabilité de passage par l'état 0 à partir de l'état k : $u(k) = P_k(\exists n \geq 0, S_n = 0) = P(\exists n \geq 0, S_n = 0 | S_0 = k)$ La suite $u(k)$ vérifie:

$$(p + q)u(k) = p u(k + 1) + q u(k - 1) \text{ et } u(0) = 1$$

Ainsi on a

- Si $p = q$ $u(k) = 1 \forall k \neq 0$
- si $p > q \forall k < 0, u(k) = 1$
- si $p > q \forall k > 0, u(k) = \left(\frac{q}{p}\right)^k$

On en déduit que

$$P_0(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1 - |p - q|$$

Nombre de visites d'un site

Definition

On définit le nombre de visite du site i par

$$N_i = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{X_n=i} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n=i}$$

- ♣ Notez que l'on commence à $n = 1$
- ♣ On a par exemple

$$\mathbb{E}_j[N_i] = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(j, i), \quad \mathbb{E}_i(N_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(i, i)$$

- ♣ On a le résultat suivant

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_j(N_i \geq n + 1) = \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \mathbb{P}_i(N_i \geq n)$$

- ♣ On en déduit que

$$\mathbb{P}_j(N_i \geq n + 1) = \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \mathbb{P}_i(N_i \geq n)$$

- ♣ Si $X_0 = i$ alors N_i suit une loi géométrique

$$\mathbb{P}_i(N_i \geq n) = \left(\mathbb{P}_i(\tau_i < +\infty) \right)^n$$

- ♣ On a le résultat suivant

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_j(N_i \geq n + 1) = \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \mathbb{P}_i(N_i \geq n)$$

- ♣ On en déduit que

$$\mathbb{P}_j(N_i \geq n + 1) = \mathbb{P}_i(\tau_i < +\infty) \mathbb{P}_i(N_i \geq n)$$

- ♣ Si $X_0 = i$ alors N_i suit une loi géométrique

$$\mathbb{P}_i(N_i \geq n) = \left(\mathbb{P}_i(\tau_i < +\infty) \right)^n$$

Proposition

Les conditions suivantes sont équivalentes

- 1 i est récurrent
- 2 $\mathbb{P}_i(N_i = +\infty) = 1$
- 3 $\sum_n P^n(i, i) = \infty$

Les conditions suivantes sont équivalentes

- 1 i est transient
- 2 $\mathbb{P}_i(N_i = +\infty) = 0$ et la v.a N_i suit une loi géométrique de paramètres $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty)$
- 3 $\sum_n P^n(i, i) < \infty$

♣ Recurrence de la marche aleatoire symetrique sur \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2

Proposition

- *La récurrence et la transience sont des propriétés de classe*
- *Tous les états d'une même classe récurrente sont visités \mathbb{P}_j presque sûrement pour tout état j de la classe*

$$\mathbb{P}_j(\tau_i < \infty) = \mathbb{P}_j(N_i = \infty) = 1$$

pour tout i et j dans la classe de récurrence.

On ne sort pas d'une classe de récurrence

Proposition

Si E est fini alors la CM admet au moins une classe de récurrence. En particulier toute CM irréductible sur un espace d'états finis est récurrente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_j[N_i] &= \sum_n \mathbb{P}_j(N_i \geq n + 1) = \sum_n \mathbb{P}_j(\tau_i < \infty) \mathbb{P}_i(N_i \geq n) \\ &= P_j(\tau_i < \infty)(1 + \mathbb{E}_i[N_i])\end{aligned}$$

- Si i est transient $\mathbb{E}_j[N_i] < \infty$
- $\infty = \mathbb{E}_j[\sum_i N_i] = \sum_i \mathbb{E}_j[N_i]$ si E est de cardinal fini et tous les états j transient la dernière quantité devrait être finie.

MESURE INVARIANTE - THEOREMES LIMITES

- Un domaine important de l'étude des systèmes dynamiques s'intéresse au comportement en temps long de ces systèmes
- Vers quoi converge notre système?
- Est-il chaotique?
- Va t-il se stabiliser?
- Ces questions sont pertinentes pour les chaînes de Markov !
- Comme notre système dynamique est aléatoire, on s'intéresse à la distribution de notre CM en temps long?
- En temps long quand n tend vers $+\infty$ la loi de (X_n) va t-elle se stabiliser ?
- Nous parlerons donc de distribution stationnaire, mesure invariante.

- Un domaine important de l'étude des systèmes dynamiques s'intéresse au comportement en temps long de ces systèmes
- Vers quoi converge notre système?
- Est-il chaotique?
- Va t-il se stabiliser?
- Ces questions sont pertinentes pour les chaînes de Markov !
- Comme notre système dynamique est aléatoire, on s'intéresse à la distribution de notre CM en temps long?
- En temps long quand n tend vers $+\infty$ la loi de (X_n) va t-elle se stabiliser ?
- Nous parlerons donc de distribution stationnaire, mesure invariante.

- Un domaine important de l'étude des systèmes dynamiques s'intéresse au comportement en temps long de ces systèmes
- Vers quoi converge notre système?
- Est-il chaotique?
- Va t-il se stabiliser?
- Ces questions sont pertinentes pour les chaînes de Markov !
- Comme notre système dynamique est aléatoire, on s'intéresse à la distribution de notre CM en temps long?
- En temps long quand n tend vers $+\infty$ la loi de (X_n) va t-elle se stabiliser ?
- Nous parlerons donc de distribution stationnaire, mesure invariante.

- Un domaine important de l'étude des systèmes dynamiques s'intéresse au comportement en temps long de ces systèmes
- Vers quoi converge notre système?
- Est-il chaotique?
- Va t-il se stabiliser?
- Ces questions sont pertinentes pour les chaînes de Markov !
- Comme notre système dynamique est aléatoire, on s'intéresse à la distribution de notre CM en temps long?
- En temps long quand n tend vers $+\infty$ la loi de (X_n) va t-elle se stabiliser ?
- Nous parlerons donc de distribution stationnaire, mesure invariante.

- Un domaine important de l'étude des systèmes dynamiques s'intéresse au comportement en temps long de ces systèmes
- Vers quoi converge notre système?
- Est-il chaotique?
- Va t-il se stabiliser?
- Ces questions sont pertinentes pour les chaînes de Markov !
- Comme notre système dynamique est aléatoire, on s'intéresse à la distribution de notre CM en temps long?
- En temps long quand n tend vers $+\infty$ la loi de (X_n) va t-elle se stabiliser ?
- Nous parlerons donc de distribution stationnaire, mesure invariante.

Concernant le comportement en temps long quelles sont les questions que l'on peut se pose

- Convergence en loi

$$\mathbb{P}_i[X_n = j] = P^n(i, j) \xrightarrow{n} \mu(i, j)$$

- Moyenne empirique

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=j} \xrightarrow{n} \lambda(i, j), \quad \mathbb{P}_i \text{ p.s}$$

- On peut voir que si ces deux limites existent alors elles sont égales

Concernant le comportement en temps long quelles sont les questions que l'on peut se pose

- Convergence en loi

$$\mathbb{P}_i[X_n = j] = P^n(i, j) \xrightarrow{n} \mu(i, j)$$

- Moyenne empirique

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=j} \xrightarrow{n} \lambda(i, j), \quad \mathbb{P}_i \text{ p.s}$$

- On peut voir que si ces deux limites existent alors elles sont égales

Définitions

- Rappelons que si j est transient alors pour tout i

$$\mathbb{E}_i[N_j] < \infty$$

- Or on a

$$\mathbb{E}_i[N_j] = \sum_n P^n(i, j) < \infty$$

- Donc

$$P^n(i, j) \rightarrow 0$$

- De plus $N_j < \infty$ est fini \mathbb{P}_i p.s d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=j} \xrightarrow[n]{} 0 \quad \mathbb{P}_i \text{ p.s}$$

- CCL: on peut se restreindre aux classes récurrentes et donc supposer la CM irréductible (car on ne sort pas d'une classe de récurrence)

Definition

On dit qu'une mesure π est invariante pour la matrice stochastique P si

$$\pi P = \pi$$

- ♣ ATTENTION: ici on parle de mesure et donc une mesure invariante peut être à priori de mesure infinie.
- ♣ Exemple: marche symétrique sur \mathbb{Z}

Proposition

Si π est *une mesure de PROBABILITE* invariante pour la matrice stochastique P et si $X_0 \sim \pi$ alors

$$X_n \sim \pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition

On dit qu'une mesure π est invariante pour la matrice stochastique P si

$$\pi P = \pi$$

- ♣ ATTENTION: ici on parle de mesure et donc une mesure invariante peut être à priori de mesure infinie.
- ♣ Exemple: marche symétrique sur \mathbb{Z}

Proposition

Si π est *une mesure de PROBABILITE* invariante pour la matrice stochastique P et si $X_0 \sim \pi$ alors

$$X_n \sim \pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

Theorem

Toute CMH irréductible admet une MESURE invariante STRICTEMENT POSITIVE sur E et toutes les MESURES invariantes sont proportionnelles entre elles

- Cette mesure peut être de masse infinie si E est infini dénombrable
- Si E est fini, une CMH irréductible admet une unique mesure de probabilité invariante

Definition

Soit i un état récurrent et τ_i le temps de premier retour (donc fini p.s)

- i est dit récurrent positif si $\mathbb{E}_i[\tau_i] < \infty$
- i est dit récurrent nul si $\mathbb{E}_i[\tau_i] = \infty$

Théorème

Soit X une CMH irréd alors les propositions suivantes sont équivalentes

- *il existe un état i récurrent positif*
- *tous les états sont récurrents positifs*
- *la CM admet une unique probabilité invariante donnée par*

$$\pi(i) = \frac{1}{\mathbb{E}_i[\tau_i]}$$

Théorème

Une CMH irréductible à espace d'état fini admet une unique probabilité invariante et donc tous ses états sont récurrents positifs

- La connaissance de la mesure invariante permet de calculer $\mathbb{E}_i[\tau_i]$
- Si E est fini on résoud $\pi P = \pi$ et on prend un vecteur à coordonnées positives et on le normalise. Il y en existe forcément un. Quelle est la dimension de l'espace propre associé à 1 pour P^T
- Une mesure λ est dite P réversible si pour tout $(i, j) \in E^2$

$$\lambda(i)P(i, j) = \lambda(j)P(j, i)$$

une telle mesure est nécessairement invariante

Théorème

Une CMH irréductible à espace d'état fini admet une unique probabilité invariante et donc tous ses états sont récurrents positifs

- La connaissance de la mesure invariante permet de calculer $\mathbb{E}_i[\tau_i]$
- Si E est fini on résoud $\pi P = \pi$ et on prend un vecteur à coordonnées positives et on le normalise. Il y en existe forcément un. Quelle est la dimension de l'espace propre associé à 1 pour P^T
- Une mesure λ est dite P réversible si pour tout $(i, j) \in E^2$

$$\lambda(i)P(i, j) = \lambda(j)P(j, i)$$

une telle mesure est nécessairement invariante

Théorème

Une CMH irréductible à espace d'état fini admet une unique probabilité invariante et donc tous ses états sont récurrents positifs

- La connaissance de la mesure invariante permet de calculer $\mathbb{E}_i[\tau_i]$
- Si E est fini on résoud $\pi P = \pi$ et on prend un vecteur à coordonnées positives et on le normalise. Il y en existe forcément un. Quelle est la dimension de l'espace propre associé à 1 pour P^T
- Une mesure λ est dite P réversible si pour tout $(i, j) \in E^2$

$$\lambda(i)P(i, j) = \lambda(j)P(j, i)$$

une telle mesure est nécessairement invariante

Definition

On appelle période d'un état

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 \mid P^n(i, i) > 0\}$$

Proposition

Tous les états d'une même classe ont même période

Definition

On dit qu'une classe est apériodique si l'un des états de cette classe à une période 1

Si $P(i, i) > 0$ alors $d(i) = 1$

Definition

On appelle période d'un état

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 \mid P^n(i, i) > 0\}$$

Proposition

Tous les états d'une même classe ont même période

Definition

On dit qu'une classe est apériodique si l'un des états de cette classe à une période 1

Si $P(i, i) > 0$ alors $d(i) = 1$

Definition

On appelle période d'un état

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 \mid P^n(i, i) > 0\}$$

Proposition

Tous les états d'une même classe ont même période

Definition

On dit qu'une classe est apériodique si l'un des états de cette classe à une période 1

Si $P(i, i) > 0$ alors $d(i) = 1$

Proposition

Soit i un état de période 1 alors

- il existe $N(i)$ telle que pour tout $n \geq N(i)$: $P^n(i, i) > 0$*
 - pour tout $j \leftrightarrow i$ il existe $N(i, j)$ telle que pour tout $n \geq N(i, j)$: $P^n(i, j) > 0$*
-
- Pour E fini une CMH irréductible est apériodique si et seulement si il existe n tel que P^n n'a que des coefficients strictement positifs.

Théorème

Soit X une CMH irréductible apériodique pour laquelle il existe une probabilité invariante π alors

$$P^n(i, j) \rightarrow \pi(j)$$

pour tout état i . Ainsi pour toute mesure initiale λ

$$\mathbb{P}_\lambda(X_n = j) \rightarrow \pi(j)$$

- Si X est une CMH irréductible apériodique et récurrente positif alors on a CONVERGENCE EN LOI
- Si E est fini et si X est une CMH irréductible et apériodique alors il ya forcément convergence en loi

Théorème

Soit X une CMH irréductible alors pour toute mesure initiale λ et pour tout état j

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=j} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}_j[\tau_j]} \quad \mathbb{P}_\lambda \text{ p.s.}$$

- Si E est fini et si X est une CMH irréductible alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=j} \rightarrow \pi(j) \quad \mathbb{P}_\lambda \text{ p.s.}$$

où π est l'unique probabilité invariante

- C'est ce résultat que l'on utilise dans les simulations pour approcher la mesure invariante.

Théorème

Soit X une CMH irréductible et récurrente positive alors pour toute mesure initiale λ et pour toute fonction mesurable bornée on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \rightarrow \int f d\pi \quad \mathbb{P}_\lambda \text{ p.s.}$$

- Méthode de Monte Carlo

On considère E fini

Proposition

Soit P une matrice stochastique alors P admet 1 comme valeur propre et toutes ses valeurs propres sont de module plus petit ou égal à 1

- Si P est diagonalisable et que 1 est sa valeur propre de module 1 et qu'elle est simple et que les autres valeurs propres sont strictement plus petite que 1 alors il est facile de voir que

$$P^n(i, j) \rightarrow \pi_j$$

Proposition

Toute CMH à espace d'états finis admet une mesure de probabilité invariante

- Soit μ_0 une mesure initiale, on considère

$$f_n(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_0 P^k$$

C'est une suite à valeurs dans le complexe des vecteurs de probabilité qui est compact donc admet une sous-suite convergente

Proposition

Soit P une matrice stochastique et soit λ une valeur propre de module 1 de P^T et soit v un vecteur propre associé. Alors $|v|^T = (|v_1|, \dots, |v_d|)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 pour P^T .

Proposition

Soit P une matrice stochastique associé à une CMH irréductible et apériodique alors P n'a que 1 comme v.p de module 1 et l'espace propre associé est de dimension 1

Le but de l'algorithme de Metropolis-Hastings est de simuler une mesure de probabilité π sur un espace d'état E en simulant une chaîne de Markov dont la mesure invariante est π .

Sous de bonnes hypothèses, cette chaîne de Markov convergera donc en loi vers π (ergodicité).

Cet algorithme est en particulier utilisé dans le cas, où la mesure π n'est pas connue exactement, mais à **constante près**.

Le but de l'algorithme de Metropolis-Hastings est de simuler une mesure de probabilité π sur un espace d'état E en simulant une chaîne de Markov dont la mesure invariante est π .

Sous de bonnes hypothèses, cette chaîne de Markov convergera donc en loi vers π (ergodicité).

Cet algorithme est en particulier utilisé dans le cas, où la mesure π n'est pas connue exactement, mais à **constante près**.

Le but de l'algorithme de Metropolis-Hastings est de simuler une mesure de probabilité π sur un espace d'état E en simulant une chaîne de Markov dont la mesure invariante est π .

Sous de bonnes hypothèses, cette chaîne de Markov convergera donc en loi vers π (ergodicité).

Cet algorithme est en particulier utilisé dans le cas, où la mesure π n'est pas connue exactement, mais **à constante près**.

Le cadre général est donc le suivant : la mesure de probabilité π s'écrit

$$\pi(dx) = \frac{f(x)\lambda(dx)}{\int_E f(x)\lambda(dx)},$$

où

- f est une fonction mesurable de $E \mapsto \mathbf{R}_+$
- λ est une mesure positive de référence (la mesure de Lebesgue par exemple)

La constante de renormalisation $\int_E f(x)\lambda(dx)$ n'est pas connue. On écrit en général que la mesure π est proportionnelle à $f(x)\lambda(dx)$

Soit π une mesure de probabilité sur un espace d'état fini E .
Trouver une chaîne de Markov dont la mesure invariante est π n'est pas difficile : par exemple, on peut prendre X_1, \dots, X_n indépendants de loi π .

Cette solution triviale ne nous intéresse pas. Notre but est de trouver une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ qu'on sait simuler même dans les cas où on ne sait pas simuler π .

Partons du principe qu'on sache simuler simplement une chaîne de Markov auxiliaire (dont la mesure invariante n'est pas forcément π) d'après une matrice de transition $Q : E \times E \rightarrow [0, 1]$.

L'algorithme de Metropolis-Hastings modifie Q pour obtenir une chaîne de Markov de mesure invariante π .

Soit π une mesure de probabilité sur un espace d'état fini E .

Trouver une chaîne de Markov dont la mesure invariante est π n'est pas difficile : par exemple, on peut prendre X_1, \dots, X_n indépendants de loi π .

Cette solution triviale ne nous intéresse pas. Notre but est de trouver une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ qu'on sait simuler même dans les cas où on ne sait pas simuler π .

Partons du principe qu'on sache simuler simplement une chaîne de Markov auxiliaire (dont la mesure invariante n'est pas forcément π) d'après une matrice de transition $Q : E \times E \rightarrow [0, 1]$.

L'algorithme de Metropolis-Hastings modifie Q pour obtenir une chaîne de Markov de mesure invariante π .

Soit π une mesure de probabilité sur un espace d'état fini E .

Trouver une chaîne de Markov dont la mesure invariante est π n'est pas difficile : par exemple, on peut prendre X_1, \dots, X_n indépendants de loi π .

Cette solution triviale ne nous intéresse pas. Notre but est de trouver une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ qu'on sait simuler même dans les cas où on ne sait pas simuler π .

Partons du principe qu'on sache simuler simplement une chaîne de Markov auxiliaire (dont la mesure invariante n'est pas forcément π) d'après une matrice de transition $Q : E \times E \rightarrow [0, 1]$.

L'algorithme de Metropolis-Hastings modifie Q pour obtenir une chaîne de Markov de mesure invariante π .

Soit π une mesure de probabilité sur un espace d'état fini E .

Trouver une chaîne de Markov dont la mesure invariante est π n'est pas difficile : par exemple, on peut prendre X_1, \dots, X_n indépendants de loi π .

Cette solution triviale ne nous intéresse pas. Notre but est de trouver une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ qu'on sait simuler même dans les cas où on ne sait pas simuler π .

Partons du principe qu'on sache simuler simplement une chaîne de Markov auxiliaire (dont la mesure invariante n'est pas forcément π) d'après une matrice de transition $Q : E \times E \rightarrow [0, 1]$.

L'algorithme de Metropolis-Hastings modifie Q pour obtenir une chaîne de Markov de mesure invariante π .

Proposition

La chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par Metropolis-Hastings à partir d'une mesure π sur E et d'une matrice de transition Q est la chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$P(x, y) = \begin{cases} Q(x, y) \min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}\right) & \text{si } x \neq y \\ 1 - \sum_{z \neq x} P(x, z) & \text{si } x = y \end{cases}$$

La probabilité $P(x, y)$ d'aller de x à y (pour $y \neq x$) est donc la probabilité d'aller de x à y en suivant la matrice de transition Q multipliée par un facteur $\min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right)$ que l'on appelle **probabilité d'acceptation rejet**.

On peut donc simuler un saut partant de x comme ceci : on choisit un candidat y sur lequel sauter suivant la loi donnée par $Q(x, \cdot)$, et on saute effectivement sur y avec probabilité $\min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right)$, sinon on reste sur x .

Le choix de sauter se fait de façon indépendante

La probabilité $P(x, y)$ d'aller de x à y (pour $y \neq x$) est donc la probabilité d'aller de x à y en suivant la matrice de transition Q multipliée par un facteur $\min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right)$ que l'on appelle **probabilité d'acceptation rejet**.

On peut donc simuler un saut partant de x comme ceci : on choisit un candidat y sur lequel sauter suivant la loi donnée par $Q(x, \cdot)$, et on saute effectivement sur y avec probabilité $\min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right)$, sinon on reste sur x .

Le choix de sauter se fait de façon indépendante

La probabilité $P(x, y)$ d'aller de x à y (pour $y \neq x$) est donc la probabilité d'aller de x à y en suivant la matrice de transition Q multipliée par un facteur $\min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right)$ que l'on appelle **probabilité d'acceptation rejet**.

On peut donc simuler un saut partant de x comme ceci : on choisit un candidat y sur lequel sauter suivant la loi donnée par $Q(x, \cdot)$, et on saute effectivement sur y avec probabilité $\min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right)$, sinon on reste sur x .

Le choix de sauter se fait de façon indépendante

La procédure peut être retranscrite comme ceci.

Metropolis-Hastings

X_0 = simulation selon une loi initiale quelconque ;

pour i entre 1 et n ,

y = tirage aleatoire selon la loi $Q(X_{i-1}, \cdot)$

si $\text{uniform}() < \frac{\pi(y)Q(y, X_{i-1})}{\pi(X_{i-1})Q(X_{i-1}, y)}$

$X_i = y$

sinon faire

$X_i = X_{i-1}$

sortir (X_0, \dots, X_n) ;

Définitions

Vérification : On veut vérifier que la chaîne X_n construite ci-dessus admet bien P comme matrice de transition.

Précisons un peu les notations. A chaque étape i , on notera Y_i la variable aléatoire tirée selon la loi $Q(X_{i-1}, \cdot)$ et U_i la variable aléatoire uniforme utilisée dans le choix. En particulier, U_i est indépendante de Y_i et donc de X_{i-1} . Pour tout couple $(x, y) \in E$ avec $x \neq y$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(Y_{n+1})Q(Y_{n+1}, X_n)}{\pi(X_n)Q(X_n, Y_{n+1})} \right) | X_n = x) \\ &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) | X_n = x) \\ &= \min \left(1, \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) \right) Q(x, y) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que U_{n+1} est indépendant de X_n et Y_{n+1} .

Vérification : On veut vérifier que la chaîne X_n construite ci-dessus admet bien P comme matrice de transition.

Précisons un peu les notations. A chaque étape i , on notera Y_i la variable aléatoire tirée selon la loi $Q(X_{i-1}, \cdot)$ et U_i la variable aléatoire uniforme utilisée dans le choix. En particulier, U_i est indépendante de Y_i et donc de X_{i-1} . Pour tout couple $(x, y) \in E$ avec $x \neq y$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(Y_{n+1})Q(Y_{n+1}, X_n)}{\pi(X_n)Q(X_n, Y_{n+1})} \right) | X_n = x) \\ &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) | X_n = x) \\ &= \min \left(1, \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) \right) Q(x, y) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que U_{n+1} est indépendant de X_n et Y_{n+1} .

Définitions

Vérification : On veut vérifier que la chaîne X_n construite ci-dessus admet bien P comme matrice de transition.

Précisons un peu les notations. A chaque étape i , on notera Y_i la variable aléatoire tirée selon la loi $Q(X_{i-1}, \cdot)$ et U_i la variable aléatoire uniforme utilisée dans le choix. En particulier, U_i est indépendante de Y_i et donc de X_{i-1} . Pour tout couple $(x, y) \in E$ avec $x \neq y$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(Y_{n+1})Q(Y_{n+1}, X_n)}{\pi(X_n)Q(X_n, Y_{n+1})} \right) | X_n = x) \\ &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) | X_n = x) \\ &= \min \left(1, \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) \right) Q(x, y) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que U_{n+1} est indépendant de X_n et Y_{n+1} .

Vérification : On veut vérifier que la chaîne X_n construite ci-dessus admet bien P comme matrice de transition.

Précisons un peu les notations. A chaque étape i , on notera Y_i la variable aléatoire tirée selon la loi $Q(X_{i-1}, \cdot)$ et U_i la variable aléatoire uniforme utilisée dans le choix. En particulier, U_i est indépendante de Y_i et donc de X_{i-1} . Pour tout couple $(x, y) \in E$ avec $x \neq y$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(Y_{n+1})Q(Y_{n+1}, X_n)}{\pi(X_n)Q(X_n, Y_{n+1})} \right) | X_n = x) \\ &= \mathbf{P}(Y_{n+1} = y \text{ et } U_{n+1} \leq \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) | X_n = x) \\ &= \min \left(1, \left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \right) \right) Q(x, y)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que U_{n+1} est indépendant de X_n et Y_{n+1} .

L'algorithme de Metropolis-Hastings utilise une simulation selon Q et choisit de garder ou de rejeter le saut selon une certaine probabilité qui fait intervenir le quotient $\pi(x)/\pi(y)$.

En particulier, il suffit de connaître π sur E à constante près, ce qui s'avère très important dans certains cas.

Justification de l'algorithme

Montrons que la mesure π est bien la mesure invariante associée à la chaîne de Markov de matrice P .

Proposition

On suppose que $\pi(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$ et que $Q(x, y) > 0 \Leftrightarrow Q(y, x) > 0$.

- i) π est la mesure de probabilité invariante pour la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ de matrice de transition P .*
- ii) Si de plus Q est irréductible, alors P l'est aussi et on a donc les convergences usuelles vers π quand $n \rightarrow \infty$.*

Justification de l'algorithme

Montrons que la mesure π est bien la mesure invariante associée à la chaîne de Markov de matrice P .

Proposition

On suppose que $\pi(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$ et que $Q(x, y) > 0 \Leftrightarrow Q(y, x) > 0$.

- i) π est la mesure de probabilité invariante pour la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ de matrice de transition P .*
- ii) Si de plus Q est irréductible, alors P l'est aussi et on a donc les convergences usuelles vers π quand $n \rightarrow \infty$.*

Preuve de i) : On commence par montrer que la mesure π est réversible pour P c'est à dire que pour tout couple (x, y)

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$$

.

Commençons par vérifier qu'une mesure réversible est invariante.
Remarquons que

$$\begin{aligned}\mu P(y) &= \sum_{x \in E} \mu(x)P(x, y) \\ &= \sum_{x \in E} \mu(y)P(y, x) \\ &= \mu(y) \sum_{x \in E} P(y, x) \\ &= \mu(y).\end{aligned}$$

Preuve de i) : On commence par montrer que la mesure π est réversible pour P c'est à dire que pour tout couple (x, y)

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$$

.

Commençons par vérifier qu'une mesure réversible est invariante.
Remarquons que

$$\begin{aligned}\mu P(y) &= \sum_{x \in E} \mu(x)P(x, y) \\ &= \sum_{x \in E} \mu(y)P(y, x) \\ &= \mu(y) \sum_{x \in E} P(y, x) \\ &= \mu(y).\end{aligned}$$

Preuve de i) : On commence par montrer que la mesure π est réversible pour P c'est à dire que pour tout couple (x, y)

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$$

.

Commençons par vérifier qu'une mesure réversible est invariante.
Remarquons que

$$\begin{aligned}\mu P(y) &= \sum_{x \in E} \mu(x)P(x, y) \\ &= \sum_{x \in E} \mu(y)P(y, x) \\ &= \mu(y) \sum_{x \in E} P(y, x) \\ &= \mu(y).\end{aligned}$$

Preuve de i) : On commence par montrer que la mesure π est réversible pour P c'est à dire que pour tout couple (x, y)

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$$

.

Commençons par vérifier qu'une mesure réversible est invariante.
Remarquons que

$$\begin{aligned}\mu P(y) &= \sum_{x \in E} \mu(x)P(x, y) \\ &= \sum_{x \in E} \mu(y)P(y, x) \\ &= \mu(y) \sum_{x \in E} P(y, x) \\ &= \mu(y).\end{aligned}$$

Preuve de i) : On commence par montrer que la mesure π est réversible pour P c'est à dire que pour tout couple (x, y)

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$$

.

Commençons par vérifier qu'une mesure réversible est invariante.
Remarquons que

$$\begin{aligned}\mu P(y) &= \sum_{x \in E} \mu(x)P(x, y) \\ &= \sum_{x \in E} \mu(y)P(y, x) \\ &= \mu(y) \sum_{x \in E} P(y, x) \\ &= \mu(y).\end{aligned}$$

Vérifions maintenant cette propriété.

La propriété est toujours vraie si $x = y$.

Pour $x \neq y$, on a $\pi(x)P(x, y) = 0 = \pi(y)P(y, x)$ si $Q(x, y) = Q(y, x) = 0$,
et

$$\begin{aligned}\pi(x)P(x, y) &= \pi(x)Q(x, y) \min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}\right) \\ &= \min(\pi(x)Q(x, y), \pi(y)Q(y, x)) \\ &= \pi(y)Q(y, x) \min\left(\frac{\pi(x)Q(x, y)}{\pi(y)Q(y, x)}, 1\right) \\ &= \pi(y)P(y, x)\end{aligned}$$

si $Q(x, y)$ et $Q(y, x)$ sont non nuls.

Vérifions maintenant cette propriété.

La propriété est toujours vraie si $x = y$.

Pour $x \neq y$, on a $\pi(x)P(x, y) = 0 = \pi(y)P(y, x)$ si $Q(x, y) = Q(y, x) = 0$,
et

$$\begin{aligned}\pi(x)P(x, y) &= \pi(x)Q(x, y) \min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}\right) \\ &= \min(\pi(x)Q(x, y), \pi(y)Q(y, x)) \\ &= \pi(y)Q(y, x) \min\left(\frac{\pi(x)Q(x, y)}{\pi(y)Q(y, x)}, 1\right) \\ &= \pi(y)P(y, x)\end{aligned}$$

si $Q(x, y)$ et $Q(y, x)$ sont non nuls.

Vérifions maintenant cette propriété.

La propriété est toujours vraie si $x = y$.

Pour $x \neq y$, on a $\pi(x)P(x, y) = 0 = \pi(y)P(y, x)$ si $Q(x, y) = Q(y, x) = 0$,
et

$$\begin{aligned}\pi(x)P(x, y) &= \pi(x)Q(x, y) \min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}\right) \\ &= \min(\pi(x)Q(x, y), \pi(y)Q(y, x)) \\ &= \pi(y)Q(y, x) \min\left(\frac{\pi(x)Q(x, y)}{\pi(y)Q(y, x)}, 1\right) \\ &= \pi(y)P(y, x)\end{aligned}$$

si $Q(x, y)$ et $Q(y, x)$ sont non nuls.

Vérifions maintenant cette propriété.

La propriété est toujours vraie si $x = y$.

Pour $x \neq y$, on a $\pi(x)P(x, y) = 0 = \pi(y)P(y, x)$ si $Q(x, y) = Q(y, x) = 0$,
et

$$\begin{aligned}\pi(x)P(x, y) &= \pi(x)Q(x, y) \min\left(1, \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}\right) \\ &= \min(\pi(x)Q(x, y), \pi(y)Q(y, x)) \\ &= \pi(y)Q(y, x) \min\left(\frac{\pi(x)Q(x, y)}{\pi(y)Q(y, x)}, 1\right) \\ &= \pi(y)P(y, x)\end{aligned}$$

si $Q(x, y)$ et $Q(y, x)$ sont non nuls.

Preuve de ii) :

On a $P(x, y) > 0$ dès que $Q(x, y) > 0$ comme on a supposé que $\pi(x) \neq 0$.

Par conséquent, toutes les trajectoires réalisables par Q le sont par P , et l'irréductibilité de Q entraîne l'irréductibilité de P .

Preuve de ii) :

On a $P(x, y) > 0$ dès que $Q(x, y) > 0$ comme on a supposé que $\pi(x) \neq 0$.

Par conséquent, toutes les trajectoires réalisables par Q le sont par P , et l'irréductibilité de Q entraîne l'irréductibilité de P .

Preuve de ii) :

On a $P(x, y) > 0$ dès que $Q(x, y) > 0$ comme on a supposé que $\pi(x) \neq 0$.

Par conséquent, toutes les trajectoires réalisables par Q le sont par P , et l'irréductibilité de Q entraîne l'irréductibilité de P .

Exemple :

On veut simuler sur l'espace $\{1, \dots, n\}$ la mesure π telle que $\pi(k) \propto \frac{1}{(k+1)^2}$.

On se sert de la chaîne de Markov auxiliaire définie comme suit : à chaque étape, lorsque la chaîne se trouve en position k , elle se déplace avec une chance sur deux sur l'un des entiers voisins $k - 1$ et $k + 1$. Lorsque la chaîne est sur un bord comme il n'y a qu'un seul voisin disponible, avec une chance sur deux elle reste sur place, et sinon elle va sur l'entier voisin. La matrice Q de cette chaîne s'écrit alors

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1/2 & \\ & & & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}$$

Exemple :

On veut simuler sur l'espace $\{1, \dots, n\}$ la mesure π telle que $\pi(k) \propto \frac{1}{(k+1)^2}$.

On se sert de la chaîne de Markov auxiliaire définie comme suit : à chaque étape, lorsque la chaîne se trouve en position k , elle se déplace avec une chance sur deux sur l'un des entiers voisins $k - 1$ et $k + 1$. **Lorsque la chaîne est sur un bord comme il n'y a qu'un seul voisin disponible, avec une chance sur deux elle reste sur place, et sinon elle va sur l'entier voisin.** La matrice Q de cette chaîne s'écrit alors

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1/2 \\ & & & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exemple :

On veut simuler sur l'espace $\{1, \dots, n\}$ la mesure π telle que $\pi(k) \propto \frac{1}{(k+1)^2}$.

On se sert de la chaîne de Markov auxiliaire définie comme suit : à chaque étape, lorsque la chaîne se trouve en position k , elle se déplace avec une chance sur deux sur l'un des entiers voisins $k - 1$ et $k + 1$. **Lorsque la chaîne est sur un bord comme il n'y a qu'un seul voisin disponible, avec une chance sur deux elle reste sur place, et sinon elle va sur l'entier voisin.** La matrice Q de cette chaîne s'écrit alors

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1/2 & \\ & & & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}$$

Calculons alors

$$P(1, 2) = Q(1, 2) \min\left(1, \frac{\pi(2)Q(2, 1)}{\pi(1)Q(1, 2)}\right) = \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{2^2}{3^2}\right) = \frac{4}{18}$$

On peut vérifier que pour tout $1 \leq k \leq n - 1$:

$$P(k, k + 1) = \frac{1}{2} \frac{(k + 1)^2}{(k + 2)^2}$$

pour tout $2 \leq k \leq n$,

$$P(k, k - 1) = \frac{1}{2}$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice Q est symétrique ce qui simplifie grandement les calculs.

Si la mesure cible π est une mesure sur \mathbb{R} de densité f , on peut encore définir la dynamique de type Métropolis Hastings.

Dans ce cas, il faut un équivalent de la dynamique d'une chaîne de Markov sur un espace non dénombrable.

On se donne alors une famille de densité $(q(x, y))_{x, y \in \mathbb{R}}$ indexée par $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a une mesure de probabilité $q(x, y)dy$, appelé *noyau d'exploration*.

Cette famille de densités va nous permettre de choisir un candidat pour l'évolution de l'algorithme.

Si la mesure cible π est une mesure sur \mathbb{R} de densité f , on peut encore définir la dynamique de type Métropolis Hastings.

Dans ce cas, il faut un équivalent de la dynamique d'une chaîne de Markov sur un espace non dénombrable.

On se donne alors une famille de densité $(q(x, y))_{x, y \in \mathbb{R}}$ indexée par $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a une mesure de probabilité $q(x, y)dy$, appelé *noyau d'exploration*.

Cette famille de densités va nous permettre de choisir un candidat pour l'évolution de l'algorithme.

Si la mesure cible π est une mesure sur \mathbb{R} de densité f , on peut encore définir la dynamique de type Métropolis Hastings.

Dans ce cas, il faut un équivalent de la dynamique d'une chaîne de Markov sur un espace non dénombrable.

On se donne alors une famille de densité $(q(x, y))_{x, y \in \mathbb{R}}$ indexée par $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a une mesure de probabilité $q(x, y)dy$, appelé *noyau d'exploration*.

Cette famille de densités va nous permettre de choisir un candidat pour l'évolution de l'algorithme.

Si la mesure cible π est une mesure sur \mathbb{R} de densité f , on peut encore définir la dynamique de type Métropolis Hastings.

Dans ce cas, il faut un équivalent de la dynamique d'une chaîne de Markov sur un espace non dénombrable.

On se donne alors une famille de densité $(q(x, y))_{x, y \in \mathbb{R}}$ indexée par $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a une mesure de probabilité $q(x, y)dy$, appelé *noyau d'exploration*.

Cette famille de densités va nous permettre de choisir un candidat pour l'évolution de l'algorithme.

Metropolis-Hastings (cas continu)

$X_0 =$ simulation selon une loi initiale quelconque ;

pour i entre 1 et n ,

$Y =$ simulation selon la loi $q(X_{i-1}, y)dy$

si $\text{uniform}() < \frac{f(y)q(Y, X_{i-1})}{f(X_{i-1})q(X_{i-1}, Y)}$

$X_i = Y$

sinon faire

$X_i = X_{i-1}$

sortir (X_0, \dots, X_n) ;

L'objectif de cette partie est de voir un algorithme permettant de trouver le minimum d'une fonction définie sur un espace d'état fini (mas grand).

Cet algorithme est basé sur l'algorithme de Métropolis Hastings et la construction d'une famille de mesures de probabilités adaptée : les mesures de Gibbs.

L'objectif de cette partie est de voir un algorithme permettant de trouver le minimum d'une fonction définie sur un espace d'état fini (mais grand).

Cet algorithme est basé sur l'algorithme de Métropolis Hastings et la construction d'une famille de mesures de probabilités adaptée : les mesures de Gibbs.

Définitions

Soit E un espace fini et $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction appelée traditionnellement **énergie (ou Hamiltonien)** dont on cherche les points de l'espace E où le minimum est réalisé.

Proposition

La mesure de Gibbs μ_T associée à la température $T > 0$ est alors la mesure de probabilité

$$\mu_T(x) = \frac{1}{Z_T} \exp\left(-\frac{1}{T} V(x)\right)$$

où $Z_T = \sum_{y \in E} \exp\left(-\frac{1}{T} V(y)\right)$ est une constante appelée fonction de partition.

En général, l'espace d'états E est très grand, et la constante Z_T est inconnue.

Proposition

i) Pour $x \in E$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(x) = \frac{1}{\text{Card}(E)}$.

ii) Pour $x \in E$,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{M})} & \text{si } x \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où \mathcal{M} l'ensemble des points où V atteint son minimum :

$$\mathcal{M} = \{x \in E : V(x) = \min_y V(y)\}.$$

Lorsque la température T est élevée, la mesure de Gibbs a tendance à s'uniformiser sur l'espace des états. Lorsque T diminue, μ_T se concentre sur les points où V atteint son minimum.

Pour $x \in E$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{1}{T} V(x)\right) = 1$, donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Z_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{x \in E} \exp\left(-\frac{1}{T} V(x)\right) = \sum_{x \in E} 1 = \text{Card}(E)$$

puis $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_T} \exp\left(-\frac{1}{T} V(x)\right) = \frac{1}{\text{Card}(E)}$.

Soit $V^* = \min_y V(y)$. On peut écrire

$$\mu_T(x) = \frac{e^{-V^*/T}}{Z_T} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right),$$

ce qui implique (en sommant sur les x) que

$$1 = \frac{e^{-V^*/T}}{Z_T} \sum_{x \in E} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right),$$

c'est-à-dire que

$$\frac{Z_T}{e^{-V^*/T}} = \sum_{x \in E} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right).$$

Définitions

Du coup, on peut faire le même raisonnement que précédemment. Pour

$x \in E$, $\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right) = 1$ si $x \in \mathcal{M}$ et

$\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right) = 0$ sinon.

D'où

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{Z_T}{e^{-V^*/T}} = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{x \in E} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right) = \sum_{x \in \mathcal{M}} 1 = \text{Card}(\mathcal{M}),$$

ce qui permet d'écrire la limite de

$$\mu_T(x) = \frac{e^{-V^*/T}}{Z_T} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right),$$

c'est-à-dire $\lim_{T \rightarrow 0} \mu_T(x) = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{M})}$ si $x \in \mathcal{M}$ et $\lim_{T \rightarrow 0} \mu_T(x) = 0$ sinon.

Définitions

Du coup, on peut faire le même raisonnement que précédemment. Pour

$x \in E$, $\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right) = 1$ si $x \in \mathcal{M}$ et

$\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right) = 0$ sinon.

D'où

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{Z_T}{e^{-V^*/T}} = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{x \in E} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right) = \sum_{x \in \mathcal{M}} 1 = \text{Card}(\mathcal{M}),$$

ce qui permet d'écrire la limite de

$$\mu_T(x) = \frac{e^{-V^*/T}}{Z_T} \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V^*)\right),$$

c'est-à-dire $\lim_{T \rightarrow 0} \mu_T(x) = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{M})}$ si $x \in \mathcal{M}$ et $\lim_{T \rightarrow 0} \mu_T(x) = 0$ sinon.

Lorsque E est grand, il peut être difficile de simuler une variable dans E selon la loi de μ_T , notamment quand on ne peut pas calculer Z_T . Dans ce cas-là, l'algorithme de Metropolis-Hastings est d'un grand secours.

Définitions

On considèrera dans la suite que la matrice Q est symétrique et irréductible.

Dans ce cas remarquons que

$$\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} = \exp\left(\frac{1}{T}(V(x) - V(y))\right)$$

Aussi, si $V(x) > V(y)$ alors $\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} > 1$ donc l'algorithme acceptera toujours les sauts qui diminuent la valeur de la fonction V .

A l'inverse, si $V(x) < V(y)$, l'algorithme pourra quand même passer de x à y .

Cette propriété évite en général à l'algorithme de rester coincer dans des minimums locaux et permet de bien explorer tout l'espace d'état.

Définitions

On considèrera dans la suite que la matrice Q est symétrique et irréductible.

Dans ce cas remarquons que

$$\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} = \exp\left(\frac{1}{T}(V(x) - V(y))\right)$$

Aussi, si $V(x) > V(y)$ alors $\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} > 1$ donc l'algorithme acceptera toujours les sauts qui diminuent la valeur de la fonction V .

A l'inverse, si $V(x) < V(y)$, l'algorithme pourra quand même passer de x à y .

Cette propriété évite en général à l'algorithme de rester coincer dans des minimums locaux et permet de bien explorer tout l'espace d'état.

Définitions

On considèrera dans la suite que la matrice Q est symétrique et irréductible.

Dans ce cas remarquons que

$$\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} = \exp\left(\frac{1}{T}(V(x) - V(y))\right)$$

Aussi, si $V(x) > V(y)$ alors $\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} > 1$ donc l'algorithme acceptera toujours les sauts qui diminuent la valeur de la fonction V .

A l'inverse, si $V(x) < V(y)$, l'algorithme pourra quand même passer de x à y .

Cette propriété évite en général à l'algorithme de rester coincer dans des minimums locaux et permet de bien explorer tout l'espace d'état.

Définitions

On considèrera dans la suite que la matrice Q est symétrique et irréductible.

Dans ce cas remarquons que

$$\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} = \exp\left(\frac{1}{T}(V(x) - V(y))\right)$$

Aussi, si $V(x) > V(y)$ alors $\frac{\mu_T(y)}{\mu_T(x)} > 1$ donc l'algorithme acceptera toujours les sauts qui diminuent la valeur de la fonction V .

A l'inverse, si $V(x) < V(y)$, l'algorithme pourra quand même passer de x à y .

Cette propriété évite en général à l'algorithme de rester coincer dans des minimums locaux et permet de bien explorer tout l'espace d'état.

Metropolis-Hastings pour une mesure de Gibbs

X_0 = simulation selon une loi initiale quelconque ;

pour i entre 1 et n ,

y = simulation selon la loi $Q(X_{i-1}, y)$

si $uniform() < \exp\left(\frac{V(X_{i-1}) - V(y)}{T}\right)$

$X_i = y$

sinon faire

$X_i = X_{i-1}$

sortir X_n

Lorsque n est grand, la variable finale X_n a alors une distribution proche de μ_T .

Nous allons maintenant voir comment modifier l'algorithme de Metropolis Hastings précédent pour qu'il converge vers les points de E où V est minimal (on parle d'*argmin* de la fonction V)

On sait que lorsque T tend vers 0, la mesure μ_T se concentre sur les points où V est minimal. L'idée du recuit simulé est alors de simuler μ_{T_n} , à l'aide de l'algorithme de Metropolis-Hastings, et de faire baisser T_n au fur et à mesure de l'algorithme.

On fixe donc une dynamique Markovienne auxiliaire Q facile à simuler, et de préférence symétrique, puis une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de températures qui tend vers 0.

Pour une matrice Q symétrique, le probabilité d'acceptation/rejet s'écrit alors

$$\min \left(1, \frac{\mu_{T_n}(y)Q(y, x)}{\mu_{T_n}(x)Q(x, y)} \right) = \min \left(1, \exp \left(\frac{V(x) - V(y)}{T_n} \right) \right).$$

On fixe donc une dynamique Markovienne auxiliaire Q facile à simuler, et de préférence symétrique, puis une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de températures qui tend vers 0.

Pour une matrice Q symétrique, le probabilité d'acceptation/rejet s'écrit alors

$$\min \left(1, \frac{\mu_{T_n}(y)Q(y, x)}{\mu_{T_n}(x)Q(x, y)} \right) = \min \left(1, \exp \left(\frac{V(x) - V(y)}{T_n} \right) \right).$$

On effectue donc l'algorithme suivant dans le cas symétrique.

Recuit simulé

X_0 = simulation selon une loi initiale quelconque ;

pour i entre 1 et n ,

y = simulation selon la loi $Q(X_{i-1}, y)$

 si $\text{uniform}() < \exp\left(\frac{V(X_{i-1}) - V(y)}{T_i}\right)$

$X_i = y$

 sinon faire

$X_i = X_{i-1}$

sortir X_n

Comme précédemment, dès qu'un saut se fait en direction qui diminue la fonction V , il va être automatiquement accepté.

En revanche, le recuit simulé laisse une chance à l'algorithme de passer d'un état x à un état y même si $V(y) > V(x)$.

Toutefois, comme T_N tend vers 0, la probabilité d'effectuer un tel saut décroît avec n . On peut ainsi se sortir de minima locaux.

Les algorithmes comme par exemple la descente de gradient risquent au contraire de se coincer dans un minimum local en refusant de réaugmenter V .

Comme précédemment, dès qu'un saut se fait en direction qui diminue la fonction V , il va être automatiquement accepté.

En revanche, le recuit simulé laisse une chance à l'algorithme de passer d'un état x à un état y même si $V(y) > V(x)$.

Toutefois, comme T_N tend vers 0, la probabilité d'effectuer un tel saut décroît avec n . On peut ainsi se sortir de minima locaux.

Les algorithmes comme par exemple la descente de gradient risquent au contraire de se coincer dans un minimum local en refusant de réaugmenter V .

Comme précédemment, dès qu'un saut se fait en direction qui diminue la fonction V , il va être automatiquement accepté.

En revanche, le recuit simulé laisse une chance à l'algorithme de passer d'un état x à un état y même si $V(y) > V(x)$.

Toutefois, comme T_N tend vers 0, la probabilité d'effectuer un tel saut décroît avec n . On peut ainsi se sortir de minima locaux.

Les algorithmes comme par exemple la descente de gradient risquent au contraire de se coincer dans un minimum local en refusant de réaugmenter V .

Comme précédemment, dès qu'un saut se fait en direction qui diminue la fonction V , il va être automatiquement accepté.

En revanche, le recuit simulé laisse une chance à l'algorithme de passer d'un état x à un état y même si $V(y) > V(x)$.

Toutefois, comme T_N tend vers 0, la probabilité d'effectuer un tel saut décroît avec n . On peut ainsi se sortir de minima locaux.

Les algorithmes comme par exemple la descente de gradient risquent au contraire de se coincer dans un minimum local en refusant de réaugmenter V .

Le théorème suivant, qu'on ne va pas démontrer, justifie la convergence de cet algorithme.

Proposition

Pour toute fonction V , il existe une constante qui dépend de V telle que l'algorithme de recuit simulé avec la suite de température $T_n = \frac{C}{\log n+1}$ se concentre sur l'ensemble \mathcal{M} des points où V atteint son minimum :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \in \mathcal{M}] = 1.$$

Il faut bien se rendre compte que le choix de T_n peut s'avérer délicat. En particulier, $T_n = \frac{C}{\log n+1}$ est trop lent souvent trop lent, et un mauvais choix de la constante C peut empêcher le fonctionnement de l'algorithme.

On préfère souvent prendre une suite géométrique $T_{n+1} = \lambda T_n$ avec $0.5 < \lambda < 1$. Mais il faut faire attention tout de même car

- si on fait baisser T_n trop vite, on accepte de moins en moins les sauts qui font augmenter V , et on peut se retrouver coincé dans un minimum local.
- si on fait baisser T_n trop lentement, l'algorithme met trop longtemps à converger.

Il faut bien se rendre compte que le choix de T_n peut s'avérer délicat. En particulier, $T_n = \frac{C}{\log n+1}$ est trop lent souvent trop lent, et un mauvais choix de la constante C peut empêcher le fonctionnement de l'algorithme.

On préfère souvent prendre une suite géométrique $T_{n+1} = \lambda T_n$ avec $0.5 < \lambda < 1$. Mais il faut faire attention tout de même car

- si on fait baisser T_n trop vite, on accepte de moins en moins les sauts qui font augmenter V , et on peut se retrouver coincé dans un minimum local.
- si on fait baisser T_n trop lentement, l'algorithme met trop longtemps à converger.