UNIVERSITÉ PAUL SABATIER Année 2022/2023

M1-ESR. Stochastic Processes. .

TD - MARTINGALES

Exercice 1. **Modèle de Wright Fisher**

On considère une population asexuée de taille constante N. On suppose que la reproduction est aléatoire : tout se passe comme si chaque individu choisissait de manière indépendante son parent dans la génération précédente. Le modèle de Wright-Fisher concerne l'étude de l'évolution de deux allèles, A et a, au sein d'une population. Pour $n \geq 0$, on note X_n le nombre d'allèles A présents dans la population. On suppose que $X_0 = i$.

1. Montrer que la loi de X_{n+1} sachant X_n est $\mathcal{B}(N, X_n/N)$.
2. Montrer que (X_n) est une martingale par rapport à une filtration que l'on précisera.
3. Montrer que X_n converge vers une limite X_∞ et préciser le type de convergence.
4. Soit T le temps d'atteinte de $\{0, N\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
5. Soit $i \neq 0$ et $i \neq N$. Montrer que $\mathbb{P}[X_{n+1} \in \{0, N\} | X_n = i] \geq 2^{-N+1}$.
6. En déduire que T est fini presque sûrement.
7. montrer que $\mathbb{P}_i[X_T = N] = i/n$
8. Montrer que $M_n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale et calculer $\mathbb{E}(X_\infty(N - X_\infty))$.
9. Montrer que l'un des allèles disparait en temps fini p.s. Calculer la probabilité que ce soit A.

Exercice 2. **Urne de Polya**

On dispose (d'une infinité) de boules rouges et vertes. A l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : On tire une boule de l'urne "au hasard" et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de même couleur. Soit S_n le nombre de boules rouges au temps n, et $X_n = S_n/(n + 2)$ la proportion de boules rouges au temps n.

1. Montrer que X_n est une martingale (bornée) et calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
2. Montrer que la limite $\lim X_n = X$ existe p.s.
3. Soit
$$Z_n^{(k)} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(N_n + j)}{\prod_{j=2}^{k+1}(n + j)}.$$
Montrer que $(Z_n^{(k)})$ est une martingale bornée (donc convergente vers X^k) et que $\mathbb{E}(X^k) = 1/(k + 1)$. En déduire que $X \sim U[0, 1]$.

Exercice 3. On prend un jeu de 52 cartes que l'on suppose bien mélangé et on retourne une à une les cartes. Un joueur peut à tout moement dire la prochaine carte est rouge. Si il s'avère que la prochaine carte est rouge alors il a gagné.

On note R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. On note A_n lévénement la nième carte retournée est rouge. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(R_0, R_1, \ldots, R_n)$

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1} | R_n = j)$
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} | \mathcal{F}_n)$. On remarquera que (R_n) est une chaine de MArkov.

3. Montrer que
$$\mathbb{E}(R_{n+1}|F_n) = R_n - \frac{R_n}{52-n}$$
4. Montrer que $X_n = \frac{R_n}{52-n}$ est une martingale et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n)$
5. Soit τ le temps où le joueur dit la prochaine est rouge avant de tirer la carte suivante. On supposera que $\{\tau = n\}$ est une fonction de $(R_0, \ldots, R_n)$, C'est donc un temps d'arrêt. Montrer que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. En déduire que la probabilité de gagner ne dépend pas de la stratégie.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme que doit verser une compagnie d'assurance pour couvrir les frais d'accident de ses assurés le mois n est décrite par une variable aléatoire Y de moyenne μ. La somme cumulée due après n mois est donc donnée par
$$C_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad C_0 = 0$$
où $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi Y. Les rentrées d'argent de cette compagnie après n mois sont données par
$$D_n = A + Pn$$
où A correspond au capital initial de la compagnie et $P > 0$. Le capital après n mois est donc donné par
$$R_n = D_n - C_n.$$
On note
$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, R_n \leq 0\}$$
et on denote $(\mathcal{F}_n)$ la filtration naturelle de (C_n) c'est à dire
$$\mathcal{F}_n = \sigma(C_0, \ldots, C_n), n \in \mathbb{N}.$$

1. On suppose dans cette question que $P < \mu$. En utilisant la loi forte des grands nombres déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$ et en déduire que
$$\mathbb{P}[T < +\infty] = 1.$$
2. Montrer que T est un temps d'arrêt vis à vis de la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
3. Soit $u \in \mathbb{R}$, on note $g(u) = \mathbb{E}[e^{u(P-Y)}]$. Montrer que $(W_n(u))$ définie par
$$W_n(u) = \frac{e^{uR_n}}{g(u)^n}, n \in \mathbb{N}$$
est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale.
4. En appliquant le théorème d'arrêt de Doob, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\mathbb{E}[W_T(u)\mathbf{1}_{T\leq n}] \leq e^{uA}.$$
5. Dans les questions suivantes on suppose $P > \mu$. On suppose également que Y suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on admet que pour tout $u \in \mathbb{R}$
$$g(u) = e^{(P-\mu)u + \frac{\sigma^2 u^2}{2}}.$$
Résoudre $g(u) = 1, u \in \mathbb{R}$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\mathbb{P}[T \leq n] \leq e^{\frac{2(\mu-P)A}{\sigma^2}}.$$
7. En déduire que
$$\mathbb{P}[T < +\infty] \leq e^{\frac{2(\mu-P)A}{\sigma^2}}.$$

Exercice 5 Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot
$$ABRACADABRA$$
Le but de l'exercice est de calculer
$$\mathbb{E}[T]$$
Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste avant chaque seconde $n = 1, 2, 3, ...$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement
$$la\ n-eme\ lettre\ tapee\ par\ l'animal\ est\ un\ A$$
Si il perd, il part et le singe met 1 banane dans son sac. Si il gagne, il reçoit 26 bananes du singe, qu'il remise immédiatement sur l'événement
$$la\ n+1-eme\ lettre\ tapee\ par\ l'animal\ est\ un\ B$$
Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement
$$la\ n+2-eme\ lettre\ tapee\ par\ l'animal\ est\ un\ R$$
Et ainsi de suite jusqu'à ce que
$$ABRACADABRA$$
sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale. On précisera la filtration.
2. Montrer que
$$\mathbb{E}[T] = 26^11 + 26^4 + 26$$
3. Refaire le calcul avec "ABCDEFGHIJK"