

Martingales

Clément Pellegrini

`clement.pellegrini@math.univ-toulouse.fr`

Institut de Mathématiques de Toulouse,
Equipe de Statistique et Probabilité,
Bureau 220 Bâtiment 1R1

- La théorie des martingales est un sujet central dans la théorie des probabilités
- Outil probabiliste (pas vraiment d'équivalent dans les autres domaines des maths)
- Une martingale est un processus stochastique décrit par une suite de variables aléatoires (X_n)

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- On va utiliser du conditionnement (plus général que celui utilisé pour les chaînes de Markov)

- Conditionnement
- Martingale

Conditionnement

Rappelons la définition d'une tribu

Définition

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une famille de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu (sur Ω) si:

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (ii) pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$, où A^c désigne le complémentaire de A dans Ω (stabilité par passage au complémentaire).
- (iii) pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω satisfaisant $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par union dénombrable).

- En particulier, on appelle tribu engendrée par une classe de parties C de Ω la plus petite tribu sur Ω contenant C , c'est-à-dire l'intersection de toutes les tribus contenant C . On la note $\sigma(C)$.
- Un exemple classique est bien sûr la tribu borélienne sur $\Omega = \mathbb{R}^d$, où C désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$. On la note

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

- On parlera de tribu engendrée par une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

- On parlera aussi de tribu engendrée par $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\{X_1^{-1}(B_1), \dots, X_n^{-1}(B_n), B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$$

- La *probabilité conditionnelle* de $A \in \mathcal{A}$ sachant B est

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- La *mesure de probabilité conditionnelle sachant B* est l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).\end{aligned}$$

On note la $P(\cdot|B)$.

- Si Y est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ positive ou intégrable, on définit son *espérance conditionnelle sachant B* par

$$E(Y|B) := \int_{\Omega} Y dP(\cdot|B) = \frac{E(Y1_B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B Y dP.$$

Definition

Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeur dans E dénombrable. On suppose que $\forall x \in E, P(X = x) > 0$.

Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\varphi(x) := P(A|X = x) = \frac{P(A \cap \{X = x\})}{P(X = x)}$$

et on définit $P(A|X) := \varphi(X)$. C'est une v.a. qui dépend de X .

Definition

Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeur dans E dénombrable. On suppose que $\forall x \in E, P(X = x) > 0$.

Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\varphi(x) := P(A|X = x) = \frac{P(A \cap \{X = x\})}{P(X = x)}$$

et on définit $P(A|X) := \varphi(X)$. C'est une v.a. qui dépend de X .

Comme X est une v.a discrète on peut écrire

$$\varphi(X) = \sum_{i \in E} \varphi(i) \mathbf{1}_{X=i} = \sum_{i \in E} P(A|X = i) \mathbf{1}_{X=i}$$

Definition

Si Y est une v.a.r. avec $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ou $Y \geq 0$, on définit

$$\Psi(x) = E(Y|X = x)$$

Par définition l'*espérance conditionnelle de Y sachant X* notée

$$E(Y|X) := \Psi(X).$$

- En théorie de la mesure on définit $\mathbb{E}$ en partant de $P(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$ et ensuite on sait calculer $\mathbb{E}[X]$ pour une v.a
- Ici on fait de même on définit $P(A|X) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|X]$ et enfin on définit $\mathbb{E}[Y|X]$

A nouveau $\Psi(X)$ peu s'écrire

$$\mathbb{E}[Y|X] = \Psi(X) = \sum_{i \in E} \Psi(i) \mathbf{1}_{X=i}$$

On a donc

$$\mathbb{E}[Y|X] = \sum_{i \in E} \mathbb{E}[Y|X = i] \mathbf{1}_{X=i}$$

Il s'agit là d'une définition mais on est en mesure de calculer toutes les quantités notamment

$$\mathbb{E}[Y|X = i] = \frac{\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{X=i}]}{P(X = i)}$$

Lemma (Doob)

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow E$, et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ deux v.a..

Alors Y est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement s'il existe une fonction $h : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ borélienne avec $Y = h(X)$.

- Il est alors essentiel de remarquer que les espérances conditionnelles sachant une v.a X sont $\sigma(X)$ mesurables
- Rappel: une v.a est $\sigma(X)$ mesurable si pour tout borélien A

$$Y^{-1}(A) \in \sigma(X).$$

- Intuitivement $\sigma(X)$ contient l'information contenue dans la v.a X . Une v.a $\sigma(X)$ mesurable est entièrement déterminée par X

Proposition

Soit X une v.a. discrète et $Y \in L^1$, alors

- ① $E(|E(Y|X)|) \leq E(|Y|)$
- ② Pour toute v.a. Z , $\sigma(X)$ -mesurable et bornée

$$E(ZE(Y|X)) = E(ZY).$$

Réciproquement, si W est une v.a. $\sigma(X)$ mesurable et que pour toute v.a. Z , $\sigma(X)$ -mesurable et bornée

$$E(ZW) = E(ZY)$$

alors $E(Y|X) = W$ presque sûrement. De plus une telle v.a est unique.

Interprétation

- Soit X une v.a uniforme sur $\{-1, 1, 2\}$. Déterminer

$$\mathbb{E}[X|X]$$

- Soient X_1 et X_2 deux v.a indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On sait que $X_1 + X_2$ est une v.a de Poisson de paramètre 2λ . Déterminer

$$E(X_1|X_1 + X_2)$$

- Soit X une v.a uniforme sur $\{-1, 1, 2\}$. Déterminer

$$\mathbb{E}[X|X]$$

- Soient X_1 et X_2 deux v.a indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On sait que $X_1 + X_2$ est une v.a de Poisson de paramètre 2λ . Déterminer

$$E(X_1|X_1 + X_2)$$

Pour généraliser le cas discret on va partir du fait que l'espérance conditionnelle $E(Y|X)$ est l'unique v.a $\sigma(X)$ mesurable telle que pour toute v.a. Z , $\sigma(X)$ -mesurable et bornée

$$\mathbb{E}(ZE(Y|X)) = \mathbb{E}(ZY)$$

D'après le Lemme de Doob ceci est aussi équivalent à pour toute fonction f continue bornée

$$\mathbb{E}(f(X)\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(f(X)Y)$$

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$, alors $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est un sous espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definition

Soit $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. L'espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{B}$, notée $E(Y|\mathcal{B})$ est la projection orthogonale de Y sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Elle est caractérisée par :

- ❶ $E(Y|\mathcal{B}) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$
- ❷ $\forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P), E(ZY) = E(ZE(Y|\mathcal{B}))$.

Si $\mathcal{B} = \sigma(X)$ on écrit $E(Y|\mathcal{B}) = E(Y|X)$.

Definition

Soit Y une v.a.r. de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit $E(Y|\mathcal{B})$ comme l'unique v.a satisfaisant les propriétés suivantes:

- ❶ $E(Y|\mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$ -mesurable,
- ❷ Pour toute variable Z , $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée,
 $E(Z E(Y|\mathcal{B})) = E(ZY)$.

- Attention cette définition est également un résultat car elle suppose qu'une telle v.a existe. L'existence dépasse le cadre de ce cours et nous aurons simplement besoin de la caractérisation.
- Dans le cadre des v.a discrètes on construit les objets à la main. Là nous avons besoin d'utiliser des définitions abstraites dans le sens où il n'y a pas directement de formule simple de calcul.

Dans le cas où $\mathcal{B} = \sigma(X)$ on écrit

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[Y|X]$$

qui est l'unique v.a telle que pour toute fonction f continue bornée

$$\mathbb{E}(f(X)\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(f(X)Y)$$

Proposition

❶ Si $X, Y \in L^1$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors

$$E(aX + bY|\mathcal{B}) = aE(X|\mathcal{B}) + bE(Y|\mathcal{B}) \quad p.s.$$

❷ Si $X \in L^1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est convexe alors
 $E(f(X)|\mathcal{B}) \geq f(E(X|\mathcal{B})) \quad p.s.$

❸ Si $Y \geq Y'$ sont des v.a L^1 alors

$$E[Y|\mathcal{B}] \geq E[Y'|\mathcal{B}]$$

Proposition

- ❶ Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de v.a.r. positives telle que $X_n \nearrow_{n \rightarrow \infty} X$ p.s. alors

$$E(X_n | \mathcal{B}) \nearrow_{n \rightarrow \infty} E(X | \mathcal{B}) \quad \text{p.s.}$$

- ❷ Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables positives, alors

$$E(\liminf X_n | \mathcal{B}) \leq \liminf E(X_n | \mathcal{B}) \quad \text{p.s.}$$

- ❸ Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.r. dominées (il existe Y avec $|X_n| \leq Y$ et $EY < +\infty$) et telle que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ alors

$$E(X_n | \mathcal{B}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s., } L^1} E(X | \mathcal{B}).$$

Proposition

Soient X, Y des v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

- ① Si Y est $\mathcal{B}$ -mesurable alors l'égalité

$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}) \quad p.s.$$

est valable dès que $X \geq 0$, $Y \geq 0$ ou $X, XY \in L^1$.

- ② Si $X \in L^1$, et indépendante de $\mathcal{B}$ alors

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = X \quad p.s$$

Proposition

Soient X, Y des v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $C \subset \mathcal{B}$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$.

① Si $X \in L^1$, alors p.s.

$$E(E(X|\mathcal{B})|C) = E(X|C),$$

$$E(E(X|C)|\mathcal{B}) = E(X|C).$$

② Si $X \in L^1$ alors p.s

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]$$

On va utiliser souvent ces 4 derniers points dans l'étude des martingales.

Martingales

Définition

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Remarque

La notion de tribu est liée à l'information dont nous disposons.

Ainsi, supposer cette suite de tribus croissante traduit simplement le fait que plus on avance dans le temps, plus on a d'informations.

Définition

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Remarque

La notion de tribu est liée à l'information dont nous disposons.

Ainsi, supposer cette suite de tribus croissante traduit simplement le fait que plus on avance dans le temps, plus on a d'informations.

Définition

Considérons une suite de variables aléatoires réelles $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si M_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette notion abstraite sera en générale toujours satisfaite dans les exemples et exercices que nous traiterons.

Remarque

Notons que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment adaptée à sa filtration naturelle, définie par $\mathcal{F}_n := \sigma(M_k : k \in \{0, \dots, n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Considérons une suite de variables aléatoires réelles $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si M_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette notion abstraite sera en générale toujours satisfaite dans les exemples et exercices que nous traiterons.

Remarque

Notons que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment adaptée à sa filtration naturelle, définie par $\mathcal{F}_n := \sigma(M_k : k \in \{0, \dots, n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Considérons une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et dont tous les éléments sont intégrables. On dit que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) une

- (i) *martingale* si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) *surmartingale* si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) *sous-martingale* si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Observons qu'une martingale est à la fois une surmartingale et une sous-martingale. Par ailleurs, elle est forcément d'espérance constante, tandis que celle d'une surmartingale décroît et celle d'une sous-martingale croît.

Définition

Considérons une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et dont tous les éléments sont intégrables. On dit que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) une

- (i) *martingale* si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) *surmartingale* si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) *sous-martingale* si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Observons qu'une martingale est à la fois une surmartingale et une sous-martingale. Par ailleurs, elle est forcément d'espérance constante, tandis que celle d'une surmartingale décroît et celle d'une sous-martingale croît.

Définition

Considérons une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et dont tous les éléments sont intégrables. On dit que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) une

- (i) martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) surmartingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) sous-martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Observons qu'une martingale est à la fois une surmartingale et une sous-martingale. Par ailleurs, elle est forcément d'espérance constante, tandis que celle d'une surmartingale décroît et celle d'une sous-martingale croît.

Définition

Considérons une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et dont tous les éléments sont intégrables. On dit que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) une

- (i) martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) surmartingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) sous-martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Observons qu'une martingale est à la fois une surmartingale et une sous-martingale. Par ailleurs, elle est forcément d'espérance constante, tandis que celle d'une surmartingale décroît et celle d'une sous-martingale croît.

Donnons-nous quelques exemples bien sympathiques:

(i) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et intégrables, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ définie par $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ est une martingale (resp. surmartingale, sous-martingale) pour la filtration engendrée par la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, on a $\mathbb{E}[X_n] = 0$ (resp. $\mathbb{E}[X_n] \leq 0$, $\mathbb{E}[X_n] \geq 0$).

(ii) Même conclusion pour la suite $M_n := S_n^2 - n\sigma^2$, sous réserve que les X_i ont même variance σ^2 .

Donnons-nous quelques exemples bien sympathiques:

(i) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et intégrables, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ définie par $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ est une martingale (resp. surmartingale, sous-martingale) pour la filtration engendrée par la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, on a $\mathbb{E}[X_n] = 0$ (resp. $\mathbb{E}[X_n] \leq 0$, $\mathbb{E}[X_n] \geq 0$).

(ii) Même conclusion pour la suite $M_n := S_n^2 - n\sigma^2$, sous réserve que les X_i ont même variance σ^2 .

(iii) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et d'espérance commune égale à 1, alors la suite

$M_n := \prod_{i=1}^n X_i$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$.

(iv) Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, centrées, et à accroissements indépendants, alors c'est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

(v) Si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration quelconque et X une variable aléatoire intégrable, alors $M_n := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(iii) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et d'espérance commune égale à 1, alors la suite

$M_n := \prod_{i=1}^n X_i$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$.

(iv) Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, centrées, et à accroissements indépendants, alors c'est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

(v) Si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration quelconque et X une variable aléatoire intégrable, alors $M_n := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(iii) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et d'espérance commune égale à 1, alors la suite

$M_n := \prod_{i=1}^n X_i$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$.

(iv) Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, centrées, et à accroissements indépendants, alors c'est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

(v) Si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration quelconque et X une variable aléatoire intégrable, alors $M_n := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et telle que tous ses éléments soient intégrables. Alors c'est une martingale si et seulement si pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[M_{n+p} \mid \mathcal{F}_n] = M_n.$$

Preuve

Proposition

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. On suppose que $f(M_n) \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(f(M_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est elle-même une sous-martingale. Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, alors il suffit que f soit convexe.

Preuve: Immédiate en utilisant l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle.

Remarque

Par exemple, si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $(|M_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $p \geq 1$ et sous réserve que chaque M_n est dans L^p) et $(M_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des sous-martingales.

Proposition

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. On suppose que $f(M_n) \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(f(M_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est elle-même une sous-martingale. Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, alors il suffit que f soit convexe.

Preuve: Immédiate en utilisant l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle.

Remarque

Par exemple, si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $(|M_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $p \geq 1$ et sous réserve que chaque M_n est dans L^p) et $(M_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des sous-martingales.

Introduisons à présent la notion de temps d'arrêt.

Définition

Une variable aléatoire entière τ , pouvant prendre la valeur $+\infty$, est un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Notons que dans cette définition on peut remplacer l'événement $\{\tau \leq n\}$ par $\{\tau = n\}$

Pour illustrer cette notion de temps d'arrêt, prenons l'exemple d'un joueur rentrant avec une somme S_0 dans un casino. On note S_n sa fortune à l'instant n . Ce joueur décide de jouer tant qu'il a encore de l'argent dans son portefeuille (on suppose le casino ouvert 24h sur 24). Cela signifie qu'il joue jusqu'à l'instant

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\},$$

qui est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition

Étant donné une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un temps d'arrêt τ , on définit $\mathcal{F}_\tau$ la tribu des événements antérieurs à τ par

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans beaucoup de circonstances, ce qui nous intéresse est le comportement d'une suite de variables aléatoires, disons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, évaluée au temps d'arrêt τ .

S'il est supposé fini p.s., alors on peut définir la variable aléatoire X_τ , qui est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable, comme

$$X_\tau := \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{\tau = n\}} X_n.$$

Lorsque que le temps d'arrêt est infini, nous pouvons toujours le tronquer en considérant plutôt pour un entier n donné le temps d'arrêt $n \wedge \tau$, qui est fini et même borné. Dans ce cas, la variable aléatoire $X_{n \wedge \tau}$ est bien définie.

Théorème (Théorème d'arrêt)

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et soit τ un temps d'arrêt. Alors la suite arrêtée $(M_{n \wedge \tau})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une martingale.

De plus, si $\tau_1 \leq \tau_2$ sont deux temps d'arrêt supposés bornés, alors on a

$$\mathbb{E}[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = M_{\tau_1} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_{\tau_1}] = \mathbb{E}[M_{\tau_2}] = \mathbb{E}[M_0].$$

Preuve

Lorsque l'on étudie un processus aléatoire, une question importante en pratique est de savoir contrôler son évolution.

En particulier, il s'avère que pour les sous-martingales positives, nous pouvons obtenir des inégalités sur son processus supremum, à savoir

$$M_n^* := \sup_{0 \leq k \leq n} M_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On les appelle inégalités maximales (de Doob).

Dans cette partie, nous établissons deux inégalités maximales pour les sous-martingales positives.

En particulier, une fois que tous les résultats ci-dessous seront démontrés, ils seront immédiatement valables pour des martingales, en remplaçant M_n^* par

$$\sup_{0 \leq k \leq n} |M_k|$$

Théorème

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale positive par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda \mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{M_n^* \geq \lambda\}}] \leq \mathbb{E}[M_n], \quad \lambda > 0.$$

Par ailleurs, si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a tous ses éléments dans L^p , où $p \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_n|^p]}{\lambda^p}, \quad \lambda > 0.$$

Preuve

Preuve Établissons tout d'abord la première inégalité. Notons que pour une sous-martingale, on a

$$M_k \leq \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_k], \quad k \leq n, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

ce qui entraîne que pour tout $A \in \mathcal{F}_k$, en multipliant par 1_A et en prenant l'espérance,

$$\mathbb{E}[M_k 1_A] \leq \mathbb{E}[M_n 1_A].$$

Par ailleurs, on peut écrire l'identité suivante: pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) = \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où τ_λ est le temps d'arrêt $\tau_\lambda := \inf\{n \in \mathbb{N} : M_n \geq \lambda\}$.

Ainsi, étant donné que sur $\{\tau_\lambda \leq n\}$, on a $M_{\tau_\lambda} \geq \lambda$, on obtient en passant à l'espérance et en utilisant l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned}\lambda \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n) &\leq \mathbb{E}[M_{\tau_\lambda} \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_k \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \quad \text{car } \{\tau_\lambda = k\} \in \mathcal{F}_k \\ &= \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}],\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de la première inégalité.

Ainsi, étant donné que sur $\{\tau_\lambda \leq n\}$, on a $M_{\tau_\lambda} \geq \lambda$, on obtient en passant à l'espérance et en utilisant l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned}\lambda \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n) &\leq \mathbb{E}[M_{\tau_\lambda} \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_k \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \quad \text{car } \{\tau_\lambda = k\} \in \mathcal{F}_k \\ &= \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}],\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de la première inégalité.

Ainsi, étant donné que sur $\{\tau_\lambda \leq n\}$, on a $M_{\tau_\lambda} \geq \lambda$, on obtient en passant à l'espérance et en utilisant l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned}\lambda \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n) &\leq \mathbb{E}[M_{\tau_\lambda} \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_k \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \quad \text{car } \{\tau_\lambda = k\} \in \mathcal{F}_k \\ &= \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}],\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de la première inégalité.

Ainsi, étant donné que sur $\{\tau_\lambda \leq n\}$, on a $M_{\tau_\lambda} \geq \lambda$, on obtient en passant à l'espérance et en utilisant l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned}\lambda \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n) &\leq \mathbb{E}[M_{\tau_\lambda} \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_k \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda = k\}}] \quad \text{car } \{\tau_\lambda = k\} \in \mathcal{F}_k \\ &= \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\tau_\lambda \leq n\}}],\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de la première inégalité.

Pour la seconde inégalité, on notera que si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale ou une sous-martingale positive et telle que $M_n \in L^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(|M_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale positive et l'inégalité précédente s'applique, ce qui termine la preuve.

À présent, donnons une seconde inégalité maximale, comparant l'espérance du processus supremum avec celle du processus originel.

Théorème (Doob L^p)

Soit $p > 1$. Supposons que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une sous-martingale positive par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et telle que $M_n \in L^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n^ \in L^p$ et*

$$\mathbb{E}[(M_n^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[M_n^p].$$

Preuve Tout d'abord, le fait que $M_n^* \in L^p$ est une conséquence des inégalités

$$(M_n^*)^p = \sup_{0 \leq k \leq n} M_k^p, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^n M_k \right)^p \quad (2)$$

$$\leq (n+1)^{p-1} \sum_{k=0}^n M_k^p. \quad (3)$$

Preuve Tout d'abord, le fait que $M_n^* \in L^p$ est une conséquence des inégalités

$$(M_n^*)^p = \sup_{0 \leq k \leq n} M_k^p, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^n M_k \right)^p \quad (2)$$

$$\leq (n+1)^{p-1} \sum_{k=0}^n M_k^p. \quad (3)$$

Preuve Tout d'abord, le fait que $M_n^* \in L^p$ est une conséquence des inégalités

$$(M_n^*)^p = \sup_{0 \leq k \leq n} M_k^p, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^n M_k \right)^p \quad (2)$$

$$\leq (n+1)^{p-1} \sum_{k=0}^n M_k^p. \quad (3)$$

En se ramenant à la première inégalité maximale du théorème 0.13, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n^*)^p] &= p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(M_n^* \geq x) dx \\ &\leq p \int_0^\infty x^{p-2} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* \geq x\}}] dx \\ &= p \mathbb{E}[M_n \int_0^{M_n^*} x^{p-2} dx] \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}] \\ &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n^p]^{1/p} \mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $q = p/(p-1)$. Enfin, on regroupe les termes comme il faut dans l'inégalité ci-dessus et ceci achève la démonstration.

En se ramenant à la première inégalité maximale du théorème 0.13, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n^*)^p] &= p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(M_n^* \geq x) dx \\ &\leq p \int_0^\infty x^{p-2} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* \geq x\}}] dx \\ &= p \mathbb{E}[M_n \int_0^{M_n^*} x^{p-2} dx] \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}] \\ &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n^p]^{1/p} \mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $q = p/(p-1)$. Enfin, on regroupe les termes comme il faut dans l'inégalité ci-dessus et ceci achève la démonstration.

En se ramenant à la première inégalité maximale du théorème 0.13, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n^*)^p] &= p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(M_n^* \geq x) dx \\ &\leq p \int_0^\infty x^{p-2} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* \geq x\}}] dx \\ &= p \mathbb{E}[M_n \int_0^{M_n^*} x^{p-2} dx] \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}] \\ &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n^p]^{1/p} \mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $q = p/(p-1)$. Enfin, on regroupe les termes comme il faut dans l'inégalité ci-dessus et ceci achève la démonstration.

En se ramenant à la première inégalité maximale du théorème 0.13, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n^*)^p] &= p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(M_n^* \geq x) dx \\ &\leq p \int_0^\infty x^{p-2} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* \geq x\}}] dx \\ &= p \mathbb{E}[M_n \int_0^{M_n^*} x^{p-2} dx] \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}] \\ &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n^p]^{1/p} \mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $q = p/(p-1)$. Enfin, on regroupe les termes comme il faut dans l'inégalité ci-dessus et ceci achève la démonstration.

En se ramenant à la première inégalité maximale du théorème 0.13, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n^*)^p] &= p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(M_n^* \geq x) dx \\ &\leq p \int_0^\infty x^{p-2} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* \geq x\}}] dx \\ &= p \mathbb{E}[M_n \int_0^{M_n^*} x^{p-2} dx] \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}] \\ &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n^p]^{1/p} \mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $q = p/(p-1)$. Enfin, on regroupe les termes comme il faut dans l'inégalité ci-dessus et ceci achève la démonstration.

Convergence des martingales

Dans ce paragraphe, nous nous attaquons à la convergence des martingales, sous diverses hypothèses d'intégrabilité.

Enonçons ce premier résultat, dont la preuve repose essentiellement sur une inégalité maximale de Doob dans L^2 .

Théorème

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est supposée bornée dans L^2 , i.e.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[M_n^2 \right] < +\infty.$$

Alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. et dans L^2 vers une variable aléatoire $M_\infty \in L^2$.

Preuve: Pour toute paire arbitraire de rationnels $a < b$, notons l'ensemble

$$A_{a,b} := \left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) \right\}.$$

Ainsi, la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va converger p.s. (éventuellement vers l'infini) à partir du moment où l'on montre que $\mathbb{P}(\cup_{a,b \in \mathbb{Q}} A_{a,b}) = 0$.

Afin de faire le rapprochement avec les inégalités maximales, observons que l'on a

$$A_{a,b} \subset \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{k \geq m} |M_k(\omega) - M_m(\omega)| \geq \frac{b-a}{2} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

En effet, si $\omega \in A_{a,b}$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega)$$

Or

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) = \lim_n \inf_{k \geq n} M_k(\omega) \quad (\text{croissante}) \quad (4)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) = \lim_n \sup_{k \geq n} M_k(\omega) \quad (\text{décroissante}) \quad (5)$$

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\inf_{k \geq m} M_k(\omega) \leq a < b \leq \sup_{k \geq m} M_k(\omega)$$

alors pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}b - a &\leq \sup_{k \geq m} M_k(\omega) - \inf_{k \geq m} M_k(\omega) \\&\leq \sup_{k \geq m} |M_k(\omega)| - \inf_{k \geq m} |M_k(\omega)| \\&\leq \sup_{k, l \geq m} |M_k(\omega) - M_l(\omega)| \\&\leq 2 \sup_{k \geq m} |M_k(\omega) - M_m(\omega)|.\end{aligned}$$

Considérons à présent les accroissements définis par $d_k := M_k - M_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}_*$.

Comme la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de carré intégrable, on en déduit que les $(d_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$ sont orthogonaux entre eux c'est à dire:

$$\mathbb{E}[d_k d_j] = 0, i \neq j$$

Comme précédemment nous pouvons supposer sans perte de généralité que $M_0 = 0$, et l'on obtient alors

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n d_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[d_k^2],$$

qui est la somme partielle d'une série convergente par l'hypothèse de L^2 -bornitude.

Par ailleurs, le processus $(M_{k+m} - M_m)_{k \in \mathbb{N}}$ étant une martingale (pour la filtration translatée $(\mathcal{F}_{k+m})_{k \in \mathbb{N}}$), la suite $(M'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $M'_k := (M_{k+m} - M_m)^2$ est une sous-martingale positive et l'inégalité de Doob, combinée au lemme de Fatou, s'applique de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq m} |M_k - M_m| \geq \frac{b-a}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 0} M'_k \geq \frac{(b-a)^2}{4}\right) \\ &\leq \frac{4}{(b-a)^2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M'_k] \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} \sup_{k \geq 0} \mathbb{E}[M'_k] \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} \sup_{k \geq 0} \sum_{i=m}^{k+m} \mathbb{E}[d_i^2] \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} \sum_{i \geq m} \mathbb{E}[d_i^2].\end{aligned}$$

Enfin, le terme de droite tend vers 0 lorsque $m \rightarrow +\infty$, ce qui démontre que $\mathbb{P}(A_{a,b}) = 0$, et donc que $\mathbb{P}(\cup_{a,b \in \mathbb{Q}} A_{a,b}) = 0$.

Pour démontrer la seconde assertion, notons M_∞ la limite p.s. de la martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\mathbb{E}[M_\infty^2] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_n^2] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[M_n^2] < +\infty,$$

d'où M_∞ est non seulement finie mais aussi dans L^2 . Enfin, la convergence dans L^2 est immédiate d'après ce qui précède:

$$\mathbb{E}[(M_\infty - M_n)^2] = \sum_{k \geq n+1} \mathbb{E}[d_k^2] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Enfin, le terme de droite tend vers 0 lorsque $m \rightarrow +\infty$, ce qui démontre que $\mathbb{P}(A_{a,b}) = 0$, et donc que $\mathbb{P}(\cup_{a,b \in \mathbb{Q}} A_{a,b}) = 0$.

Pour démontrer la seconde assertion, notons M_∞ la limite p.s. de la martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\mathbb{E}[M_\infty^2] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_n^2] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[M_n^2] < +\infty,$$

d'où M_∞ est non seulement finie mais aussi dans L^2 . Enfin, la convergence dans L^2 est immédiate d'après ce qui précède:

$$\mathbb{E}[(M_\infty - M_n)^2] = \sum_{k \geq n+1} \mathbb{E}[d_k^2] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Mentionnons que ce résultat reste valable lorsqu'on remplace L^2 par L^p pour tout $p > 1$

Théorème

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est supposée bornée dans L^p $p > 1$, i.e.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|^p] < +\infty.$$

Alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. et dans L^p vers une variable aléatoire $M_\infty \in L^p$.

Il s'avère que l'on peut obtenir une complète caractérisation de la convergence des martingales dans l'espace L^1 . Pour ce faire, introduisons tout d'abord le concept d'intégrabilité uniforme.

Définition

Une famille de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i \in I}$ est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| 1_{\{|X_i| > a\}}] = 0.$$

L'intérêt d'introduire cette notion est qu'elle va nous permettre d'obtenir la convergence dans L^1 à partir de la convergence p.s., lorsque le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

Proposition

Si une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et converge p.s. vers une variable aléatoire X_∞ , alors $X_\infty \in L^1$ et la convergence a aussi lieu dans L^1 .

La proposition suivante exhibe des critères intéressants en pratique pour établir la propriété d'intégrabilité uniforme.

Proposition

Les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Si une famille de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i \in I}$ est bornée par une variable aléatoire intégrable, alors elle est uniformément intégrable.

(ii) S'il existe $p > 1$ tel que la famille de variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ soit bornée dans L^p , i.e.

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i|^p] < +\infty,$$

alors elle est uniformément intégrable.

À présent, nous sommes en mesure d'établir la caractérisation de la convergence dans L^1 des martingales.

Théorème

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une variable aléatoire $Z \in L^1$ telle que

$$M_n = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

(iii) la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. et dans L^1 vers une variable $M_\infty \in L^1$.

Dans ce cas, on a $Z = M_\infty$ et la martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite fermée (par M_∞).

Martingale

Le théorème précédent indique que la seule bornitude L^1 ne permet pas de conclure comme pour le cas de L^p $p > 1$. On a cependant le théorème suivant très utile

Théorème

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est supposée bornée dans L^1 , i.e.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty.$$

Alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. vers une variable aléatoire $M_\infty \in L^1$.

Attention en général il n'y a pas convergence L^1 . Il faut l'uniforme intégrabilité pour avoir la convergence L^1

Une martingale positive converge donc toujours p.s !!!!!!!

On reprend le cadre de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ avec p (droite) et q (gauche) avec $p > q$. On s'intéresse

$$T = \inf\{n : S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$$

On a que

$$S_n - n(p - q), \quad U_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

sont des martingales pour la filtration naturelle. Appliquons le théorème d'arrêt. Attention ici T est fini presque sûrement mais pas borné donc on considère

$$n \wedge T$$

On va en déduire que

$$P(S_T = -a) \text{ et } \mathbb{E}[T].$$

Attention ici on a que $p \neq q$. Si $p = q$ cette approche tombe à l'eau.
Cependant on trouve bien la valeur de

$$P(S_T = -a)$$

Pour la valeur de $\mathbb{E}[T]$ on va regarder la martingale

$$S_n^2 - n$$

Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot

ABRACADABRA

Le but de l'exercice est de calculer

$$\mathbb{E}[T]$$

.

Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste avant chaque seconde $n = 1, 2, 3, \dots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

la n – eme lettre tape par l'animal est un A

Si il perd, il part et le singe met 1 banane dans son sac. Si il gagne, il reçoit 26 bananes du singe, qu'il remise immédiatement sur l'événement

la $n + 1$ – eme lettre tape par l'animal est un B

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

la $n + 2$ - eme lettre tape par l'animal est un R

Et ainsi de suite jusqu'à ce que

ABRACADABRA

sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

On considère le processus (Z_n) défini par

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i},$$

où les $(Y_{n,i})$ sont i.i.d de loi μ . On suppose que $\mu(\{0\}) \neq 0$ et on note $m = \mathbb{E}[Y_{n,i}]$.

- (Z_n) est une chaîne de Markov
- Comportement de (Z_n) ?

- Le processus

$$\frac{Z_n}{m^n}$$

est une martingale

- On pose $g(s) = \mathbb{E}[s^{Y_{n,i}}]$. Pour $m < 1$ on suppose qu'il existe un unique $s \in]0, 1[$ tel que $g(s) = s$ montrer que s^{Z_n} est une martingale qui converge p.s et dans L^p pour tout p
- En déduire le comportement asymptotique de Z_n dans le cas $m > 1$ et $m < 1$
- Calculer la probabilité d'extinction dans ces deux cas.
- Cas $m = 1$. Montrer que Z_∞ est L^1 et en déduire sa valeur. A t-on convergence L^1 de (Z_n) ? A t-on uniforme intégrabilité.

- Mise en place du problème.

On considère un processus (Z_n) adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)$. On se fixe un horizon N et on cherche à optimiser (Z_n) en moyenne jusqu'à ce temps N .

- Pour cela on veut se donner une règle c'est à dire déterminer un temps T où l'on veut s'arrêter (Z_n) . Qui dit temps et arrêt dit temps d'arrêt. On cherche donc

$$\sup_{T \text{ t.a.} \leq N} \mathbb{E}[Z_T]$$

- Un exemple vous devez recruter quelqu'un et vous recevez 50 personnes pour ce poste. A chacune de ces personnes est attribué un score suite à son entretien. A chaque fois que vous refusez une personne vous ne pouvez pas la rappeler. Quelle stratégie pouvez vous mettre en place pour optimiser votre recrutement?
- Les martingales vous aident...

Temps d'arrêt optimal

- On définit par récurrence descendante

$$U_N = Z_N, \quad U_n = \sup\{Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}$$

- (U_n) est une surmartingale

Proposition

C'est la plus petite surmartingale qui majore (Z_n)

- Rappel une surmartingale satisfait

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq M_n$$

c'est donc un "jeu" défavorable. Donc (U_n) est le moins défavorable parmi les défavorables.

Proposition

On pose

$$T = \inf\{n, |U_n = Z_n\}.$$

T est un temps d'arrêt et $(U_{n \wedge T})$ est une martingale

Proposition

T est optimal dans le sens où

$$[EY_S] \leq [EY_T]$$

pour tout temps d'arrêt $S \leq N$.

- Revenons à la situation concrète
- Un exemple vous devez recruter quelqu'un et vous recevez N personnes pour ce poste. A chacune de ces personnes est attribué un score suite à son entretien. A chaque fois que vous refusez une personne vous ne pouvez pas la rappeler. Quelle stratégie pouvez vous mettre en place pour optimiser votre recrutement?

- On va considérer Ω l'ensemble des permutations des N candidats muni de la mesure uniforme.
- Pour $\omega \in \Omega$ on note $R_i(\omega) = \omega_i$ qui donne le rang du candidat i
- Attention on ne connaît pas le rang de tous les candidats avant de les avoir tous auditionner.
- Pour $n \leq N$ on note X_n le rang relatif du n ème candidat vis à vis des autres interrogés. En particulier $X_n \in \{1, \dots, n\}$.

frame

- Les v.a (R_i) sont i.i.d. Quelle est leur loi?
- Les v.a (X_i) sont indépendantes. Loi?