# 1 Exercice

On choisit au hasard et de facon équitable un entier parmi $[\![1,\ldots,n]\!]$. On note $A_p$ l'événement "cet entier est divisble par p"

1. Calculer $\mathbb{P}[A_p]$ lorsque $p$ divise $n$.
2. Montrer que si $p_1,\ldots,p_k$ sont des diviseurs premiers de $n$ distincts alors les événements $A_{p_1},\ldots,A_{p_k}$ sont indépendants.
3. Soit $\phi$ la fonction indicatrice d'Euler c'est à dire $\phi(n)$ donne le nombre d'entiers non nuls inférieurs à $n$ et premiers avec $n$. Montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{p\,\text{premier}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

# 2 Exercice

Soit $X$ une variable uniforme sur $[0,1]$. On pose pour $p > 0$
$$Y = \frac{-1}{p}\ln(X)$$
Déterminer la loi de $Y$

# 3 Exercice

Soient $(X,Y)$ deux variables aléatoires indépendantes avec $X \sim \mathcal{E}(\mu)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.
2. La loi de $E(X)+1$ où $E(X)$ désigne la partie entière de $X$
3. Pour $\mu = 1$ déterminer $\mathbb{P}[X > x^2 + y^2]$ pour $x > 0, y > 0$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ sans passage par des coordonnées polaires.

# 4 Exercice

Soit $n_1$ et $n_2$ deux entiers et $p \in ]0,1[$, on considère $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2,p)$. On suppose $X$ et $Y$ indépendantes. Quelle est la loi de $X+Y$?

# 5 Exercice

Soit $X$ une v.a aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. Montrer que
$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$$
Soit $X$ une v.a dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathbb{P}(X > t)dt$$
Peut t-on généraliser.

# 6 Exercice

Soit $X$ une variable aléatoire de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$ et soient $\lambda \geq 0$ et $\alpha \geq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$
2. Calculer $\mathbb{E}[(X - m + \lambda)^2]$ en fonction de $\sigma, m$ et $\lambda$
3. Montrer que
$$\mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$$
4. Déduire
$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \geq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$$
appelée inégalité de Cantelli.
5. Finalement montrer que
$$\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \geq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$$
6. Comparer à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

# 7 Exercice

Soient $X, Y, Z$ des v.a indépendantes de Rademacher. On pose $X' = YZ, Y' = XZ$ et $Z' = XY$. Montrer que $X', Y', Z'$ sont indépendantes deux à deux mais pas indépendantes dans leur ensemble.

A quelle condition une variable aléatoire est indépendante d'elle même?

# 8 Exercice

Soit $X$ une v.a de fonction de répartition $F$. On pose

$$G(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\}$$

appelée "pseudo-inverse" de $F$

1. Montrer que
   (a) Si $F$ est continue, $\forall t \in ]0, 1[, F(G(t)) = t$
   (b) Si $F$ est strictement croissante, $\forall x \in \mathbb{R}, G(F(x)) = x$.
   (c) Si $F$ est continue et strictement croissante, $F$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et on a $G = F^{(-1)}$
2. Montrer que si $F$ est continue et strictement croissante, $F(X)$ suit la loi uniforme
3. Montrer que si $Y$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, $G(Y)$ admet $F$ comme fonction de répartition.

# 9 Exercice

On joue a pile ou face; on note $X_i = 1$ si on obtient pile et $X_i = -1$ si on obtient face. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, S_0 = 0$$

1. Quel est le nombre de chemins tel que $S_n = x$
2. Pour $x > 0$, montrer que le nombre de chemins tel que $S_1 = 1$ et $S_n = x$ et $\exists k \in [\![2, \ldots, n]\!]$ tel que $S_k = 0$ est égal à celui où $S_1 = -1$ et $S_n = x$
3. En déduire la probabilité

$$\mathbb{P}[S_k > 0, \forall k \in [\![1, \ldots, n]\!] \mid S_n = x]$$

# 10 Exercice: Polynômes de Bernstein

On considère une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$. Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de paramètre $x$

1. Quelle est la loi de $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
2. Calculer $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ en fonction de $x$. On note alors $B_{n,f}(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ cette quantité qui est un polynôme en $x$.
3. Pour $\delta > 0$ on pose $A_\delta = \{|x - \frac{S_n}{n}| \leq \delta\}$. Montrer que pour tout $\delta > 0$ on a

$$\mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq w(\delta)P(A_\delta) + 2\|f\|_\infty P(A_\delta^c)$$

   où $w(.)$ désigne le module de continuité de $f$
4. Montrer que

$$P(A_\delta^c) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

5. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - B_{n,f}(x)\|_\infty = 0$$

6. Montrer que $w(h_1 + h_2) \leq w(h_1) + w(h_2)$ et en déduire $w(nh) \leq nw(h)$. En observant que $h_1 \leq 1 + \lfloor h_1 \rfloor$, montrer que $w(h_1 h_2) \leq (1 + \lfloor h_1 \rfloor)w(h_2)$.
7. En observant que $|f(x) - f(y)| \leq w(|x - y|)$, montrer que

$$\mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right) w(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

8. En observant que $\|X\|_1 \leq \|X\|_2$, montrer que

$$\mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \frac{3}{2} w(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

   Maintenant on considère $(R_i)_{i=1\ldots,n}$, $n$ variables aléatoires de Rademacher indépendantes et $(a_i)_{i=1\ldots,n}$, $n$ réels. On pose

$$Z = a_1 R_1 + \ldots + a_n R_n, \quad \text{et} \quad G = \prod_{j=1}^{n}(1 + i a_j R_j)$$

9. Dans un premier temps on supposera que $\sum a_i^2 = 1$. Montrer que $|G| \leq \sqrt{e}$
10. Calculer $\mathbb{E}[R_k G]$ pour tout $k$, puis $\mathbb{E}[ZG]$
11. En déduire que $1 \leq \sqrt{e}\|Z\|_1$
12. On revient au cas général c'est à dire que l'on ne suppose plus $\sum a_i^2 = 1$. Montrer que $\|Z\|_2 \leq \sqrt{e}\|Z\|_1$.
13. On considère la fonction $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$. Montrer que
$$|f(\frac{1}{2}) - B_{n,f}(\frac{1}{2})| = \mathbb{E}|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2n}\|R_1 + \ldots + R_n\|_1$$
14. Montrer qu'il existe C tel que
$$\|f - B_{n,f}\|_\infty \geq Cw(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

# 11 Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n$ réels $p_1, \ldots, p_n$ avec $p_i \in ]0,1[$. On considère $n$ variables aléatoires indépendantes $X_i, i = 1\ldots, n$ où $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$. On pose $\tilde{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et on considère $Y_n$ une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$. On considère l'endomorphisme $J$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ définit par $J(e_i) = e_{i-1}, i \geq 1$ et $J(e_0) = 0$. On pose $L_i = p_i(I - J)$ et $M_i = (1-p_i)I + p_i J$ et on définit $N_i = \exp(L_i)$. On note
$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|$$
On rappelle que $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n+1} |a_{ij}|$.

1. Montrer que
$$M = M_1 M_2 \ldots M_n = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(\tilde{X}_n = i) J^i$$
$$N = N_1 N_2 \ldots N_n = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(\tilde{Y}_n = i) J^i$$
2. Montrer que
$$\|M - N\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \|M_i - N_i\|_\infty$$
3. Montrer que
$$\|M - N\|_\infty = \sum_{k=1}^n |P(\tilde{X}_n = k) - \mathbb{P}(Y_n = k)|$$
4. Montrer que
$$\|M_i - N_i\|_\infty = \frac{1}{2}\|L_i^2\|_\infty$$
5. En déduire
$$\max_{A \subset \{1,\ldots,n\}} |P(\tilde{X}_n \in A) - P(Y_n \in A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$$
6. Discuter du cas $p_i = \frac{\lambda}{n}$ pour tout $i$ et regarder en particulier l'asymptotique $n$ tend vers l'infini.

## 12 Exercice

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées: Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On pose $Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} X_k$

1. Justifier que $Z$ est bien définie
2. Déterminer la loi de $Z$.

## 13 Exercice

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires $\mathcal{N}(0,1)$

1. Calculer la fonction caractéristique de $U = X + Y$ et celle de $V = X - Y$
2. Identifier les lois de $U$ et de $V$
3. Calculer la fonction caractéristique du couple $(U, V)$. Qu'en déduisez vous pour le couple $(U, V)$?
4. Retrouver les résultats précédents à l'aide du théorème de transfert.

## 14 Exercice

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne nulle et de variance 1. On suppose aussi que $X + Y$ est indépendante de $X - Y$. On note $\phi$ la fonction caractéristique de $X$ et $Y$

1. Montrer que $\phi(2t) = \phi(t)^3\phi(-t)$.
2. On suppose qu'il existe $t_0$ tel que $\phi(t_0) = 0$. Construire une suite $t_n$ convergeant vers 0 telle que $\phi(t_n) = 0$. Conclure qu'un tel $t_0$ n'existe pas.
3. On pose $\psi(t) = \phi(t)/\phi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$ et que $\psi(t) = 1 + o(t^2)$.
4. Montrer que $\psi(t) = 1$
5. Montrer que $\phi(t) = \phi(\frac{t}{2^n})^{4^n}$
6. Montrer que $X$ suite une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$
7. Comparer à l'exercice précédent.

## 15 Exercice

Soit $(U_n)$ une suite de variable aléatoire uniforme sur $[0, \theta]$. On pose

$$X_n = \max_{i=1\ldots,n} U_i$$

1. Calculer la fonction caractéristique de $X_n$
2. Montrer que $(X_n)$ converge presque sûrement vers $\theta$. On pourra regarder $P[|X_n - \theta| > \epsilon]$
3. Etudier la convergence en loi de $(n(X_n - \theta))$
4. On considère maintenant que les $U_i$ sont des lois exponentielles de paramètre 1. Etudier la convergence en loi de $X_n - \ln(n)$.

# 16 Exercice

Soit $(X_n)$ une suite de v.a.i.i.d de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$.

1. Montrer $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tend vers $m$ dans $L^2$
2. En déduire que $Z_n$ converge vers $m$ en probabilité

# 17 Exercice

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

# 18 Exercice

Soient $(X_n)$ une suite de v.a.i.i.d centrée et admettant un moment d'ordre 4. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n/n > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{\epsilon^4 n^4}$$

2. En déduire la loi forte des grands nombres

# 19 Exercice

On dit qu'une suite de v.a est uniformément intégrable si

$$\lim_{a\to\infty}\sup_n \mathbb{E}|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|>a} = 0$$

1. Montrer que si $p > 1$ et si $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ alors $X_n$ est u.i
2. Donner un exemple de $(X_n)$ tel $\sup_n \mathbb{E}(|X_n)| < \infty$ mais tel que $X_n$ n'est pas u.i
3. Montrer que $(X_n)$ est u.i si et seulement si $(\mathbb{E}(|X_n|))$ est bornée et si $\forall\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall A$ tel que $P(A) < \delta$ alors $\sup_n \mathbb{E}|X_n|\mathbf{1}_A \leq \epsilon$

# 20 Exercice

Soit $(X_p)$ une suite de v.a.i où $X_p$ suit la loi $\Gamma(p+1,1)$. On rappelle que la densité de $X_p$ est

$$f_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p+1)}x^p e^{-x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$$

**1)** Calculer $\mathbb{E}[X_p]$ et $Var(X_p)$

On pose $Z_p = \frac{X_p - p}{\sqrt{p}}$

**2)** Détrminer la densité de $Z_p$ en fonction de celle de $X_p$
**3)** Soit $x > 0$, montrer que pour $p$ suffisamment grand

$$P(Z_p \leq x) = \frac{p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}}{\Gamma(p+1)}\int_{-\sqrt{p}}^{x} e^{-u\sqrt{p}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{p}}\right)^p du$$

**4)** Déterminer

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\sqrt{p}}^{x} e^{-u\sqrt{p}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{p}}\right)^{p} du$$

**5)** En déduire que la formule de Stirling peut être déduite de la convergence en loi de $(Z_p)$ vers une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et vice versa.
**6)** Appliquer le TCL à $(Z_p)$, nous obtenons donc une preuve probabiliste de l'équivalent de Stirling!

# 21 Exercice

Soit $(X_n)$ une suite de v.a Binomiale indépendantes de paramètre $n$ et $p_n$. On suppose que $\lim np_n = \lambda$. Montrer que $(X_n)$ converge en loi vers une v.a $X$ dont on déterminera la loi.

# 22 Exercice

Soit $X$ un variable $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que

$$P(X>a)\sim_{+\infty}\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}a}$$

2. On considère une suite $X_n$ de v.a.i.i.d $N(0,1)$. On considère

$$U_{a,n}=\{X_n\geq a\sqrt{\ln(n)}\}$$

A l'aide de Borel Cantelli, étudier $P(\limsup U_{a,n})$ suivant les valeurs de $a$

3. Montrer que $\lim_n \frac{X_n}{\sqrt{\ln(n)}}=\sqrt{2}$ presque sûrement.

# 23 Exercice

Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On note $P_X$ sa loi, $\Phi_X$ sa fonction caractéristique et $F_X$ sa fonction de répartition.

1. Montrer que pour tous $a\neq b\in\mathbb{R}$ et $T>0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\Phi_X(t)\,dt$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin\big(t(x-a)\big)}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin\big(t(x-b)\big)}{t}dt\right)P_X(dx).$$

2. Montrer que $\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt\in]0,+\infty[$. On admettra pour la suite que cette limite vaut $\frac{\pi}{2}$. En déduire que pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{\sin(tx)}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\text{signe}(x),$$

où $\text{signe}(x)=1$ si $x>0$, $\text{signe}(x)=-1$ si $x<0$ et $\text{signe}(0)=0$.

3. Montrer que si $a < b$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \Phi_X(t)\, dt = P_X\big(]a,b[\big) + \frac{P_X(\{a\}) + P_X(\{b\})}{2}.$$

4. Vérifier que si $F_X$ est continue en $a$ et $b$, on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \Phi_X(t)\, dt.$$

   Utiliser ce résultat pour donner une démonstration différente de celle du cours du fait que la donnée de $\Phi_X$ caractérise la loi de $X$.

# 24 Exercice

Soit $(X_n)$ une suite de v.a.i.i.d de f.d.r $F$. On pose

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \leq t}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n > 0$.

Le but est de montrer que:

[Glivenko Cantelli] Soit $(X_n)$ une suite de v.a.i.i.d de f.d.r $F$ alors

$$\|Fn - F\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s}} 0$$

[Kolmogorov] Soit $(X_n)$ une suite de v.a.i.i.d de f.d.r $F$ <u>CONTINUE</u> alors la loi de la v.a

$$D_n = \|F_n - F\|_\infty$$

ne dépend pas de $F$

- On rappelle que si $U_1, \ldots, U_n$ n v.a.i.i.d $\mathcal{U}([0,1)$ alors

  $$X_1, \ldots, X_n = F^{(-1)}(U_1), \ldots, F^{(-1)}(U_n)$$

  sont n v.a.i.i.d de f.d.r la fonction $F$ où $F^{(-1)}$ désigne l'inverse généralisée de $F$. Montrer que

  $$\|F_n - F\|_\infty \quad \sim \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{F^{(-1)}(U_i) \leq t} - F(t) \right| \tag{1}$$

  où $\sim$ signifie qu'ils ont même distribution.

- En déduire que

  $$\|F_n - F\|_\infty \quad \sim \quad \sup_{s\in\mathbb{F}(R)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{U_i \leq s} - s \right| \tag{2}$$

- Montrer en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

  $$\exists A,\ t.q\ \forall s \in [0,1], \forall \omega \in A, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{U_i(\omega) \leq s} \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$$

- En utilisant le théorème de Dini déduire que la suite de fonction $(G_n)$ définie par

$$G_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{U_i(\omega)\leq t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

converge uniformmńent vers $t \to t$.

- Conclure pour Glivenko-Cantelli. Attention il y a une égalité en loi (on pourra admettre que la converge p.s dans ce cas là se comporte bien avec la convergence en loi)!

- Pour Kolmogorov montrer que

$$\|F_n - F\| \sim \|G_n - G\|$$

où $G(u) = u$ et conclure. A quoi cela peut-il servir?