



# THÈSE

présentée pour l'obtention de

## L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *Date de soutenance* par :

**DAVID SANCHEZ**

Modélisation et analyse de problèmes de ferromagnétisme,  
d'écoulement de fluide et de déplacements collectifs

---

---

### JURY

NOM	Professeur	Président
NOM	Directeur de recherche	Membre
NOM	Directeur de recherche	Membre
NOM	Directeur de recherche	Membre

...(*Préciser la qualité de chacun des membres*)

---

École doctorale et spécialité :

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées*

Unité de Recherche :

*Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation en ferromagnétisme</b>	<b>5</b>
2.1	Modélisation et état de l'art . . . . .	5
2.2	Introduction . . . . .	7
2.3	Renversement d'aimantation à l'aide d'un courant polarisé en spin . . . . .	8
2.3.1	Le modèle de transfert de spin . . . . .	9
2.3.2	Le modèle adimensionné . . . . .	11
2.3.3	Simulations numériques du renversement d'aimantation . . . . .	13
2.3.4	Étude asymptotique . . . . .	14
2.4	Étude de nanofils présentant un pincement . . . . .	19
2.4.1	Cas d'un nanofil infini avec un pincement (théorème 2.4.1) . . . . .	23
2.4.2	Existence et stabilité d'un profil stationnaire sous un champ magnétique appliqué (Théorème 2.4.2) . . . . .	25
2.4.3	Non-existence de profils stationnaires sous l'effet d'un "grand" champ magnétique (Théorème 2.4.3) . . . . .	26
2.4.4	Cas d'un fil avec plusieurs pincements (Théorème 2.4.4) . . . . .	26
2.5	Perspectives . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Fluides biologiques</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Modélisation . . . . .	33
3.3	Considérations géométriques . . . . .	37
3.4	Résultats principaux . . . . .	39
3.5	Schéma de la preuve du théorème 3.4.1 . . . . .	43
3.6	Schéma de la preuve du théorème 3.4.2 . . . . .	47
3.7	Perspectives . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Schémas numériques pour des équations dispersives</b>	<b>51</b>
4.1	Introduction . . . . .	51
4.2	Conditions de bord transparentes pour l'équation Kdv-BBM linéarisée . . . . .	53
4.2.1	Conditions de bord exactes . . . . .	54
4.3	Conditions de bord transparentes discrètes . . . . .	56

4.3.1	Construction et calcul des conditions de bord transparentes discrètes	56
4.3.2	Consistance et stabilité des conditions de bord transparentes discrètes . . . . .	60
4.4	Résultats numériques . . . . .	62
4.4.1	Cas 1 : conditions de bord transparentes exactes . . . . .	63
4.4.2	Cas 2 : conditions de bord transparentes discrètes approchées . . . . .	65
4.5	Conclusion et perspectives . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Du particulaire au fluide</b>	<b>71</b>
5.1	Comportements collectifs de moutons . . . . .	71
5.1.1	Modèle . . . . .	72
5.1.2	Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ : transition entre un modèle compressible et incompressible . . . . .	74
5.1.3	Étude du domaine congestionné . . . . .	74
5.2	Modélisation de réseau informatique . . . . .	76
5.2.1	Description d'un réseau de clusters . . . . .	77
5.2.2	Vers un modèle fluide . . . . .	79
5.2.3	Etude du modèle (5.32)-(5.33)-(5.34) . . . . .	81
5.3	Conclusion et perspectives . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Annexe : Espaces de Lebesgue d'exposant variable</b>	<b>83</b>
	<b>Publications</b>	<b>85</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Mes travaux sont essentiellement tournés vers la modélisation de problèmes qu'ils soient issus de la physique (ferromagnétisme, spintronique, vagues), de la médecine (écoulement de mucus dans les poumons) ou de la biologie et l'informatique (comportement collectif).

Une première partie de ce manuscrit (chapitre 2) est consacrée à l'étude du ferromagnétisme. Dans le cadre de ma thèse, je m'étais intéressé au développement et à la justification de modèles asymptotiques dans les cas de couches minces [A3, RT1, T1], de nanofils [A6] ou encore dans le cadre de petites perturbations d'états ferromagnétiques stables [A4, A5]. A mon arrivée à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), une collaboration avec Élise Fouassier, Clément Jourdana et Naoufel Ben Abdallah a rapidement débuté sur l'étude du dispositif de Slonczewski [86] mettant en œuvre des couches minces de matériau ferromagnétique traversées par des courants de spin. A partir du modèle physique, nous avons mis en évidence un modèle réduit adimensionné sur lequel nous avons développé des modèles asymptotiques mettant en évidence le phénomène de renversement d'aimantation par injection d'un courant de spins. Ces travaux sont décrits dans la section 2.3. Une autre partie de mes travaux sur le ferromagnétisme se fait en collaboration avec Gilles Carbou et porte sur une étude plus poussée des nanofils ferromagnétiques et sur la façon d'y stocker de l'information (section 2.4). Suite aux travaux de Gilles Carbou en collaboration avec Stéphane Labbé [33] ainsi qu'avec Stéphane Labbé et Emmanuel Trélat [36], on sait qu'une configuration magnétique présentant un renversement d'aimantation n'est pas stable dans un nanofil rectiligne. Nous avons montré qu'il était possible de stocker et conserver n'importe quelle donnée dans un fil ferromagnétique présentant des pincements et où les renversements d'aimantation sont localisés dans les pincements.

Dans le cadre du projet ANR BioFiReady regroupant mathématiciens, médecins et physiciens, Robin Chatelin et Philippe Poncet ont développé des modèles et méthodes numériques pour décrire l'écoulement de mucus dans les poumons et étudié l'effet du battement des cils qui tapissent la paroi bronchiale. Se retrouvant dans le cadre d'un domaine qui se déforme au cours du temps, ils ont décidé d'utiliser une méthode de

pénalisation [6, 28] afin de ne pas travailler numériquement dans une géométrie variable. Une collaboration fructueuse a alors débuté sur la justification théorique des modèles pénalisés qu'ils mettent en oeuvre [A9, C1, S3]. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 3.

En collaboration avec Pascal Noble et Christophe Besse, je me suis intéressé aux équations des vagues. Dans un premier travail, nous avons développé des conditions de bord transparentes pour l'équation (KdV-BBM) linéarisée. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 4.

Dans un dernier chapitre (chapitre 5), je présente des travaux de modélisation dans lesquels on passe d'une description particulière à un modèle fluide. Dans la section 5.1, je me suis intéressé en collaboration avec Pierre Degond et notre doctorant Laurent Navoret à la modélisation de mouvement collectif d'animaux (troupeau de moutons). Une autre collaboration avec Georges Da Costa (IRIT) et Guillaume Dufour (ONERA) m'a mené à appliquer ces outils de modélisation à un réseau informatique de clusters afin d'optimiser les coûts de calculs informatiques (section 5.2).

## Chapitre 2

# Modélisation en ferromagnétisme

### 2.1 Modélisation et état de l'art

Les matériaux ferromagnétiques sont décrits par leur aimantation spontanée modélisée par le moment magnétique noté  $M$ . Ce moment est un champ de vecteurs  $M$  défini sur le domaine  $\Omega$  où est confiné le matériau ferromagnétique, à valeur dans  $\mathbb{R}^3$  et de norme constante. Il s'écrit  $M = M_s m$  où  $m : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$  et  $M_s$  est l'aimantation de saturation du matériau. A une renormalisation près, nous supposons que  $M_s = 1$ . L'aimantation relie l'induction magnétique  $B$  et le champ magnétique  $H$  par la relation

$$B = \mu_0 (H + \bar{M}),$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $\bar{M}$  est l'extension de l'aimantation par 0 en dehors du domaine  $\Omega$ .

Dans le modèle statique, l'aimantation minimise l'énergie micromagnétique  $\mathcal{E}(M)$  définie par

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_z + \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_d + \mathcal{E}_e$$

où

- $\mathcal{E}_z = -\mu_0 \int_{\Omega} H_a \cdot M dx$  est l'énergie de Zeeman ou énergie extérieure. Elle provient de l'interaction entre l'aimantation et le champ magnétique appliqué  $H_a$  et favorise l'alignement de l'aimantation avec le champ magnétique  $H_a$ .
- $\mathcal{E}_d = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega} H_d \cdot M dx$  est l'énergie démagnétisante. Elle provient du champ démagnétisant  $H_d$  engendré par l'aimantation et dépend de la configuration magnétique. Ce champ vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div}(H_d + \bar{M}) = 0, \\ \operatorname{curl} H_d = 0. \end{cases}$$

- $\mathcal{E}_a = \int_{\Omega} \Phi(M) dx$  est l'énergie d'anisotropie. Elle est due à la structure cristalline du matériau ferromagnétique et aux interactions spin-orbites et favorise

l'alignement de l'aimantation dans les directions privilégiées par le matériau. La fonction  $\Phi$  est la densité d'énergie anisotrope et dépend de l'orientation de l'aimantation. La forme la plus simple rencontrée est  $\Phi(M) = -\frac{\mu_0}{2}C(M \cdot u)^2$  où  $C$  est la constante d'anisotropie et  $u$  la direction privilégiée pour l'aimantation.

- $\mathcal{E}_e = \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{2}A|\nabla M|^2 dx$  est l'énergie d'échange,  $A$  la constante d'échange. Elle modélise l'interaction entre deux spins d'Heisenberg et minimise les variations de l'aimantation.

Dans le modèle dynamique, l'aimantation vérifie l'équation de Landau-Lifshitz

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma(-M \wedge H_{eff} + \alpha M \wedge (M \wedge H_{eff})),$$

où  $\gamma$  est un facteur de précession,  $\alpha$  un facteur d'amortissement introduit par Landau et Lifshitz [73] et  $H_{eff}$  est le champ magnétique effectif vu par l'aimantation

$$\begin{aligned} H_{eff} &= -\frac{1}{\mu_0}\nabla_M \mathcal{E}(M) \\ &= H_a + H_d + \nabla_M \Phi(M) + A\Delta M \end{aligned}$$

auquel on associe en général des conditions de Neumann homogènes au bord du domaine. Pour des solutions suffisamment régulières, l'équation de Landau-Lifshitz est équivalente à l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \alpha M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} + \gamma(1 + \alpha^2)M \wedge H_{eff} = 0.$$

Ces équations ont fait l'objet de nombreuses études théoriques (et numériques) prenant en compte tout ou partie du champ magnétique effectif :

Auteur(s)	Référence(s)	Solutions	$\mathcal{E}_e$	$\mathcal{E}_d$	$\mathcal{E}_a$	$\mathcal{E}_z$	Domaine
Visintin	[91]	E,R	X		X	X	borné
Carbou et Fabrie	[25]	E,W	X		X	X	borné
Joly et Vacus	[68, 69]	E,U,S			X	X	$\mathbb{R}$
Joly, Métivier et Rauch	[67]	E,U,S		X	X	X	$\mathbb{R}^3$
Alouges et Soyeur	[4]	E,NU,W	X				$\mathbb{R}^3$
Carbou et Fabrie	[26]	E,U,S	X				$\mathbb{R}^3$
Carbou et Fabrie	[27]	E,U,S	X	X	X	X	borné
Labbé	[72]	E,NU,W	X	X	X	X	borné

Légende : E (Existence), U (Unicité), NU (Non unicité), S (Forte), W (faible), R (Régulières)

De nombreuses études portent également sur l'asymptotique de ces équations et sur les solutions stationnaires, que ce soit en temps long (T), pour des perturbations d'états stationnaires (P), quand le coefficient d'échange tend vers zéro (E) ou quand la géométrie devient singulière (couche mince (CM), nanofils (NF)) :

Auteur(s)	Référence(s)	T	P	E	CM	NF
Labbé	[72]		X			
Carbou, Fabrie et Jochmann	[31]	X				
Carbou, Fabrie et Guès	[30, 29]			X		
Sanchez	[A2]			X		
Haddar	[60, 62, 61]				X	
Tilioua	[63]				X	
Carbou	[21]				X	
Alouges, Rivière et Serfaty	[3, 84]				X	
Desimone, Kohn, Muller et Otto	[48]			X	X	
Alouges et Labbé	[2]				X	
Sanchez	[A3, RT1]			X	X	
Sanchez	[A6]			X		X
Jizzini	[66]					X
Colin, Galusinski et Kaper	[39]		1D			
Sanchez	[A4, A5]		2D			

Un des principaux intérêts des matériaux ferromagnétiques réside dans la possibilité d’y stocker de l’information : beaucoup d’études portent sur les configurations magnétiques adoptées par l’aimantation, c’est-à-dire les solutions stationnaires du problème, et leur stabilité. Les nanofils ferromagnétiques sont d’une importance capitale dans l’industrie. Nous renvoyons en particulier à [23] qui présente une revue de nombreux résultats d’existence de murs dans les nanofils, de stabilité et de contrôle à l’aide d’un champ magnétique ou électrique :

Auteur(s)	Référence(s)	Exist.	Stab.	Contrôle	Num.
Labbé	[72]				3D
Carbou	[33, 22, 24]	X	X		
Carbou, Labbé et Trélat	[35, 36, 34]	X	X	Magnétique	
Carbou et Jizzini	[32]	X	X	Electrique	

## 2.2 Introduction

De récents travaux ont mis en évidence [94, 85, 59] de nouvelles interactions dans le cadre des matériaux ferromagnétiques, liés à la circulation d’un courant électrique dans le matériau ferromagnétique. L’utilisation de ce courant électrique peut servir à renverser l’orientation de l’aimantation d’un matériau ou à créer des oscillateurs magnétiques haute fréquence [58]. Une partie des travaux sur le ferromagnétisme réalisés depuis ma thèse s’intéressent à la compréhension des différents phénomènes à l’œuvre dans ces modèles. À mon arrivée à Toulouse, une collaboration a débuté avec Naoufel Ben Abdallah et Élise Fouassier (ICJ), puis avec Clément Jourdana (LJK), alors en stage de Master 2 puis en thèse à Toulouse. Nous nous sommes intéressés à la modélisation du phénomène, à son analyse asymptotique et aux simulations numériques afin d’expliquer les résultats

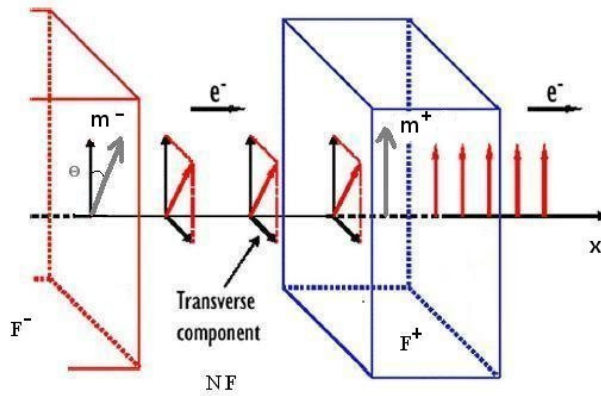


FIGURE 2.1 – Dispositif ferromagnétique multi-couches proposé par Slonczewski

des physiciens. Ces travaux font l'objet de [A8] et sont présentés dans la section 2.3.

Dans [80], de nouvelles applications des nanofils ferromagnétiques sont mises en évidence en particulier dans le domaine du stockage de l'information. A la suite des travaux de Gilles Carbou, Stéphane Labbé et Emmanuel Trélat [35, 24], je me suis intéressé, en collaboration avec Gilles Carbou, à ce problème. Nous montrons dans [S1] que l'introduction de pincements le long des fils permet de fixer les zones de renversement possibles de l'aimantation dans ces derniers et donc de stocker durablement de l'information (voir section 2.4).

## 2.3 Renversement d'aimantation à l'aide d'un courant polarisé en spin

Nous nous intéressons au renversement d'aimantation dans une couche mince ferromagnétique. Les méthodes usuelles consistent à appliquer un champ magnétique à la couche mince afin que l'aimantation s'aligne sur ce dernier. Nous étudions ici le cas d'un courant électrique polarisé en spin traversant le domaine. Ce dernier engendre un moment de transfert de spin supplémentaire que l'on doit prendre en compte dans les équations. Ce concept a été découvert par Slonczewski [86] et Berger [13] en 1996. Cette notion de transfert de spin constitue un tournant dans la spintronique et fait l'objet de recherches intensives en physique. Le phénomène que nous étudions est particulièrement intéressant dans le cadre de la construction de mémoires magnétiques.

Le dispositif proposé par Slonczewski et Berger consiste en un matériau ferromagnétique multicouches constitué principalement de deux couches magnétiques séparées par une couche non magnétique NF (voir figure 2.1). Il fonctionne de la façon suivante : la première couche  $F^-$ , "épaisse" (env. 100nm), agit comme un polariseur pour le spin des électrons qui la traversent, ceux-ci s'alignent sur l'aimantation de  $F^-$  sans réussir à influencer sur son aimantation, la seconde couche  $F^+$ , "mince" (de 1 à 5nm), subit le passage des électrons dont tous les spins sont alignés. Si le courant injecté est suffisamment fort,

le transfert de spin permet de forcer l'aimantation à s'aligner sur la densité de spin des électrons, renversant éventuellement l'aimantation du matériau.

Les deux aimantations  $\vec{m}^-(t=0)$  et  $\vec{m}^+(t=0)$ , respectivement de  $F^-$  et  $F^+$  sont supposées initialement polarisées dans deux directions différentes (on note  $\theta$  l'angle entre ces deux vecteurs, voir figure 2.1). La direction privilégiée pour l'aimantation étant la direction de l'anisotropie en l'absence de champ magnétique extérieur, cela est facilement réalisé en considérant deux matériaux dont les directions d'anisotropie, respectivement notées  $\vec{u}^-$  et  $\vec{u}^+$ , forment un angle  $\theta$ .

Afin de provoquer un renversement de l'aimantation dans la couche mince, un courant électrique est injecté dans le dispositif à l'extrémité gauche de la couche épaisse  $F^-$ , perpendiculairement à la couche mince dans la direction de l'axe  $x$  (voir [78] pour les détails expérimentaux par exemple). Cela n'a pu être produit expérimentalement qu'avec un très fort courant électrique. Le dispositif est finalisé par une dernière couche de matériau non magnétique à l'extrémité droite du dispositif. Cette couche absorbe la densité de spins ("sandbox").

Le modèle mathématique que nous étudions est une version légèrement simplifiée de celui introduit par Zhang, Levy et Fert [94] (voir aussi Shpiro, Levy et Zhang [85]). Dans chaque couche, nous écrivons un système couplé d'équations aux dérivées partielles portant sur la densité de spin et l'aimantation locale. Cette dernière vérifie l'équation de Landau-Lifshitz avec un terme supplémentaire dans le champ magnétique effectif dû au courant de spin. En ce qui concerne la densité de spin, nous décrivons le transport de spin en utilisant une diffusion macroscopique de spin dans tout le domaine, la diffusion aux interfaces étant gérée par des conditions aux limites. La densité de spin satisfait donc une équation de diffusion avec un terme de couple additionnel faisant apparaître l'aimantation.

Dans [94, 85], les auteurs se placent dans un cadre présentant de nombreuses échelles liées aux différents phénomènes impliqués dans l'équation de diffusion sur le spin. Afin d'éviter les approximations *a priori* effectuées dans [94] pour étudier les différentes échelles, nous introduisons un petit paramètre  $\varepsilon$  à l'aide duquel nous adimensionnons nos équations. Cet unique paramètre  $\varepsilon$  apparaît aussi bien dans les échelles temporelles que spatiales dans le cas des équations de transport de spin comme nous l'avons mis en évidence lors du stage de Master 2 Recherche de Clément Jourdana (encadré par N. Ben Abdallah et E. Fouassier) et de sa thèse [A8, 70]. Ce paramètre sert aussi d'ordre de grandeur (en  $\frac{1}{\varepsilon}$ ) pour le courant électrique injecté dans le dispositif. Cette simplification des équations nous permet toutefois d'obtenir des modèles approchés se comportant correctement dans l'asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 2.3.1 Le modèle de transfert de spin

La principale nouveauté introduite par le modèle de Zhang, Levy and Fert [94, 85] tient dans la prise en compte des effets de la diffusion de spin. Dans ce modèle, la densité de spin satisfait une équation de diffusion avec un terme correspondant à un moment de précession autour de l'aimantation. Après différentes hypothèses de modélisation dé-

taillées dans [A8], nous obtenons pour le vecteur densité de spin l'équation :

$$\partial_t \vec{s} - D_0 \partial_x^2 \vec{s} + \frac{J}{\hbar} (\vec{s} \times \vec{m}) = -\frac{\vec{s}}{\tau_{sf}}, \quad (2.1)$$

où

- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  avec  $h$  la constante de Plank :  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} J.s$ ,
- $J$  quantifie l'interaction entre  $\vec{s}$  et  $\vec{m}$  :  $J = 0.1 - 0.4 eV = 1.6 - 6.4 \cdot 10^{-20}$  Joules,
- $\tau_{sf}$  est le temps de relaxation du renversement de spin. Il est évalué d'ordre  $10^{-12} s$ ,
- $D_0$  est la constante de diffusion du métal, elle d'ordre  $10^{-3} m^2.s^{-1}$ .

D'autre part, l'aimantation est solution de l'équation de Landau-Lifshitz à laquelle on a ajouté un terme de couple de transfert de spin

$$\partial_t \vec{m} = -\gamma \vec{m} \times (\vec{H}_e + J\vec{s}) + \alpha \vec{m} \times \partial_t \vec{m} \quad (2.2)$$

où les paramètres  $\gamma > 0$  et  $\alpha > 0$  sont respectivement le coefficient gyromagnétique et le paramètre d'amortissement de Gilbert.

Le couplage avec le courant de spin apparaît via le terme supplémentaire  $J\vec{s}$  côtoyant le champ effectif.

Le champ effectif usuel apparaissant dans l'équation de Landau-Lifshitz est  $\vec{H}_e$ . Il comprend les contributions des champs externes, d'anisotropie et démagnétisant ainsi qu'un terme d'échange :

$$\vec{H}_e = \vec{H}_{ext} + \nabla_{\vec{m}} \psi(\vec{m}) + \vec{H}_{demagn} + \nu \partial_x^2 \vec{m}. \quad (2.3)$$

Dans notre étude, nous faisons les hypothèses suivantes :

- Nous supposons qu'il n'y a pas de champ magnétique appliqué :  $\vec{H}_{ext} = 0$ .
- Nous choisissons une énergie d'anisotropie de  $\psi(\vec{m})$  de la forme :  $\psi(\vec{m}) = \frac{c}{2} (\vec{m} \cdot \vec{u})^2$ , où  $c$  est une constante positive et  $\vec{u}$  est la direction d'anisotropie, donnée sous la forme d'un vecteur unitaire orthogonal à la direction  $x$ , c'est-à-dire dans le plan de la couche de matériau ferromagnétique.
- Le champ démagnétisant vérifie

$$\begin{aligned} \text{div} (\vec{H}_{demagn} + \vec{m}) &= 0, \\ \text{curl} \vec{H}_{demagn} &= 0, \end{aligned}$$

où  $\vec{m}$  est le prolongement de  $\vec{m}$  par 0 hors du domaine ferromagnétique. Comme nous étudions un modèle mono-dimensionnel, le champ démagnétisant s'écrit sous une forme locale plus simple :

$$\vec{H}_{demagn} = -(\vec{m} \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x.$$

Ce champ démagnétisant correspond à celui obtenu dans le cas de couches minces ferromagnétiques (voir [21, A3]).

Nous travaillons donc dans la suite avec le champ magnétique effectif (2.4) :

$$\vec{H}_e = c(\vec{m} \cdot \vec{u})\vec{u} - (\vec{m} \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + \nu\partial_x^2\vec{m}. \quad (2.4)$$

Pour compléter la description de ce modèle, nous devons préciser les conditions aux bords et aux interfaces (en  $x = -L$ ,  $x = 0$  et  $x = l$ ), à la fois pour la densité de spin et l'aimantation.

Pour l'équation de Landau-Lifshitz, nous prenons classiquement des conditions de bord de Neumann homogènes aux bord de chaque couche (à la fois pour  $F^-$  et  $F^+$ ). Nous avons donc :

$$\begin{cases} \partial_x\vec{m}(t, -L) = 0, & \partial_x\vec{m}(t, 0^-) = 0, \\ \partial_x\vec{m}(t, 0^+) = 0, & \partial_x\vec{m}(t, l) = 0, \end{cases} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Pour la densité de spin, les conditions que nous imposons sont les suivantes :

- en  $x = -L$ , nous mettons une condition de Neumann non homogène modélisant le courant injecté dans le dispositif :

$$\partial_x\vec{s}(t, -L) = \vec{j}_L(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.6)$$

où  $\vec{j}_L$  est une fonction donnée.

- à l'interface  $x = 0$ , nous imposons la continuité de la densité de spin  $\vec{s}$  et du courant de spin  $\partial_x\vec{s}$

$$\vec{s}(t, 0^-) = \vec{s}(t, 0^+), \quad \partial_x\vec{s}(t, 0^-) = \partial_x\vec{s}(t, 0^+) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.7)$$

- en  $x = l$ , nous voulons que le système évolue librement (sans matériau ferromagnétique, "sandbox"). Une première possibilité consiste à garder les mêmes équations pour la densité de spin dans une couche d'épaisseur infinie et sans aimantation, ce qui nous donne la condition de Fourier-Robin en  $x = l$  :

$$\partial_x\vec{s}(t, l) = -\vec{s}(t, l).$$

Une fois l'adimensionnement effectué, cette condition deviendra  $\partial_x\vec{s}(t, l) = -\varepsilon\vec{s}(t, l)$ , numériquement très proche de la condition de Neumann homogène que nous utilisons dans la suite par souci de simplification :

$$\partial_x\vec{s}(t, l) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Le modèle adimensionné

Afin d'obtenir un modèle adimensionné, nous redimensionnons les variable d'espace en  $\frac{x}{L}$  dans la couche épaisse  $F^-$  et  $\frac{x}{l}$  dans la couche fine  $F^+$ . En ce qui concerne les échelles temporelles, l'échelle de temps caractéristique pour l'aimantation correspond à  $t_0 = \gamma^{-1}H^{-1}$  (où  $H = |\vec{H}_e + J\vec{s}|$ ). Ce terme est de l'ordre de la nanoseconde. Nous

mettons à l'échelle la variable de temps sous la forme  $\frac{t}{t_0}$ . A l'aide de ces notations, l'équation (2.1) se réécrit dans la couche mince  $F^-$  sous la forme

$$\frac{1}{\lambda_0^2} \partial_t s - \frac{1}{l^2} \partial_x^2 s + \frac{1}{\lambda_J} s \times m + \frac{1}{\lambda_{sf}^2} s = 0,$$

où

$$\lambda_{sf}^2 = D_0 \tau_{sf}, \quad \lambda_J^2 = D_0 \hbar / J, \quad \lambda_0^2 = D_0 t_0,$$

(l'équation dans la couche épaisse  $F^+$  est la même en remplaçant  $l$  par  $L$ ).

Comme il l'est indiqué dans [94] ou [85], nous supposons que nous avons les ordres de grandeur suivants :  $\lambda_{sf}^2 = O(10^{-15})$ ,  $\lambda_J^2 = O(10^{-18})$ , et  $\lambda_0^2 = O(10^{-12})$ . Cet ordre de grandeur pour  $\lambda_{sf}$  est typique d'un métal de transition ferromagnétique comme le Cobalt, voir [85]. Nous définissons alors  $\varepsilon$  comme le rapport

$$\varepsilon = \frac{\lambda_J}{\lambda_{sf}}, \tag{2.9}$$

de telle sorte que  $\varepsilon^2$  soit d'ordre  $10^{-3}$  et que nous ayons également  $\frac{\lambda_{sf}}{\lambda_0}$  d'ordre  $\varepsilon$ .

Nous supposons de plus que l'épaisseur de la couche mince  $F^+$  est d'ordre  $10^{-9}m$  de telle sorte que  $l^2$  soit du même ordre que  $\lambda_J^2$  dans la couche mince alors que dans la couche épaisse  $F^-$ , nous prenons  $L^2 = O(10^{-15})$ , du même ordre que  $\lambda_{sf}^2$ . Nous avons donc également

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Suite à cet adimensionnement, nous notons  $\vec{s}^- : \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\vec{m}^- : \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$  respectivement le vecteur densité de spin et l'aimantation locale dans le ferromagnétique épais  $F^-$ , et  $\vec{s}^+ : \mathbb{R}^+ \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\vec{m}^+ : \mathbb{R}^+ \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  respectivement le vecteur densité de spin et l'aimantation locale dans le ferromagnétique fin  $F^+$ .

Nous notons toujours  $t$  et  $x$  les nouvelles variables de temps et d'espace et obtenons ainsi les équations adimensionnées suivantes pour les densités de spin dans les couches épaisse et mince :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \partial_t \vec{s}^- - \partial_x^2 \vec{s}^- + \frac{\vec{s}^- \times \vec{m}^-}{\varepsilon^2} + \vec{s}^- &= 0, \quad x \in (-1, 0), \\ \varepsilon^2 \partial_t \vec{s}^+ - \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_x^2 \vec{s}^+ + \frac{\vec{s}^+ \times \vec{m}^+}{\varepsilon^2} + \vec{s}^+ &= 0, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Au lieu de préciser que le courant injecté est intense, d'ordre  $1/\varepsilon$ , dans la donnée de Neumann en  $x = -L$ , nous changeons l'échelle de la densité de spin d'un facteur  $J/H$ . Cette forte intensité du courant injecté se traduit alors par le facteur  $\frac{1}{\varepsilon}$  devant le terme  $\vec{s}$  dans l'équation de Landau-Lifshitz.



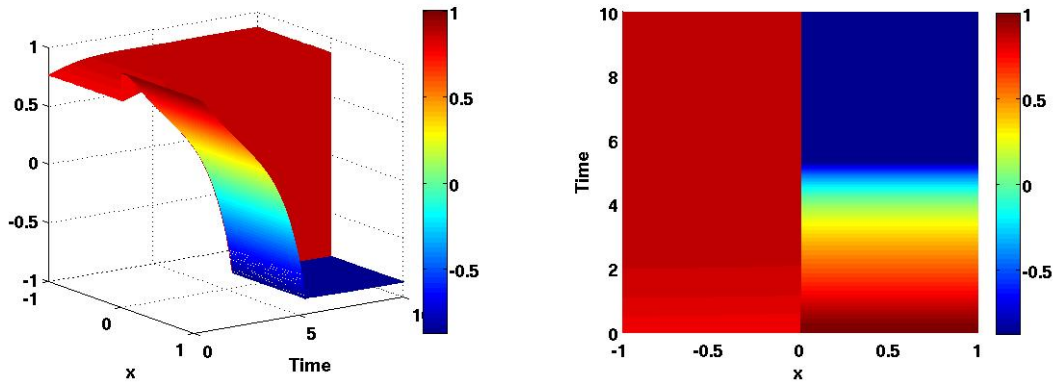


FIGURE 2.2 – Évolution de la composante  $m_z$  au cours du temps (vue 3D et projection).

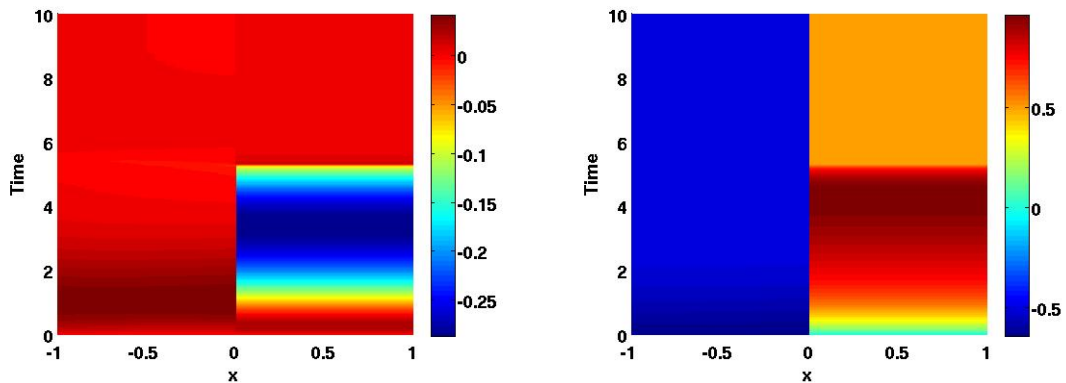


FIGURE 2.3 – Évolution des composantes  $m_x$  et  $m_y$ .

Les expériences physiques ont montré l'existence d'un seuil pour l'intensité du courant injecté au-dessus duquel il était possible d'observer le renversement d'aimantation. Dans la figure 2.4, nous traçons les résultats obtenus avec notre modèle pour différentes valeurs de courant injecté. Nous retrouvons l'existence d'un seuil (ici entre  $|\vec{j}_{-1}| = 0.735$  et  $|\vec{j}_{-1}| = 0.736$ ) et constatons par ailleurs que, en cas de renversement, l'aimantation tend toujours vers le même point  $-u^-$ .

Le phénomène de renversement d'aimantation est de plus réversible, c'est-à-dire qu'un changement de signe du courant entraîne un nouveau renversement de l'aimantation (voir Fig. 2.5)

### 2.3.4 Étude asymptotique

Le système (2.10)-(2.11)-(2.12)-(2.13) met en évidence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Il y a trois échelles de temps caractéristiques dans le cadre de l'évolution de la densité de spin :

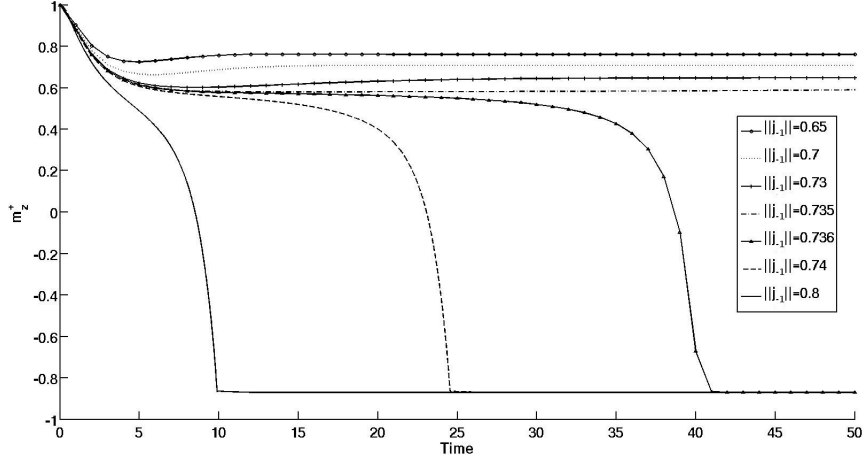


FIGURE 2.4 – Évolution de la composante  $m_z^+$  pour différentes valeurs de l'intensité du courant injecté  $\|\vec{j}_{-1}\|$ .

- Une de l'ordre de  $O(1)$  (quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) pour décrire l'évolution temporelle de la composante de  $\vec{s}$  parallèle à  $\vec{m}$ ,
- Une de l'ordre de  $\varepsilon^4$  pour décrire l'évolution temporelle de la composante de  $\vec{s}$  orthogonale à  $\vec{m}$ ,
- Une de l'ordre de  $\varepsilon^2$  pour décrire la couche limite temporelle associée à la donnée initiale.

Les deux dernières échelles temporelles apparaissent facilement dans le cadre suivant : en supposant  $\vec{s}^-$  homogène en espace et  $\vec{m}^-$  constant, l'équation portant sur la densité de spin devient

$$\varepsilon^2 \partial_t \vec{s}^- + \frac{\vec{s}^- \wedge \vec{m}^-}{\varepsilon^2} + \vec{s}^- = 0.$$

Nous voyons apparaître une couche limite en temps à l'échelle  $\frac{t}{\varepsilon^2}$ , liée à l'équation  $\varepsilon^2 \partial_t \vec{s}^- + \vec{s}^- = 0$  n'affectant que la donnée initiale et des oscillations rapides, à l'échelle  $\frac{t}{\varepsilon^4}$ , liées à l'équation  $\varepsilon^2 \partial_t \vec{s}^- + \frac{\vec{s}^- \wedge \vec{m}^-}{\varepsilon^2} = 0$ , dont la solution est  $\mathcal{L}\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right) v_0$  avec

$$\mathcal{L}(\tau)w = \left(w \cdot \vec{m}^-\right)\vec{m}^- + \sin(\tau)\vec{m}^- \times w + \cos(\tau)\vec{m}^- \times (w \times \vec{m}^-).$$

Ces oscillations portent uniquement sur la composante transverse de  $\vec{s}^-$  et sont tellement rapides qu'à l'échelle temporelle  $O(1)$ , on n'observe que la moyenne en temps de ces oscillations,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\tau)\vec{w} d\tau = (\vec{w} \cdot \vec{m}^-)\vec{m}^-, \quad (2.14)$$

l'aimantation agissant donc comme un polariseur dans la direction  $\vec{m}^-$  pour la densité de spin. Dans la suite de l'étude, nous supposons que la donnée initiale est bien préparée

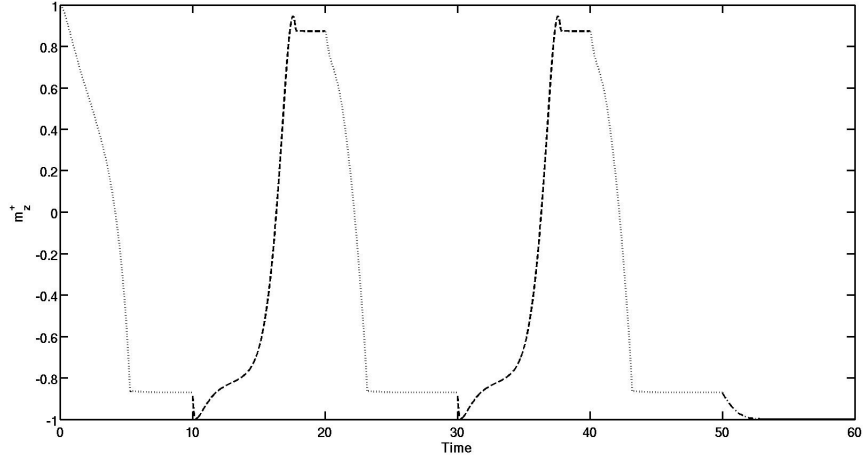


FIGURE 2.5 – Une succession de renversement au cours du temps.

et nous ne nous intéressons qu'à la moyenne en temps, à l'échelle des oscillations rapides, de la densité de spin et de l'aimantation. Il ne nous reste donc que l'échelle temporelle  $O(1)$  seule significative pour le comportement de l'aimantation.

En ce qui concerne les échelles spatiales, il faut distinguer la couche épaisse  $F^-$ , sur les bords de laquelle apparaît une couche limite spatiale d'épaisseur caractéristique  $\varepsilon$ , et la couche mince  $F^+$  dans laquelle l'adimensionnement prends en compte le fait que le domaine est d'épaisseur d'ordre  $\varepsilon$ . Il n'y a donc qu'une seule échelle à prendre en compte.

### Un premier modèle

Pour mettre en évidence le renversement de l'aimantation, nous avons proposé un premier modèle obtenu à l'aide d'un développement asymptotique des solutions à l'échelle  $\varepsilon$  prenant en compte les différents phénomènes précédemment énoncés :

$$\begin{aligned} U^\varepsilon(t, x) &= \sum \varepsilon^k \left( \bar{U}_k(t, x) + \tilde{U}_k\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) && \text{dans la couche épaisse et} \\ U^\varepsilon(t, x) &= \sum \varepsilon^k U_k(t, x) && \text{dans la couche mince.} \end{aligned}$$

Nous obtenons après résolution des différentes échelles

$$\begin{aligned} m^{\varepsilon-} &= \bar{m}_0^- + O(\varepsilon) \\ s^{\varepsilon-} &= a_0 \bar{m}_0^- + O(\varepsilon) \\ m^{\varepsilon+} &= m_0^+ + O(\varepsilon) \\ s^{\varepsilon+} &= 0 + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

où





Le modèle ainsi-obtenu est réversible et décrit correctement le comportement du système tant d'un point de vue théorique que numérique. Par ailleurs, il fait apparaître les problèmes physiquement observés, à savoir la nécessité d'un fort courant électrique pour voir apparaître un renversement d'aimantation. Nous démontrons en particulier qu'il est possible d'écrire de l'information dans une couche mince de matériau ferromagnétique à l'aide de ce dispositif.

**Remarque 2.3.1** *La même modélisation, avec des courants en  $O(1)$  au lieu de  $O(1/\varepsilon)$  montre que le courant injecté n'a aucune influence sur l'aimantation. Au contraire, des courants d'intensité encore plus élevée auraient une influence sur le ferromagnétique épais  $F^-$  qui ne jouerait plus son rôle de polariseur.*

## 2.4 Étude de nanofils présentant un pincement

Dans [80], de nouvelles applications des nanofils ferromagnétiques dans le stockage de données sont mises en évidence. La formation de mur magnétique dans ces dispositifs permet l'encodage des bits informatiques et le déplacement des murs suite à l'injection d'un courant de spin rend la lecture de données plus rapide que dans les dispositifs classiques. Dans de telles applications, la stabilité de la position des murs est primordiale car un déplacement de mur incontrôlé détériorerait l'information encodée. Comme il l'a été prouvé dans [33], les configurations de murs dans les nanofils infinis rectilignes sont stables mais pas asymptotiquement stables : leur orientation et leur position ne sont pas fixées. De plus (voir [34]) dans les nanofils de longueur finie, les configurations de murs sont instables. Un contrôle plus fort de leur position est donc indispensable. Dans les nanofils de mémoires "racetrack", ce contrôle est obtenu à l'aide de pincements régulièrement espacés le long du fil (voir [80]).

Lors d'un article en collaboration avec Gilles Carbou [S1], nous avons montré rigoureusement que la position des murs était stabilisée par ces pincements. Nous nous sommes intéressés à un modèle de nanofil mono-dimensionnel obtenu par l'analyse asymptotique de la même façon que dans [23] et [34].

Dans un premier temps, nous considérons un nanofil infini rectiligne que l'on assimile à l'intervalle  $I = \mathbb{R}$ . La zone pincée est supposée symétrique et centrée en 0. Le rayon de la section du nanofil, noté  $\bar{\rho} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifie

$$\begin{cases} \bar{\rho} \text{ est régulier sur } I, \\ \bar{\rho} = 1 \text{ hors de } [-l_0, l_0], \\ \bar{\rho} \text{ est paire et croissante sur } [0, l_0] \\ 0 < \rho_0 \leq \bar{\rho}(x) \leq 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

c'est-à-dire que le pincement est restreint au domaine  $[-l_0, l_0] \subset \mathbb{R}$ .

L'aimantation, décrite par le moment magnétique  $m : \mathbb{R}^+ \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  vérifie la contrainte de saturation :

$$|m(t, x)| = 1 \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times I. \quad (2.16)$$

Les variations de l'aimantation  $m$  vérifient l'équation de Landau-Lifshitz suivante

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge \mathcal{H}_e(m) - \alpha m \wedge (m \wedge \mathcal{H}_e(m)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

où le champ magnétique effectif  $\mathcal{H}_e(m)$  est donné par

$$\mathcal{H}_e(m) = \partial_x^2 m + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \partial_x m - \frac{1}{2}(m_2 e_2 + m_3 e_3) + h_a e_1, \quad (2.18)$$

où  $(e_1, e_2, e_3)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , les  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont les coordonnées de  $m$ , et  $\bar{\mathbf{a}}(x) = \pi(\bar{\rho}(x))^2$  est l'aire de la section du fil au point  $x$  et  $h_a e_1$  est le champ magnétique appliqué.

**Remarque 2.4.1** *Dans le cadre des modèles mono-dimensionnels de fils orientés selon l'axe  $\mathbb{R}e_1$ , comme il l'a été prouvé dans [A6, 23, 34], le champ démagnétisant, qui est non local en dimension 3, se transforme en le champ d'anisotropie local  $-m_2 e_2 - m_3 e_3$ , dont l'énergie associée est minimisée lorsque l'aimantation est dans l'axe du fil.*

*De plus, l'énergie d'échange se réduit à*

$$\int_I \bar{\mathbf{a}}(x) |\partial_x m|^2 dx,$$

où  $\bar{\mathbf{a}}(x) dx$  est l'élément d'aire découlant du modèle tri-dimensionnel initial. Le champ d'échange dérivé de cette énergie est donné par

$$\partial_x(\bar{\mathbf{a}}(x) \partial_x m) = \bar{\mathbf{a}}(x) \partial_{xx} m + \bar{\mathbf{a}}'(x) \partial_x m.$$

Comme le coefficient  $\bar{\mathbf{a}}(x)$  représentant l'aire de la section du fil apparaît dans tous les termes de la formulation faible, nous divisons l'équation par ce terme pour obtenir le modèle (2.17)-(2.18).

**Remarque 2.4.2** *Le modèle que nous considérons est invariant par rotation autour de l'axe du fil. C'est-à-dire que si  $m$  vérifie (2.17)-(2.18) alors  $(t, x) \mapsto \mathbf{R}_\varphi m(t, x)$  est aussi solution du même système où  $\mathbf{R}_\varphi$  est la rotation d'angle  $\varphi$  autour de l'axe  $\mathbb{R}e_1$  définie par :*

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

L'énergie associée à notre modèle sans champ magnétique appliqué est donné par :

$$\frac{1}{2} \int_I \bar{\mathbf{a}}(x) |\partial_x m|^2 dx + \frac{1}{4} \int_I \bar{\mathbf{a}}(x) \left( (m_2(x))^2 + (m_3(x))^2 \right) dx,$$

les minimiseurs sous la contrainte de saturation  $|m| = 1$  sont donc  $-e_1$  ou  $+e_1$ . Les domaines magnétiques dans les nanofils sont donc les zones où  $m$  est proche de  $\pm e_1$ .

Nous recherchons dans un premier temps une distribution d'aimantation décrivant un mur séparant le domaine  $-e_1$  sur la gauche du domaine  $+e_1$  sur la droite, donc des solutions de (2.17)-(2.18) vérifiant les conditions aux limites :

$$m(x) \rightarrow -e_1 \text{ quand } x \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad m(x) \rightarrow e_1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty. \quad (2.19)$$

Le premier point que nous regardons concerne l'existence d'un tel profil, n'exhibant qu'un seul mur, solution stationnaire de (2.17) sans champ magnétique appliquée ( $h_a = 0$ ).

**Théorème 2.4.1** *Il existe une solution stationnaire  $\mathbf{m}_0$  de (2.16)-(2.17)-(2.18)-(2.19). La solution est stable et asymptotiquement stable modulo les rotations autour de l'axe du fil, i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $m$  de (2.16)-(2.17)-(2.18) vérifiant  $\|m(0, \cdot) - \mathbf{m}_0\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \leq \eta$ , alors*

- $\forall t \geq 0, \|m(t, \cdot) - \mathbf{m}_0\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon,$
- *il existe  $\varphi_\infty$  tel que  $\|m(t, \cdot) - \mathbf{R}_{\varphi_\infty} \mathbf{m}_0\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$  when  $t \rightarrow 0$ .*

Nous étudions ensuite les effets d'un champ magnétique  $\mathbf{h}_a$  appliqué dans la direction du fil :  $\mathbf{h}_a = h e_1$ . Nous traitons donc le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge \mathbf{h}(m) - \alpha m \wedge (m \wedge \mathbf{h}(m)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{h}(m) = \partial_{xx} m + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \partial_x m - \frac{1}{2} (m_2 e_2 + m_3 e_3) + h e_1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Dans un fil non pincé, un champ appliqué de la forme  $\mathbf{h}_a = h_a e_1$  induit un mouvement du mur (voir [23, 34]). Dans le cas d'un fil pincé, nous prouvons que le mur reste bloqué dans le pincement pour de petits champs appliqués :

**Théorème 2.4.2** *Il existe  $h_{max} > 0$  tel que pour tout  $h \in ] - h_{max}, h_{max}[$ , il existe  $\mathbf{m}_h : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  tel que :*

- *pour tout  $h \in ] - h_{max}, h_{max}[$ ,  $\mathbf{m}_h$  est une solution statique de (2.20) muni des conditions aux limites (2.19),*
- *$h \mapsto \mathbf{m}_h$  est  $C^1$  pour la norme  $\mathbf{H}^2$ ,*
- *$\mathbf{m}_0$  est la solution de (2.17)-(2.18) donnée par le théorème 2.4.1,*
- *pour tout  $h \in ] - h_{max}, h_{max}[$ ,  $\mathbf{m}_h$  est stable et asymptotiquement stable modulo les rotations autour de l'axe  $e_1$  pour (2.20)-(2.19).*

Ce résultat confirme que le mur est bloqué par le pincement même en présence d'un faible champ magnétique appliquée. Si ce dernier est suffisamment fort, le mur n'est plus ancré dans le pincement comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 2.4.3** *Il existe  $h_0 \in ]0, 1/2[$  tel que si  $|h| \geq h_0$  il n'existe pas de solution stationnaire pour (2.20) exhibant un renversement d'aimantation, i.e. satisfaisant (2.19).*

Nous considérons maintenant un fil avec plusieurs encoches. Notre but est de montrer que, si la distance entre deux pincements consécutifs est suffisamment grande, n'importe quel donnée peut être stockée dans le dispositif. Soit  $l_1 > 0$  tel que  $\mathbf{m}_0^1$ , la première composante de  $\mathbf{m}_0$  donnée par le théorème 2.4.1, vérifie :

$$\forall x \leq -l_1, \mathbf{m}_0^1(x) \leq -\frac{3}{4} \quad \text{and} \quad \forall x \geq l_1, \mathbf{m}_0^1(x) \geq \frac{3}{4}. \quad (2.21)$$

Nous considérons un fil de longueur finie avec  $N - 1$  encoches et nous notons  $L$  la distance entre deux encoches consécutives. Nous supposons que  $L > 2 \max\{l_0, l_1\}$  et que chaque encoche a le même profil que celle utilisée dans le fil infini de telle sorte que le rayon de la section du fil est donné par  $\rho \in \mathcal{C}^\infty([0, NL])$  :

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0, \frac{L}{2}], \\ \bar{\rho}(x - kL) & \text{if } |x - kL| \leq \frac{L}{2}, k \in \{1, \dots, N - 1\}, \\ 1 & \text{if } x \in [NL - \frac{L}{2}, NL]. \end{cases} \quad (2.22)$$

Nous définissons  $\mathbf{a}$  par :

$$\mathbf{a}(x) = \pi(\rho(x))^2. \quad (2.23)$$

Nous considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge \mathcal{H}_e(m) - \alpha m \wedge (m \wedge \mathcal{H}_e(m)) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times [0, NL], \\ \mathcal{H}_e(m) = \partial_{xx}m + \frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{a}}\partial_x m - \frac{1}{2}(m_2e_2 + m_3e_3) + h_a e_1, \\ \partial_x m(t, 0) = \partial_x m(t, NL) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

**Définition 2.4.1** Soient  $D \in \{0, 1\}^N$  et  $\mathbf{m} : [0, NL] \rightarrow \mathbb{S}^2$  une solution stationnaire de (2.24). Nous notons  $\mathbf{m}^1$  sa première composante. Nous dirons que  $\mathbf{m}$  code  $D$  si pour tout  $k \in \{1, \dots, N\}$ , nous avons :

$$D(k) = 0 \implies \forall x \in [(k-1)L + l_1, kL - l_1], \mathbf{m}^1(x) < -\frac{1}{2},$$

et

$$D(k) = 1 \implies \forall x \in [(k-1)L + l_1, kL - l_1], \mathbf{m}^1(x) > \frac{1}{2}.$$

**Théorème 2.4.4** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $L_{min} > 2 \max\{l_0, l_1\}$  tel que si  $L > L_{min}$ , alors pour toute donnée  $D \in \{0, 1\}^N$ , il existe une solution stationnaire  $\mathbf{m}$  de (2.16)-(2.24) avec  $h_a = 0$  codant la donnée  $D$ . De plus, cette solution est asymptotiquement stable modulo les rotations autour de l'axe du fil  $\mathbb{R}e_1$  pour le système (2.16)-(2.24) avec  $h_a = 0$ .

De même que dans le cas d'un seul mur, nous prouvons qu'un petit champ magnétique appliqué ne détériore pas l'information.

**Théorème 2.4.5** *Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $h_{max}$  tel que pour tous  $L > L_{min}$  et  $D \in \{0, 1\}^N$ , il existe une famille à un paramètre  $h_a \mapsto \mathbf{m}(h_a)$ , définie pour  $|h_a| \leq h_{max}$ , telle que  $\mathbf{m}(h_a)$  est une solution stationnaire de (2.16)-(2.24) codant  $D$ , et asymptotiquement stable modulo les rotations autour de l'axe du fil.*

### 2.4.1 Cas d'un nanofil infini avec un pincement (théorème 2.4.1)

Nous recherchons des solutions stationnaires  $\mathbf{m}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$  pour (2.17) où un renversement d'aimantation se produit. Nous écrivons  $\mathbf{m}_0$  sous la forme

$$\mathbf{m}_0(x) = \begin{pmatrix} \sin \theta_0(x) \\ \cos \theta_0(x) \cos \varphi_0(x) \\ \cos \theta_0(x) \sin \varphi_0(x) \end{pmatrix}.$$

Nous supposons que  $\mathbf{m}_0 \wedge \mathcal{H}_e(\mathbf{m}_0) = 0$ , et  $\mathbf{m}_0 \rightarrow \pm e_1$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .

Les équations correspondantes sur  $\theta_0$  et  $\varphi_0$ , les conditions de bord et l'invariance du système par rotation autour de l'axe du fil de (2.17)-(2.18) nous permettent de supposer que  $\varphi_0 \equiv 0$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\theta_0$  est solution de

$$\partial_x^2 \theta_0 + \frac{\partial_x \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}} \partial_x \theta_0 + \frac{1}{2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \quad (2.25)$$

où  $\theta_0$  tend vers  $\pm\pi/2$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .

**Proposition 2.4.6** *Il existe une fonction impaire  $\theta_0 \in C^2(\mathbb{R})$  tendant vers  $\pi/2$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  telle que  $\theta_0$  est solution de (2.25) sur  $\mathbb{R}$ .*

**Preuve :** Nous définissons tout d'abord l'énergie  $\mathcal{E}(x) = (\theta_0'(x))^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0(x)$ . Elle vérifie l'équation

$$\partial_x(\bar{\mathbf{a}}^2(x)\mathcal{E}(x)) = 2\bar{\mathbf{a}}(x)\bar{\mathbf{a}}'(x)\sin^2 \theta_0(x)$$

Nous utilisons une méthode de tir à partir de la solution de (2.25) avec pour donnée initiale  $(\theta_0(0), \theta_0'(0)) = (0, \gamma)$  afin d'atteindre à la sortie du pincement une solution de l'équation du pendule ( $\bar{\mathbf{a}}' = 0$ ) qui tend vers  $+\pi/2$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , c'est-à-dire dont l'énergie est constante égale à 1 hors du pincement. La solution recherchée est celle pour lequel  $\gamma$  est minimal. ■

Soit  $\mathbf{m}_0$  la solution stationnaire que nous venons de construire :

$$\mathbf{m}_0(x) = \begin{pmatrix} \sin \theta_0(x) \\ \cos \theta_0(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous nous intéressons à la stabilité de Lyapounov de  $\mathbf{m}_0$  pour les équations de Landau-Lifschitz (2.17) sur  $\mathbb{R}$ .

Tant qu'une perturbation  $m$  de  $\mathbf{m}_0$  satisfait  $\|m - \mathbf{m}_0\| < \sqrt{2}$ , nous décrivons  $m$  à l'aide du repère mobile  $M_0, M_1, M_2$  introduit dans [33] où

$$M_0 = \mathbf{m}_0, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -\cos \theta_0(x) \\ \sin \theta_0(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous posons

$$m(t, x) = M_0(x) + r_1(t, x)M_1(x) + r_2(t, x)M_2 + \nu(r(t, x))M_0(x),$$

où  $\nu(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{1 - (\xi_1)^2 - (\xi_2)^2} - 1$ , de telle sorte que la contrainte  $|m| = 1$  soit automatiquement satisfaite. Nous avons que  $m$  est solution de (2.17) si et seulement si  $r = (r_1, r_2)$  est solution de

$$\partial_t r = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 r_1 \\ L_2 r_2 \end{pmatrix} + F(x, r, \partial_x r, \partial_x^2 r), \quad (2.26)$$

où

- $L_1(r_1) = -\partial_x^2 r_1 - \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \partial_x r_1 + \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0)r_1$ ,
- $L_2(r_2) = -\partial_x^2 r_2 - \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \partial_x r_2 + \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_0 - (\theta_0')^2)r_2$ ,
- $F$ , la partie non-linéaire.

Nous munissons  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  du produit scalaire à poids suivant :

$$\langle u | v \rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{a}}(x)u(x)v(x) dx,$$

associé à la norme  $\|\cdot\|_{L_{\bar{\mathbf{a}}}}^2$  définie par

$$\|u\|_{L_{\bar{\mathbf{a}}}}^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{a}}(x)|u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Remarque 2.4.3** *L'opérateur  $L_2$  s'écrit  $L_2 = -\frac{1}{\bar{\mathbf{a}}}\partial_x(\bar{\mathbf{a}}\partial_x) + \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_0 - (\theta_0')^2)$  ce qui implique qu'il est autoadjoint pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . De plus,  $L_2$  est de résolvante compacte et son spectre essentiel vaut  $[1, +\infty[$ . Nous avons également que*

$$\langle L_2 u | v \rangle = \langle \ell u | \ell v \rangle \quad \forall (u, v) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}),$$

où  $\ell = \partial_x + \theta_0' \tan \theta_0$ , ce qui implique que  $L_2 \geq 0$ . Enfin, le noyau de  $L_2$  est de dimension 1, engendré par  $\cos \theta_0$ .

Pour prendre en compte cette valeur propre nulle due à l'invariance de notre modèle par rotation autour de l'axe du fil, nous posons

$$\rho(\varphi, x) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\varphi(t)}(M_0(x)) \cdot M_1(x) \\ \mathbf{R}_{\varphi(t)}(M_0(x)) \cdot M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\cos \varphi - 1) \\ \cos \theta_0 \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

et nous décomposons  $r$  sous la forme :

$$r(t, x) = \rho(\varphi(t), x) + w(t, x)$$

où  $\langle w_2 | \cos \theta_0 \rangle = 0$ . Comme  $\rho(\varphi, \cdot)$  est une solution stationnaire de (2.26), nous obtenons les équations satisfaites par  $\rho$  et  $w$  et concluons la preuve du théorème 2.4.1 par des estimations d'énergie classiques.

L'outil principal dans cette étude de stabilité réside dans les estimations sur la partie linéaire :

**Proposition 2.4.7** *Il existe deux constantes  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$  telles que*

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbf{H}^1(I) \text{ tel que } \langle v | \cos \theta_0 \rangle &= 0, \quad K_1 \|v\|_{\mathbf{H}^1} \leq \sqrt{\langle L_2 v | v \rangle} \leq K_2 \|v\|_{\mathbf{H}^1}, \\ \forall v \in \mathbf{H}^2(I) \text{ tel que } \langle v | \cos \theta_0 \rangle &= 0, \quad K_1 \|v\|_{\mathbf{H}^2} \leq \|L_2 v\|_{L_\alpha^2} \leq K_2 \|v\|_{\mathbf{H}^2}, \\ \forall v \in \mathbf{H}^1(I), \quad K_1 \|v\|_{\mathbf{H}^1} &\leq \sqrt{\langle L_1 v | v \rangle} \leq K_2 \|v\|_{\mathbf{H}^1}, \\ \forall v \in \mathbf{H}^2(I), \quad K_1 \|v\|_{\mathbf{H}^2} &\leq \|L_1 v\|_{L_\alpha^2} \leq K_2 \|v\|_{\mathbf{H}^2}, \end{aligned}$$

Nous les obtenons, pour  $L_2$  en montrant qu'il n'y a pas de valeur propre non nulle plus petite que  $1/\sqrt{2}$  et par un raisonnement par l'absurde pour  $L_1$ .

**Remarque 2.4.4** *Ces résultats peuvent être étendus aux cas d'un fil fini (symétrique ou non) ou semi-fini avec un pincement. Ces cas sont inclus dans le cas plus général des fils présentant plusieurs pincements.*

## 2.4.2 Existence et stabilité d'un profil stationnaire sous un champ magnétique appliqué (Théorème 2.4.2)

En présence d'un champ magnétique appliqué de la forme  $H_a = h e_1$ , l'aimantation satisfait

$$\partial_t m = m \wedge (\mathcal{H}_e(m) + h e_1) - m \wedge (m \wedge (\mathcal{H}_e(m) + h e_1)). \quad (2.28)$$

Nous recherchons à nouveau une solution stationnaire  $\mathbf{m}_h$  de la forme  $x \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta_h(x) \\ \cos \theta_h(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

l'équation pour  $\theta_h$  s'écrivant :

$$\theta_h'' + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \theta_h' + \frac{1}{2} \sin \theta_h \cos \theta_h + h \cos \theta_h = 0 \quad (2.29)$$

Soit  $\theta_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  la solution de (2.25) donnée par la proposition 2.4.6. Nous recherchons  $\theta_h$  sous la forme d'une perturbation de  $\theta_0$  :  $\theta_h = \theta_0 + g_h$  avec  $g_h \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ . Nous avons alors

$$g_h'' + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} g_h' + \frac{1}{2} \sin(\theta_0 + g_h) \cos(\theta_0 + g_h) + h \cos(\theta_0 + g_h) + \theta_0'' + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \theta_0' = 0.$$

Soit  $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbf{H}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  définie par

$$\Psi(h, g) = g'' + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} g' + \frac{1}{2} \sin(\theta_0 + g) \cos(\theta_0 + g) + h \cos(\theta_0 + g) + \theta_0'' + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \theta_0'.$$

Comme  $\theta_0$  est solution de (2.25), nous avons  $\Psi(0, 0) = 0$  et  $D_g \Psi(0, 0)(u) = -L_1 u$ . Comme  $L_1$  est coercive sur  $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ , le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'un  $h_0 > 0$  et d'une fonction  $v : ] - h_0, h_0[ \rightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $h \in ] - h_0, h_0[$   $\Psi(h, v(h)) = 0$ . De plus, pour tout  $h \in ] - h_0, h_0[$ , nous avons classiquement que  $v(h) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  en tant que solution d'une équation différentielle ordinaire et donc  $\theta_h = \theta_0 + v(h) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  satisfait (2.29).

La stabilité de Lyapounov de la solution  $\mathbf{m}_h = \begin{pmatrix} \sin \theta_h \\ \cos \theta_h \\ 0 \end{pmatrix}$  s'étudie de la même façon

que dans le cas précédent en utilisant le repère mobile  $(M_0^h, M_1^h, M_2)$  adapté. Une nouvelle fois, le point clé de la preuve réside dans l'étude de la partie linéaire et dans la coercivité des opérateurs linéaires  $L_1^h$  et  $L_2^h$ . Celle-ci s'obtient pour  $L_2^h$  avec  $|h| < \frac{1}{2}$  de la même façon que pour  $L_2$ , et par un argument de continuité pour  $L_1^h$ .

### 2.4.3 Non-existence de profils stationnaires sous l'effet d'un "grand" champ magnétique (Théorème 2.4.3)

**Proposition 2.4.8** *Il existe  $h_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  tel que pour tout  $h \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $|h| \geq h_0$ , il n'existe pas de profil stationnaire pour (2.28) présentant un renversement d'aimantation, i.e. tel que*

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{\bar{\mathbf{a}}'}{\bar{\mathbf{a}}} \theta' + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + h \cos \theta = 0 & \text{dans } \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta(x) = -\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{\pi}{2}, \\ \theta' \geq 0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Preuve :** En supposant l'existence d'une telle solution stationnaire  $\theta$ , l'étude de la variation de l'énergie  $\mathcal{E} = (\theta')^2 + \frac{1}{2}(\sin \theta + 2h)^2$  entre  $-\infty$  et  $+\infty$  entraîne l'existence d'une borne  $h_0$  pour  $|h|$  où  $h_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi - \bar{\mathbf{a}}(0)}{\pi + \bar{\mathbf{a}}(0)} < \frac{1}{2}$ . ■

### 2.4.4 Cas d'un fil avec plusieurs pincements (Théorème 2.4.4)

Nous considérons un fil de longueur  $NL$  présentant  $N - 1$  encoches. L'aire de la coupe transversale est décrite par  $x \mapsto \mathbf{a}(x)$  donnée dans (2.23). L'aimantation de ce fil est modélisé par  $m : \mathbb{R}_t^+ \times [0, NL] \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Dans un premier temps, nous supposons

qu'il n'y a pas de champ magnétique appliqué et considérons le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge \mathcal{H}_e(m) - \alpha m \wedge (m \wedge \mathcal{H}_e(m)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times [0, NL], \\ \mathcal{H}_e(m) = \partial_{xx}m + \frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{a}} \partial_x m - \frac{1}{2} (m_2 e_2 + m_3 e_3), \\ \partial_x m(t, 0) = \partial_x m(t, NL) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Pour  $u \in \mathbf{H}^2([0, NL]; \mathbb{R})$ , on note  $F(u) = u'' + \frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{a}} u' + \frac{1}{2} \sin u \cos u$ , tel que  $m : [0, NL] \rightarrow \mathbb{S}^2$  de la forme  $x \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta(x) \\ \cos \theta(x) \\ 0 \end{pmatrix}$  soit une solution stationnaire de (2.30) si et seulement si

$$\begin{cases} F(\theta) = 0, \\ \theta'(0) = \theta'(NL) = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Connaissant une donnée  $D \in \{0, 1\}^N$ , nous recherchons une solution stationnaire de (2.30) encodant  $D$  de la forme :

$$\mathbf{m}(x) = \begin{pmatrix} \sin \theta(x) \\ \cos \theta(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc nous recherchons  $\theta : [0, NL] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}$  vérifiant (2.31) tel que  $\mathbf{m}$  vérifie (2.30), et pour tout  $k \in \{1, \dots, N\}$ , si  $D(k) = 0$  (resp.  $D(k) = 1$ ), alors pour tout  $x \in [(k-1)L + l_1, kL - l_1]$ ,  $\theta(x) < -\frac{\pi}{6}$  (resp.  $\theta(x) > \frac{\pi}{6}$ ), de telle sorte que  $\mathbf{m}$  code  $D$ .

Le schéma de la preuve est le suivant : nous construisons tout d'abord une solution approchée  $\Theta_{app}^L : [0, NL] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , pour laquelle  $F(\Theta_{app}^L)$  est proche de zéro si  $L$  est assez grand. Nous recherchons ensuite  $\theta$  sous la forme d'une perturbation de  $\Theta_{app}^L$ ,  $\theta = \Theta_{app}^L + v$ , de telle sorte qu'en écrivant le développement de Taylor de  $F$  autour de  $\Theta_{app}^L$ , cela revienne à chercher  $v$  vérifiant :

$$0 = F(\Theta_{app}^L + v) = F(\Theta_{app}^L) + \partial_v F(\Theta_{app}^L)(v) + C(\Theta_{app}^L, v)v^2$$

où

$$\begin{aligned} \partial_v F(\Theta_{app}^L)(v) &= -v'' - \frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{a}} v' - \frac{1}{2} (\cos^2 \Theta_{app}^L - \sin^2 \Theta_{app}^L) v \\ C(\Theta_{app}^L, v) &= \int_0^1 (1-s) \sin(2(\Theta_{app}^L + sv)) ds. \end{aligned}$$

Le point-clé consiste à prouver que  $\partial_v F(\Theta_{app}^L)$  est inversible si  $L$  est assez grand. La fonction  $\theta = \Theta_{app}^L + v$  est alors solution si et seulement si  $v$  vérifie

$$v = \left[ \partial_v F(\Theta_{app}^L) \right]^{-1} \left( -F(\Theta_{app}^L) - C(\Theta_{app}^L, v)v^2 \right) := \Phi_L(v).$$

L'existence de ce  $v$  est obtenue à l'aide du théorème de point fixe appliqué à  $\Phi_L$ .

Afin de construire une solution pour un fil présentant plusieurs pincements, nous utilisons la solution obtenue dans le cas d'un fil infini pour bâtir, par morceaux, une solution approchée au problème. Pour cela, étant donné  $\theta_0$  la solution obtenue dans le cas d'un fil infini dans la section 2.4.1 et  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  une application régulière croissante telle que  $\psi(x) = 0$  pour  $x \leq \frac{1}{3}$  et  $\psi(x) = 1$  pour  $x \geq \frac{1}{2}$ , on pose  $J_L : [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  telle que

- $J_L$  est impaire et régulière,
- $J_L(x) = (1 - \psi(\frac{x}{L}))\theta_0(x) + \psi(\frac{x}{L})\frac{\pi}{2}$ ,

Nous avons ainsi  $J_L(x) = \theta_0(x)$  pour  $x \in [-\frac{L}{3}, \frac{L}{3}]$  et  $J_L$  réalise sur  $[\frac{L}{3}, \frac{L}{2}]$  (resp.  $[-\frac{L}{2}, -\frac{L}{3}]$ ) un raccord régulier entre  $\theta_0(\frac{L}{3})$  et  $\frac{\pi}{2}$  (resp.  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\theta_0(-\frac{L}{3})$ ).

Soit maintenant  $D \in \{0, 1\}^N$  une donnée à encoder. Nous définissons  $\Theta_{app}^L$  comme suit :

- si  $x$  est dans la cellule gauche  $[0, \frac{L}{2}]$ , si  $D(1) = 0$  (resp.  $D(1) = 1$ ), alors  $\Theta_{app}^L(x) = -\frac{\pi}{2}$  (resp.  $\Theta_{app}^L(x) = \frac{\pi}{2}$ ),
- pour  $k \in \{1, \dots, N-1\}$  tel que  $D(k) = D(k+1) = 0$  (resp.  $D(k) = D(k+1) = 1$ ), alors si  $x$  est dans la cellule  $[kL - \frac{L}{2}, kL + \frac{L}{2}]$  autour de la  $k$ -ème encoche,  $\Theta_{app}^L(x) = -\frac{\pi}{2}$  (resp.  $\Theta_{app}^L(x) = \frac{\pi}{2}$ ),
- pour  $k \in \{1, \dots, N-1\}$  tel que  $D(k) = 0$  et  $D(k+1) = 1$  (resp.  $D(k) = 1$  et  $D(k+1) = 0$ ), alors pour  $x \in [kL - \frac{L}{2}, kL + \frac{L}{2}]$ ,  $\Theta_{app}^L(x) = J_L(x - kL)$  (resp.  $\Theta_{app}^L(x) = -J_L(x - kL)$ ), où  $J_L$  est la fonction précédemment définie.
- pour  $x$  dans la cellule droite  $[NL - \frac{L}{2}, NL]$ , si  $D(N) = 0$  (resp.  $D(N) = 1$ ), alors  $\Theta_{app}^L(x) = -\frac{\pi}{2}$  (resp.  $\Theta_{app}^L(x) = \frac{\pi}{2}$ ).

**Remarque 2.4.5** *Par souci de simplicité, nous supposons que le fil est fini et que les pincements sont régulièrement espacés. La construction de la solution approchée peut être adaptée au cas d'un espacement différent entre les pincements ou en ajoutant un morceau semi-fini à la fin du fil.*

Pour un tel profil, nous avons, si  $L \geq 3l_0$

$$\|F(\Theta_{app}^L)\|_{\mathbf{L}^2} \leq K\sqrt{N}e^{-L/3\sqrt{2}}.$$

L'étude de l'inversibilité de  $\partial_v F(\Theta_{app}^L)$  se fait en montrant la coercivité de  $\langle \partial_v F(\Theta_{app}^L)v | v \rangle$  à l'aide d'une partition régulière de l'unité qui isole chaque encoche. La preuve de l'existence d'une solution stationnaire est alors classique, et l'étude de stabilité se déduit aisément des résultats obtenus dans le cas du fil infini.

## 2.5 Perspectives

Les travaux réalisés dans le cadre du renversement d'aimantation par un courant polarisé en spin nous ont permis de mettre en évidence de nombreux comportements et

phénomènes physiques. Un premier travail en cours avec Élise Fouassier consiste à justifier rigoureusement les modèles proposés dans la section 2.3. Cette étude se base sur une analyse approfondie des phénomènes fortement oscillants apparaissant pour la densité de spin  $s$  (autour de la direction de  $m$ ) et sur la façon de les prendre en compte dans les estimations. Ce problème a été étudié dans le cas d'oscillation autour d'une direction fixe pour les équations de Navier-Stokes par E. Grenier [57]. Comme la direction des oscillations est variable, il est impossible d'obtenir des estimations régulières indépendantes du paramètre lié aux fortes oscillations et de passer directement à la limite. Nos premiers résultats démontrent l'effet polarisant de la seule couche épaisse de matériau ferromagnétique pour un courant de faible amplitude et sont en cours d'extension au cas général. Cette étude passe par une compréhension très fine des oscillations haute fréquence de façon à pouvoir gérer la modification de l'axe des oscillations.

Ces fortes oscillations permettent également de construire des oscillateurs haute fréquence. Il sera intéressant d'étudier les dispositifs définis dans [93, 87] par exemple. La principale différence entre ce dispositif et celui que nous avons étudié réside dans la direction de l'aimantation libre du ferromagnétique mince (la direction de l'anisotropie) : celle-ci présente en effet une composante orthogonale aux couches minces, engendrant ainsi des oscillations autour de l'axe du système qui ne seront jamais amorties. Nous nous retrouvons ici avec un phénomène où, contrairement au cas précédent, ce seront les oscillations haute fréquence engendrées par le dispositif qui sont à mettre en évidence.

Le modèle développé permet de rendre compte du phénomène de renversement d'aimantation dans une couche mince, le modèle obtenu étant monodimensionnel. Il sera intéressant également de coupler cela avec des modèles plus réalistes faisant apparaître des domaines magnétiques que ce soit dans le cas de couches minces ou de nanofils.

Dans le cadre de sa thèse, Rida Jizzini, en collaboration avec Gilles Carbou, a montré dans [66, 32] que les solutions présentant un renversement d'aimantation dans un nanofil infini soumis à un courant électrique sont stables à translation près pour un faible courant mais deviennent instables pour un fort courant. En collaboration avec Gilles Carbou, nous souhaitons étudier l'effet sur la position des murs d'un courant électrique parcourant un nanofil pincé ainsi que son influence sur la stabilité. Des premiers résultats montrent la stabilité des solutions que nous avons obtenues quand le courant appliqué est faible. Notre objectif est de montrer que l'on peut, par ce biais, induire un déplacement de l'information dans un fil présentant plusieurs pincements sous l'effet du courant. Cette étude nécessitera de comprendre tout d'abord l'effet déstabilisant du courant appliqué sur l'aimantation, puis de contrôler le courant appliqué afin d'amener le matériau à la configuration souhaité (a priori une translation de l'information stockée dans le nanofil). Une première étude numérique de ce phénomène est proposée en projet de 5<sup>ème</sup> année aux élèves du département de mathématiques de l'INSA.

L'étude sur les nanofils présentant plusieurs pincements met également en évidence

une configuration relativement simple de stockage d'information où nous connaissons approximativement le comportement de chaque mur. Nous avons étudié l'effet d'un champ magnétique global appliqué à ce système. Dans le cadre de l'écriture de données, l'objectif consiste à changer un 1 en 0 (ou le contraire) à une position donnée sur le nanofil, c'est-à-dire de changer le sens de l'aimantation entre deux pincements, sans modifier le sens de l'aimantation ailleurs dans le nanofil. Cela s'effectue à l'aide d'un champ magnétique localisé engendré par une "tête d'écriture". Un premier objectif sera d'étudier l'effet d'un champ magnétique localisé sur le nanofil considéré, et ensuite d'essayer de modifier les données écrites localement. Un autre moyen d'arriver à ce résultat pourra consister à utiliser un courant électrique polarisé en spin transverse à la direction du fil dans un dispositif semblable à celui présenté dans la section 2.3.

## Chapitre 3

# Fluides biologiques

### 3.1 Introduction

Dans le cadre du projet ANR BioFiReady, porté par Philippe Poncet (UPPA), regroupant mathématiciens, physiciens et médecins, je me suis intéressé à l'écoulement de fluides biologiques et plus particulièrement à l'écoulement de mucus dans les poumons.

Un des objectifs du projet BioFiReady consistait à mettre en évidence numériquement l'effet de clairance mucociliaire dû au mouvement des cils qui tapissent la paroi bronchiale (voir figure 3.1) (voir aussi la thèse de Robin Chatelin [37], encadrée par Philippe Poncet). Le mucus étant très visqueux, les phénomènes de diffusion dominent les phénomènes de convection lors de l'écoulement, ce qui permet de négliger ce terme dans les équations de Navier-Stokes. La vitesse du fluide est donc solution d'un problème de Stokes. Dans ce contexte, notre étude porte sur un fluide à viscosité variable dans un domaine tridimensionnel  $\Omega$  avec des obstacles immergés qui se déforment au cours du temps. Nous avons étudié le cas d'un couplage fluide-solide à sens unique : seulement les forces exercées par le solide sur le fluide sont considérées. La vitesse du solide  $\bar{u}$  est donc une donnée du problème dont l'évolution est supposée connue. Cela implique également que le domaine solide, appelé  $B(t)$ , est connu et évolue avec sa propre vitesse  $\bar{u}$ .

Pour modéliser cette viscosité variable  $\mu$ , nous avons supposé qu'elle dépendait de la fraction de masse  $\alpha$  de mucine, une protéine sécrétée dans les poumons, où  $\alpha$  est solution d'une équation de convection-diffusion. Ce modèle est justifié quand la viscosité dépend directement d'un agent non miscible dans le fluide (par exemple, des protéines, des produits chimiques, des polymères, ... dans de l'eau). Dans ce cas, la viscosité est non-homogène et le terme de diffusion dans l'équation de conservation de mouvement ne se réduit pas à un laplacien. Nous supposons donc que la viscosité est une fonction de la fraction massique de cet agent :  $\mu = \Phi(\alpha)$ . Elle est supposée bornée :  $\mu_\infty \leq \Phi(\alpha) \leq \mu_1$ , avec  $\mu = \mu_\infty$  (la viscosité de l'eau) si il n'y a pas d'agents, et  $\mu = \mu_1$  si le fluide est saturé.

Cette modélisation était une bonne alternative aux lois rhéologiques constitutives du fluide pour lesquelles il n'y avait pas de modèles établis. Elle permettait également de décrire convenablement un fluide avec deux phases observables : une de forte et une de

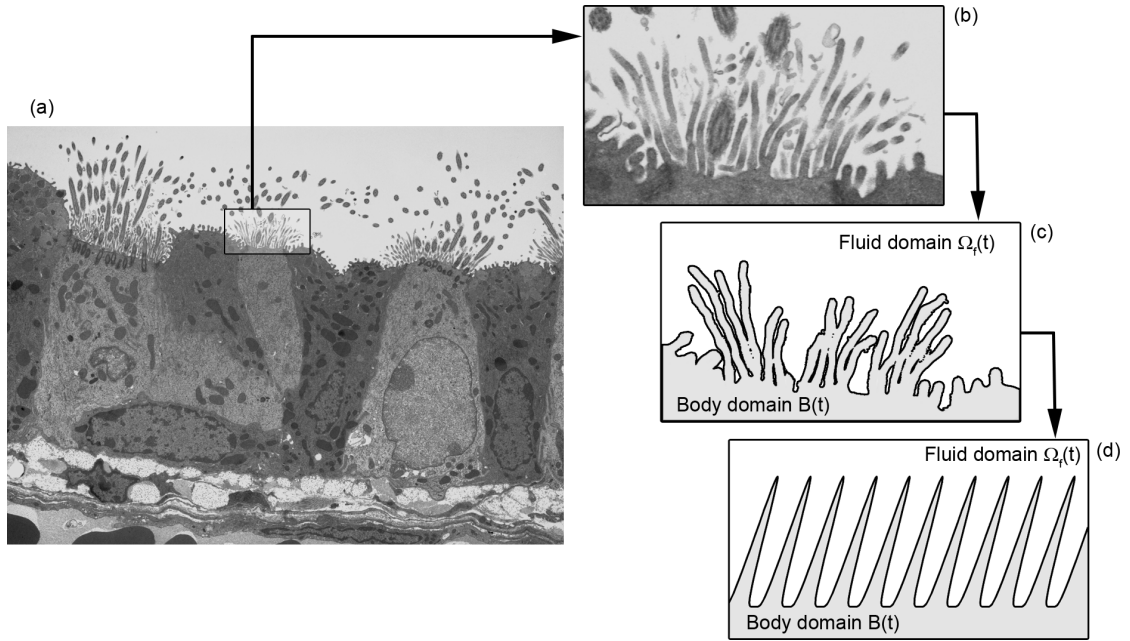


FIGURE 3.1 – Modèle de paroi bronchique

faible concentration, sans que l'on puisse suivre précisément l'interface entre les phases. C'est donc ce modèle que nous avons retenu dans un premier temps au vu de la difficulté d'accéder à des informations plus précises à l'aide d'expériences *in vivo* :

$$\begin{cases} u = \bar{u} & \text{dans le "solide",} \\ -\operatorname{div}(2\mu D(u)) = f - \nabla p & \text{dans le fluide,} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans le fluide,} \\ \partial_t \alpha + u \cdot \nabla \alpha - \eta \Delta \alpha = 0 & \text{dans le domaine de calcul,} \\ \mu = \Phi(\alpha) & \text{dans le domaine de calcul,} \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $p$  est pression,  $\mu$  la viscosité du fluide,  $f$  les forces extérieures et  $D(u) = \frac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}$  le tenseur des contraintes.

Afin de pouvoir réaliser des simulations tri-dimensionnelles de ce problème, un des objectifs du projet et de la thèse de Robin Chatelin [37], Chatelin et Poncet ont choisi de ne pas résoudre le problème initial, mais plutôt de se ramener à un problème posé dans tout l'espace, en domaine fixe, en ajoutant un terme de pénalisation dans l'équation de conservation des moments afin de forcer la vitesse  $u$  à valoir  $\bar{u}$  dans le domaine solide  $B(t)$ . Cela transforme le problème précédent en un problème de Stokes pénalisé couplé

à une équation de convection-diffusion engendrant ainsi une dynamique non linéaire :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu^\varepsilon D(u^\varepsilon)) + \frac{\mathbf{1}_{B(t)}}{\varepsilon}(u^\varepsilon - \bar{u}) = f - \nabla p^\varepsilon & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_t \alpha^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla \alpha^\varepsilon - \eta \Delta \alpha^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mu^\varepsilon = \Phi(\alpha^\varepsilon) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{1}_{B(t)}$  est la fonction caractéristique du domaine solide  $B(t)$  et  $\varepsilon > 0$  le paramètre de pénalisation.

Je me suis intéressé dans [A9] aux aspects théoriques posés par ces deux problèmes (3.1) et (3.2) : existence et unicité de solutions, convergence du problème (3.2) vers le problème (3.1) quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

En parallèle des études théoriques et numériques que nous avons menées, une campagne de prélèvement de mucus (lors d'actes de kinésithérapie sur des malades de la mucoviscidose) a été menée au CHU Larrey sous l'autorité des docteurs Marlène Murriss-Espin et Alain Didier du service de pneumologie et allergologie du CHU de Toulouse. Ces prélèvements ont été étudiés à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) par Dominique Anne-Archard afin d'obtenir le comportement rhéologique du mucus [38] [88]. Un résumé de tous ces résultats (théoriques, numériques et expérimentaux) a fait l'objet d'un chapitre de livre [C1].

Suite aux résultats expérimentaux, nous avons repris et approfondi l'analyse théorique, en éliminant un défaut de notre premier modèle (la diffusion de la fraction massique ne se fait plus que dans le domaine fluide) d'une part, et en prenant en compte des lois de viscosité plus réalistes d'autre part : d'après les résultats obtenus dans [38], nous nous intéressons par la suite à un fluide dont la viscosité suit une loi de Carreau

$$\mu = \mu(\alpha, u) = \mu_\infty + (\mu_0(\alpha) - \mu_\infty) \left(1 + 2\beta^2(\alpha)|D(u)|^2\right)^{\frac{q(\alpha)-2}{2}},$$

où  $0 < \mu_\infty \leq \mu_0(\alpha)$  et  $q(\alpha) \in ]1, 2]$  pour tout  $\alpha$  et  $\mu_0$ ,  $q$  et  $\beta$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\alpha$ .

La généralisation que nous allons présenter s'applique à tout type de configuration micro-fluidique et concerne la dynamique de fluides hétérogènes miscibles et viscoplastiques. Les applications concernent autant les sciences de la vie (à l'échelle de la cellule), comme l'écoulement de mucus dans les poumons, que l'environnement (à l'échelle des pores dans les milieux naturellement poreux). Ces résultats sont détaillés dans l'article [S3].

Vous trouverez dans les figures 3.2 et 3.3 quelques simulations des écoulements considérés tirées de [S3].

## 3.2 Modélisation

Dans la suite, nous considérons un solide lisse et déformable  $B(t)$  se déplaçant dans un domaine tri-dimensionnel  $\Omega \setminus \mathbb{R}^3$  et un fluide miscible rhéofluidifiant fortement visqueux

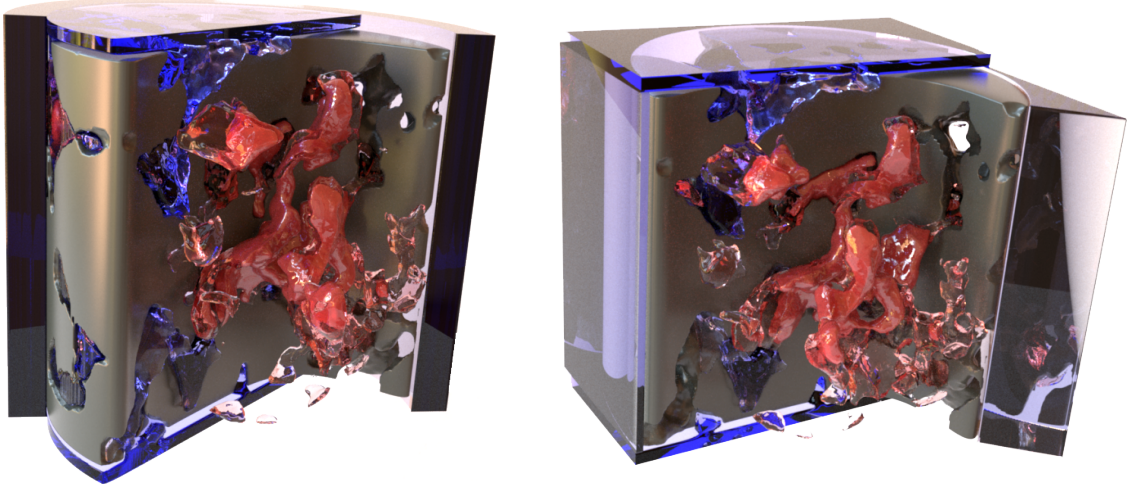


FIGURE 3.2 – Concentration de Xanthan (Bentheimer sandstone)

dans le domaine  $\Omega \setminus \bar{B}(t)$ . Afin de modéliser facilement cette géométrie déformable, nous nous plaçons dans  $\mathbb{R}^4$  et introduisons pour un temps final  $T > 0$  le domaine fluide  $O_p^c$  défini par

$$O_p^c = \left\{ (t, x) \in [0, T] \times \Omega, x \in \Omega \setminus \bar{B}(t) \right\}.$$

Le caractère rhéofluidifiant du fluide fait apparaître un opérateur de Stokes non linéaire, son hétérogénéité implique que les paramètres du fluide dépendent de la concentration  $\alpha$  du constituant dont la vitesse est notée  $u$ . Les aspects miscibles du fluide sont modélisés par la diffusion du constituant  $\alpha$ . Ces hypothèses nous mènent au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(\alpha, u)D(u)) = f - \nabla p \text{ in } O_p^c, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ in } O_p^c, \\ \partial_t \alpha + u \cdot \nabla \alpha - \sigma \Delta \alpha = 0 \text{ in } O_p^c, \\ u = \bar{u} \text{ on } \Sigma \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $D = (\nabla u + \nabla u^T)/2$  est le tenseur des contraintes,  $p$  est la pression et  $\mu$  la viscosité variable, avec des données initiales pour  $u$  et  $\alpha$ . Le coefficient de diffusion  $\sigma$  un réel strictement positif. Les conditions de bord, introduites et détaillées dans l'équation (3.9) ci-dessous, sont usuelles : Dirichlet, Neumann, une combinaison des deux ou des conditions périodiques sur  $u$ , et typiquement pas de flux pour  $\alpha$  (Neumann homogène) sur la frontière intérieure  $\partial B(t) \setminus \partial \Omega$  et sur le bord  $\partial \Omega$  du domaine ou des conditions périodiques aux mêmes endroits que  $u$ . L'effet rhéofluidifiant provient de la décroissance de  $\mu$  par rapport à la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma} = (2D : D)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2}|D|$ . Un exemple classique est la loi d'Ostwald

$$\mu = \frac{K}{2} \dot{\gamma}^{q-2}$$

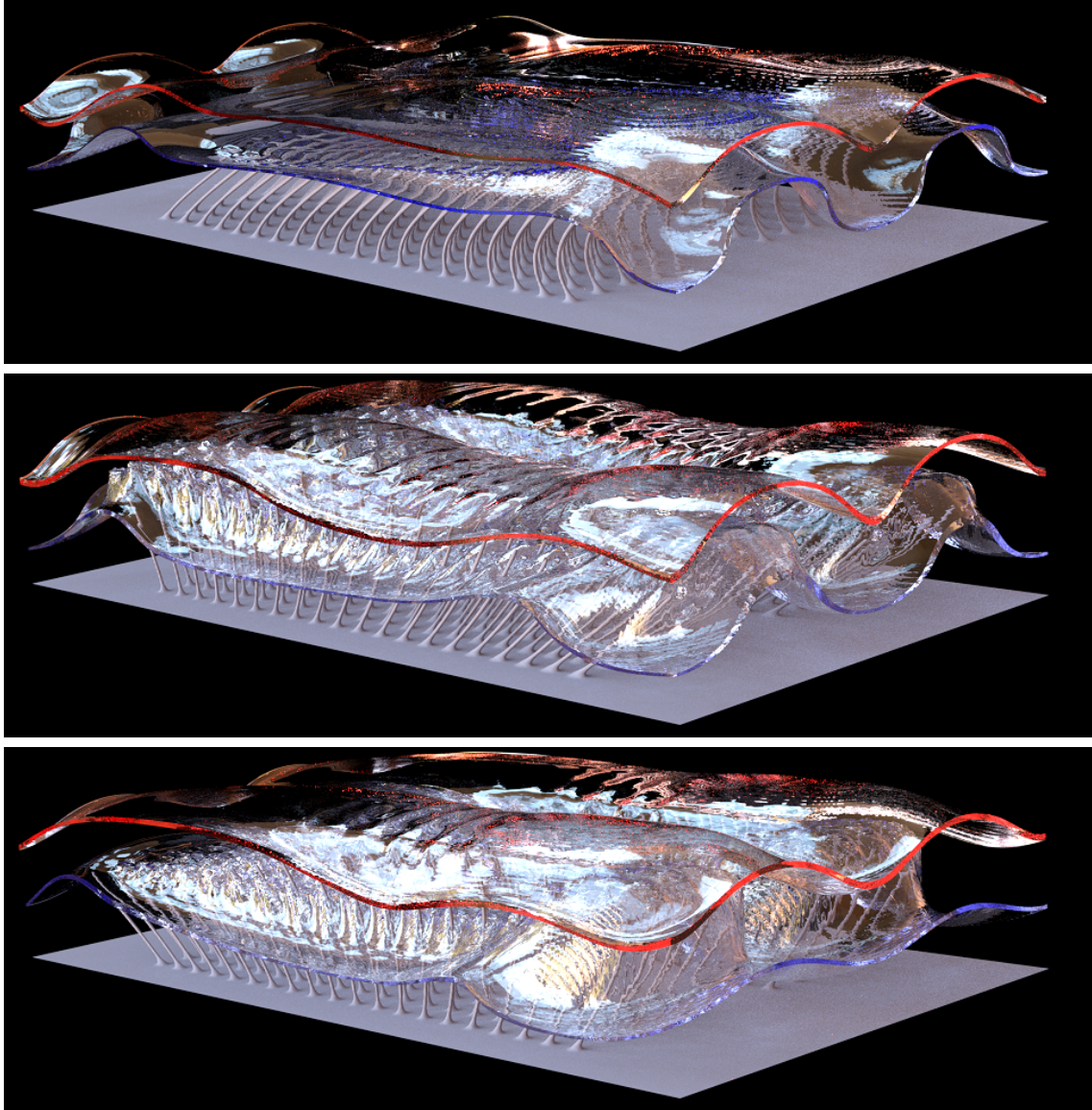


FIGURE 3.3 – Simulation d'écoulement de mucus dans les poumons, avec périodicité sur les parois latérales, résolution  $512 \times 256 \times 128$ . Les isosurfaces de niveau 0.4 et 0.7 pour la fraction massique  $\alpha$  sont affichées respectivement en bleu et rouge après 200, 415 et 710 pas de temps, de haut en bas.

avec l'exposant  $q < 2$  et la consistance  $K > 0$  (cette loi est également appelée loi-puissance). Cela conduit à l'opérateur  $-K \operatorname{div}(|D|^{q-2}D)$  dans l'équation (3.3), dont l'analyse est très proche de celle de la théorie du  $q$ -Laplacien. Sa version bornée, exhibant deux bornes newtoniennes physiques et parfois utilisée comme une régularisation de la loi d'Ostwald, est la loi de Carreau :

$$\mu(\alpha, u) = \mu_\infty + (\mu_0(\alpha) - \mu_\infty) \left(1 + 2\beta(\alpha)^2 |D(u)|^2\right)^{\frac{q(\alpha)-2}{2}} \quad (3.4)$$

où  $0 < \mu_\infty \leq \mu_0(\alpha)$  et  $q(\alpha) \in ]1, 2]$  pour tout  $\alpha$ , et où  $\mu_0$ ,  $\beta$  et  $q$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\alpha$ . On suppose que la viscosité au repos  $\mu_0$  est croissante en  $\alpha$  alors que  $q$  est décroissante ( $N = q + 1$  est appelé l'indice du fluide), et le temps matériel  $\beta$  est supposé monotone pour tout  $\dot{\gamma}$ . Ces conditions prennent en compte les valeurs constantes, généralisant ainsi l'analyse réalisée dans [A9]. En pratique,  $\alpha$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ , mais pourrait vivre dans n'importe quel intervalle fermé de  $\mathbb{R}^+$ .

Afin de pouvoir être appliqué à des cas réels, ce système d'équation aux dérivées partielles est approché au moyen de la pénalisation suivante sur le domaine  $B(t)$  visant à préserver le caractère de champ à divergence nulle de la vitesse  $\bar{u}$  dans le solide :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(\alpha^\varepsilon, u^\varepsilon)D(u^\varepsilon)) + \frac{\mathbf{1}_{B(t)}}{\varepsilon}(u^\varepsilon - \bar{u}) = f - \nabla p^\varepsilon \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t \alpha^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla \alpha^\varepsilon - \operatorname{div}(\sigma \mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}(t)} \nabla \alpha^\varepsilon) = 0 \text{ dans } O_p^c, \\ \alpha^\varepsilon = 0 \text{ dans } O_p \end{cases} \quad (3.5)$$

où l'indicatrice  $\mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}(t)}$  assure qu'il n'y a pas de diffusion du fluide dans le solide. Les conditions aux bord associées découlent directement de l'équation (3.9) et sont détaillées dans la suite dans l'équation (3.11).

L'ensemble d'équations pénalisées (3.5) est d'un intérêt primordial afin d'effectuer des simulations numériques car il permet d'utiliser des méthodes numériques qui évitent le maillage de la frontière du domaine  $\partial B(t)$  et de ses déplacements. Nous nous intéressons donc au caractère bien posé du système d'EDPs (3.5) dans la section 3.4. Au cours de l'étude théorique de ce système couplé émergent quatre types de problèmes. Le premier vient de la viscosité non linéaire  $\mu$  dépendant de  $\alpha$  et de  $D$ . Elle transforme le problème en un problème de type  $q$ -laplacien, mais avec  $q$  dépendant du temps et de l'espace. De tels problèmes ont déjà été étudiés par Diening et al. [49, 51, 50] pour des fluides électrorhéologiques pour lesquels ils introduisent la théorie des espaces de Lebesgue d'exposant variable. Dans la section 3.5, nous expliquons le schéma de la preuve du théorème 3.4.1. Nous utilisons tout d'abord ces espaces ainsi que des méthodes classiques pour le problème de  $p$ -laplacien (Lindqvist, [75]) afin de trouver des solutions pour le problème de Stokes non couplé, puis nous étudions un second type de problème : celui-ci provient d'une "simple" équation de convection-diffusion écrite dans le cas moins simple d'un domaine dépendant du temps  $\Omega \setminus \bar{B}(t)$ . La plupart des résultats d'existence classique ne peuvent plus être utilisés et on doit suivre précisément toutes les dépendances et régularités en temps afin d'obtenir le résultat souhaité. Un troisième problème

est lié au couplage entre le problème de Stokes et l'équation de convection-diffusion. Dans [20], Boyer et Fabrie traitent le cas d'un couplage entre les équations de Navier-Stokes et des équations de transport, et dans [A9], nous étudions le cas du couplage dans le cas newtonien. Le dernier problème, traité dans la section 3.6, émane de la méthode de pénalisation utilisée pour les simulations numériques. Nous devons prouver que le problème pénalisé que l'on résout est pertinent, même dans le cas d'un domaine mobile et déformable. L'étude théorique pour un domaine pénalisé fixé a été effectuée par Carbou et Fabrie [28] pour l'équation de Navier-Stokes et nous l'avons effectuée dans le cas d'un domaine mobile et déformable dans le cas newtonien pour ces équations dans [A9].

### 3.3 Considérations géométriques

Soit  $T > 0$ ,  $B(t)$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  dépendant du temps  $t \in [0, T]$ , et  $\Omega$  un ouvert suffisamment régulier de  $\mathbb{R}^3$ . Si on considère un problème avec au moins une condition de bord périodique, on pose  $\mathcal{Q}$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière est suffisamment lisse, et une relation d'équivalence  $\sim$  (dont le noyau est noté  $G$ ) tel que l'espace quotient  $\Omega \equiv \mathcal{Q}/G$ , avec la topologie induite de  $\mathcal{Q}$ , est suffisamment lisse.

Un cas d'étude typique pour cette étude est le cube  $]0, L[^3$  sur lequel on met deux conditions de bord périodiques. Dans ce cas  $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^2 \times ]0, L[$  et  $G = LZ^2 \times \{0\}$ , afin que  $\Omega \equiv \mathcal{Q}/G$  soit lisse.

Nous introduisons quatre parties de  $\mathbb{R}^4$  :

$$\begin{aligned} O &= [0, T] \times \Omega \quad \text{le domaine complet en espace et temps,} \\ O_p &= \{(t, x) \in [0, T] \times \Omega, x \in B(t)\} \quad \text{le solide, ie le domaine pénalisé,} \\ O_p^c &= \{(t, x) \in [0, T] \times \Omega, x \in \Omega \setminus \overline{B(t)}\} = O \setminus \overline{O_p} \quad \text{le domaine fluide,} \\ \Sigma &= \{(t, x) \in [0, T] \times \Omega, x \in \partial B(t) \setminus \partial \Omega\} \quad \text{la frontière intérieure de } O_p. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le problème (3.3) se réécrit dans ces espaces sous la forme :

$$\begin{cases} u = \bar{u} \text{ dans } O_p, \\ -\operatorname{div}(2\mu(\alpha, u)D(u)) = f - \nabla p \text{ dans } O_p^c, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } O, \\ \partial_t \alpha + u \cdot \nabla \alpha - \operatorname{div}(\sigma \nabla \alpha) = 0 \text{ dans } O_p^c, \end{cases} \tag{3.7}$$

Sur les frontières de  $B(t)$  et  $\Omega$  où la normale extérieur  $\nu$  est définie, nous posons  $u_\perp = (u \cdot \nu)\nu$  et  $u_\parallel = u - u_\perp = -(u \wedge \nu) \wedge \nu$ , respectivement les composantes normales et tangentielles de  $u \in \mathbb{R}^3$  (l'hypothèse H1 introduite ci-dessous interdit que  $\nu$  ne soit pas définie à l'intersection de  $\partial B(t)$  et  $\partial \Omega$ ). Afin de décrire proprement les conditions au bord du problème (3.3), on note  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_I$  les  $I$  composantes connexes de  $\partial \Omega$  et leur union

$$\Gamma = \bigsqcup_{i=1..I} \Gamma_i \tag{3.8}$$

sur lequel on introduit l'ensemble  $\theta_i \in \{0, 1\}$ , constant sur chaque composante connexe  $\Gamma_i$ , afin de décrire les transitions entre les conditions de bord de Dirichlet et de Neumann.

Nous avons donc les conditions initiales et au bord suivantes :

$$\begin{cases} u_{\perp} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma \\ \theta_i u_{\parallel} + (1 - \theta_i) \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_i, \quad i = 1..I, \\ u = \bar{u} & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma \text{ et sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \alpha \text{ et } u \text{ sont périodiques sinon,} \\ \alpha(0, \cdot) = \alpha_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

Bien que la périodicité soit incluse dans la définition de l'ensemble  $\Omega$ , nous la rappellerons dans toutes les équations.

Il n'y a pas de conditions de bord sur  $\partial\Omega \setminus \Sigma$  car l'hypothèse H1 introduite ci-après pour la  $\mathcal{C}^k$ -bi-régularité implique que cet ensemble est vide. La viscosité  $\mu$  et sa régularité par rapport à  $\alpha$  vérifient :

$$\begin{cases} \mu(\alpha, u) = \mu_{\infty} + (\mu_0(\alpha) - \mu_{\infty}) \left(1 + 2\beta(\alpha)^2 |D(u)|^2\right)^{\frac{q(\alpha)-2}{2}} \\ \mu_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mu_0(\alpha) \geq \mu_{\infty} > 0, \\ \beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \beta(\alpha) \geq 0, \\ q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, q(\alpha) \in [q^-, 2] \text{ où } q^- > 1, \end{cases}$$

et  $\sigma > 0$  désigne le coefficient de diffusion dans l'équation de convection-diffusion sur  $\alpha$ .

Suite à notre modélisation, nous réécrivons le problème pénalisé (3.5) sous la forme :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(\alpha^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})D(u^{\varepsilon})) + \frac{\mathbf{1}_{B(t)}}{\varepsilon}(u^{\varepsilon} - \bar{u}) = f - \nabla p^{\varepsilon} & \text{dans } O, \\ \operatorname{div} u^{\varepsilon} = 0 & \text{dans } O, \\ \partial_t \alpha^{\varepsilon} + u^{\varepsilon} \cdot \nabla \alpha^{\varepsilon} - \operatorname{div}(\sigma \nabla \alpha^{\varepsilon}) = 0 & \text{dans } O_p^c, \\ \alpha^{\varepsilon} \text{ est prolongé par } 0 & \text{dans } O_p, \end{cases} \quad (3.10)$$

avec les données initiales et conditions au bord dérivant directement de l'ensemble d'équations (3.9) :

$$\begin{cases} u_{\perp}^{\varepsilon} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma \\ \theta_i u_{\parallel}^{\varepsilon} + (1 - \theta_i) \frac{\partial u_{\parallel}^{\varepsilon}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_i, \quad i = 1..I \\ \frac{\partial \alpha^{\varepsilon}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma \text{ et sur } \Sigma, \\ u^{\varepsilon} \text{ et } \alpha^{\varepsilon} \text{ sont périodiques sinon,} \\ \alpha^{\varepsilon}(0, \cdot) = \alpha_0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}(0). \end{cases} \quad (3.11)$$

Finalement, on introduit les espaces fonctionnels suivants :

**Définition 3.3.1** Soit  $\mathcal{F}(\Omega; X)$  l'ensemble des fonctions définies de  $\Omega$  à valeurs dans  $X$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0^2(\Omega) &= \{w \in \mathbf{L}^2(\Omega), \int_{\Omega} w \, dx = 0\} \\ V(\Omega) &= \{w \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \operatorname{div} w = 0 \text{ dans } \Omega, w_{\perp} = 0 \text{ sur } \Gamma, \theta_i w_{\perp} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \quad i = 1..I\} \end{aligned}$$

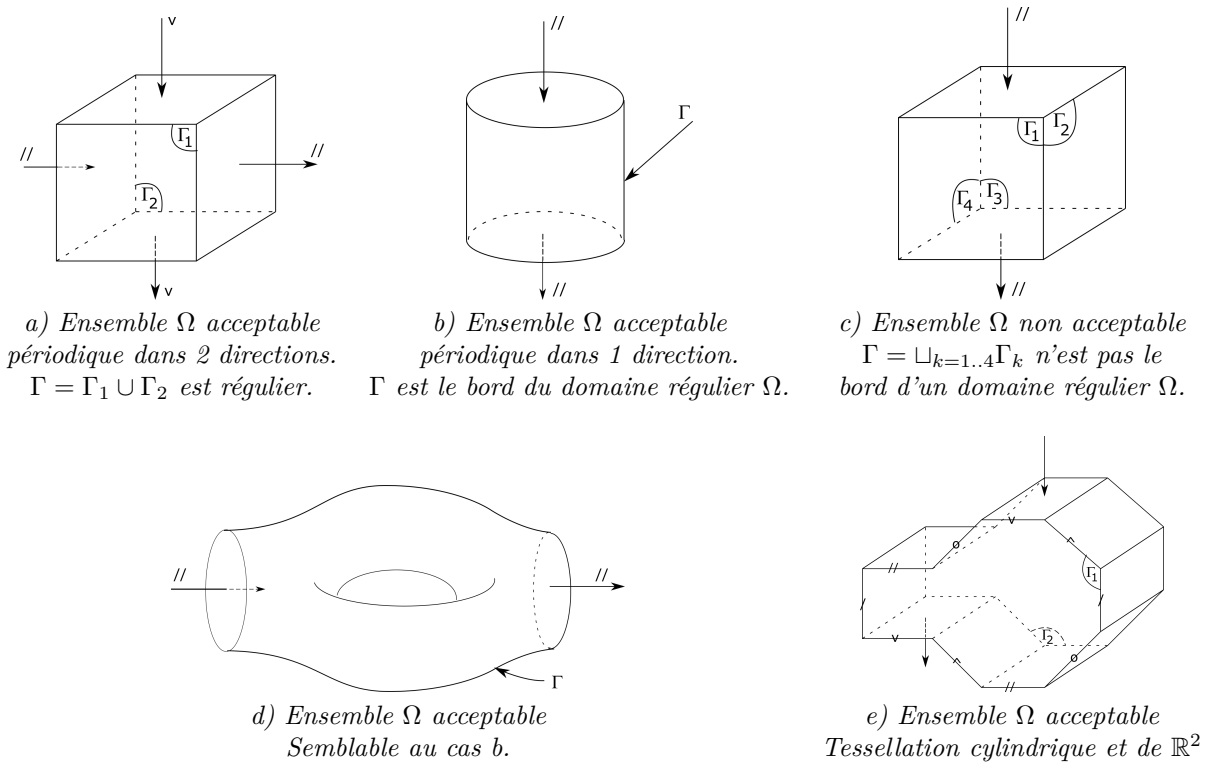


FIGURE 3.4 – Exemples de domaines  $\Omega$  acceptables, dont les frontières sont suffisamment régulières, et problèmes posés par les coins dans la régularité des domaines.

muni de la norme  $\mathbf{H}^1$  usuelle, la périodicité des fonction et la définition du champ de vecteur normal  $\nu$  étant implicitement pris en compte dans la définition de  $\Omega$ . Grâce à l'inégalité de Poincaré généralisée (voir par exemple [20] section III.6), il existe deux constantes ne dépendant que  $\Omega$  telles que

$$c_1 \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq c_2 \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

**Remarque 3.3.1** Dans la suite la norme sur les espaces  $\mathbf{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  sera simplement notée  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$  pour alléger les notations.

### 3.4 Résultats principaux

Les résultats d'existence et d'unicité qui suivent nécessitent des hypothèses de régularité sur l'évolution au cours du temps du domaine (H1) et (H2) et sur la vitesse  $\bar{u}$  à l'intérieur de l'obstacle (H3). Nous introduisons tout d'abord la définition suivante :

**Définition 3.4.1** Soit  $B$  un ouvert régulier de  $\Omega$ .  $B$  sera dit  $\mathcal{C}^k$ -bi-régulier si et seulement si  $B$  est uniformément  $\mathcal{C}^k$ -régulier (voir [1] section 4 pour la définition) jusqu'au bord de  $\Omega$  et  $\Omega \setminus \bar{B}$  est un ouvert de  $\Omega$  uniformément  $\mathcal{C}^k$ -régulier.

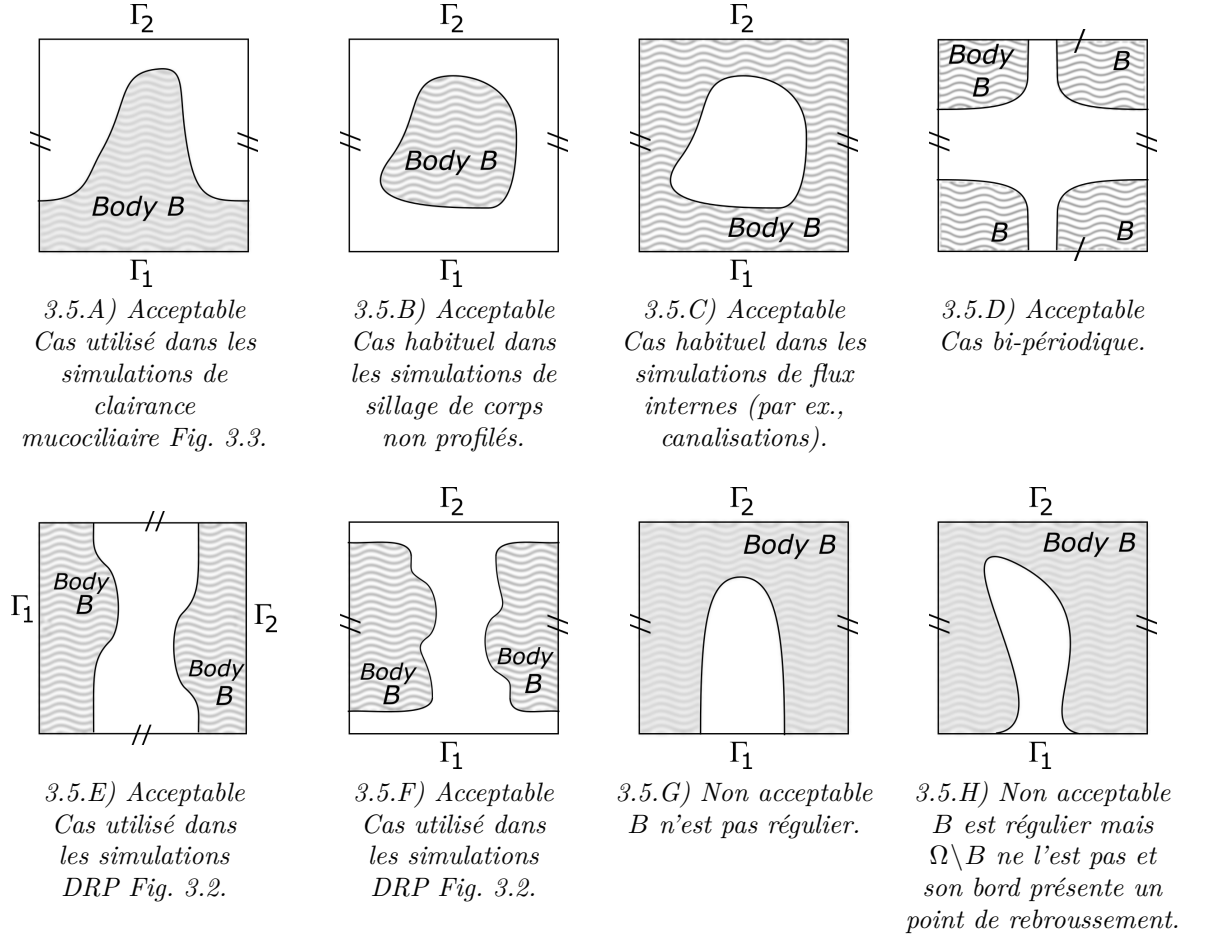


FIGURE 3.5 – Exemples de domaines  $B$  pour les propriétés de  $C^k$ -bi-régularité introduites dans la définition 3.4.1.

### Hypothèse 1 (H1)

- Le domaine  $B$  est un ouvert  $\Omega$   $C^2$ -bi-régulier,
- $\Omega \setminus \bar{B}$  est un ouvert connexe de  $\Omega$ .

### Remarque :

- Si  $\bar{B} \cap \partial\Omega = \emptyset$  et  $B$  est  $C^k$ -régulier alors  $B$  est  $C^k$ -bi-régulier.
- Dans le cas des poumons, si il existe  $(l, l') \in (\mathbb{R}^+)^2$  tels que  $0 < l < l' < L$  et  $\Gamma \times [0, l] \subset B \subset \Gamma \times [0, l']$ , i.e. on suppose que la paroi bronchiale est le domaine fixe  $\Gamma \times [0, l]$  à laquelle les cils sont attachés et les cils n'atteignent jamais le haut du domaine  $\Omega$ . Le domaine  $B$  est alors  $C^k$ -bi-régulier.

### Hypothèse 2 (H2)

Il existe une fonction  $\Psi \in C^2([0, T]; C^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$

- $\Psi(t)$  a des conditions de bord périodiques.

- $\Psi(t)$  est un  $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme sur  $\Omega$ .
- $B(t) = \Psi(t, B)$ .
- $\Psi(t)$  conserve la propriété de  $\mathcal{C}^2$ -bi-régularité.
- $\Psi(t)$  conserve la mesure de Lebesgue de tous les ensembles, i.e.  $\forall \omega \subset \Omega \quad |\Psi(t)(\omega)| = |\omega|$ .

**Remarque :**

- Le domaine  $B(t)$  est  $\mathcal{C}^2$ -bi-régulier.
- Dans le cas du poumon, si pour tout  $t \in [0, T]$   $\Psi(t)|_{[0, t] \times \Gamma} = \text{Id}_{[0, t] \times \Gamma}$ ,  $\Psi(t)([0, t'] \times \Gamma) \subset [0, t'] \times \Gamma$ ,  $\Psi(t)$  préserve la propriété de  $\mathcal{C}^2$ -bi-régularité.
- Nous avons aussi  $\Omega \setminus \bar{B}(t) = \Psi(t, \Omega \setminus \bar{B})$ .
- La conservation de la mesure implique aussi que  $\forall (t, x) \in [0, T] \times \Omega$ ,  $|\det J_{\Psi(t)}(x)| = 1$  et  $\text{tr}(J_{\Psi(t)}^{-1} \partial_t \Psi(t)) = 0$ .

**Hypothèse 3 (H3)**

- $\bar{u} \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot); \mathbb{R}^3))$
- $\forall t \in [0, T]$ ,  $\text{div } \bar{u}(t, \cdot) = 0$  dans  $B(t)$ ,
- $\bar{u}$  vérifie

$$\begin{aligned} \bar{u}_\perp &= 0 \quad \text{sur } [0, T] \times (\Gamma_i \cap B(\cdot)), \quad i = 1..I, \\ \theta_i \bar{u}_\parallel + (1 - \theta_i) \frac{\bar{u}_\parallel}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{sur } [0, T] \times (\Gamma_i \cap B(\cdot)), \quad i = 1..I, \end{aligned}$$

- $\forall t \in [0, T]$   $\bar{u}(t, \cdot)$  a des conditions de bord périodiques sinon.

**Hypothèse 4 (H4)** Nous supposons que

- $(\alpha, Z) \mapsto (\mu_0(\alpha) - \mu_\infty) q'(\alpha) (1 + 2\beta(\alpha)^2 Z)^{\frac{q(\alpha)}{2} - 1} \ln(1 + 2\beta^2(\alpha)Z)$  est bornée sur  $K \times \mathbb{R}^+$  pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ ,
- $\alpha \mapsto (\mu_0(\alpha) - \mu_\infty)(q(\alpha) - 2) \frac{\beta'(\alpha)}{\beta(\alpha)}$  est bornée sur  $K \cap \{\alpha, \beta'(\alpha) \neq 0\}$  pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.4.2**  $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \alpha^\varepsilon)$  est une solution faible de (3.10)-(3.11) si elle vérifie

- $u^\varepsilon \in \mathbf{L}^q(0, T; V(\Omega))$ ,  $p^\varepsilon \in \mathbf{L}^q(0, T; \mathbf{L}_0^2(\Omega))$  avec  $2 \leq q \leq +\infty$ ,
- $\alpha^\varepsilon \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  et  $\alpha^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$ ,
- $\alpha^\varepsilon = 0$  dans  $O_p$ ,
- pour tout  $v \in \mathcal{C}_c(0, T; V(\Omega))$ ,

$$\iint_{(0, T) \times \Omega} 2\mu(\alpha^\varepsilon, u^\varepsilon) D(u^\varepsilon) : D(v) \, dx \, dt + \frac{1}{\varepsilon} \iint_{O_p} (u^\varepsilon - \bar{u}) \cdot v \, dx \, dt = \iint_{(0, T) \times \Omega} f \cdot v \, dx \, dt,$$

- $\alpha^\varepsilon$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \alpha^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla \alpha^\varepsilon - \text{div}(\sigma \nabla \alpha^\varepsilon) = 0 & \text{dans } O_p^c, \\ \frac{\partial \alpha^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } ([0, T] \times \Gamma) \cup \Sigma, \\ \alpha^\varepsilon \text{ a des conditions de bord périodiques sinon,} \\ \alpha^\varepsilon(0, \cdot) = \alpha_0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}(0), \end{cases} \quad (3.12)$$

**Théorème 3.4.1** Soit  $\alpha_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))$ . On suppose (H1), (H2), (H3), (H4) et que pour tout  $T > 0$ ,  $f \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ . Il existe alors une unique solution faible  $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \alpha^\varepsilon)$  à (3.10)-(3.11). De plus, il existe des constantes indépendantes de  $\varepsilon$  telles que  $u^\varepsilon$  vérifie

$$\begin{aligned} \mu_\infty \|D(u^\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 &+ \frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^2(B(\cdot)))}^2 \\ &\leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))} + C' \|f\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + C'' \max \left( \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))}^2, \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))}^{\frac{3-q^-}{2}} \right) \\ \mu_\infty \|D(u^\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 &+ \frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(B(\cdot)))}^2 \\ &\leq C \|f\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))} + C' \|f\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + C'' \max \left( \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))}^2, \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^{\frac{3-q^-}{2}}([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))} \right), \end{aligned}$$

où  $q^- = \inf\{q(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} > 1$ .

**Définition 3.4.3**  $(u, p, \alpha)$  est solution de (3.7)-(3.9) si elle vérifie

- $u \in \mathbf{L}^q(0, T; V(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$ ,  $p \in \mathbf{L}^q(0, T; \mathbf{L}_0^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  avec  $2 \leq q \leq +\infty$ ,
- $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))) \cap \mathbf{H}^1(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$ ,
- $u = \bar{u}$  dans  $O_p$ ,
- $(u, p) \in \mathbf{L}^q(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot); \mathbb{R}^3)) \times \mathbf{L}^q(0, T; \mathbf{L}_0^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  avec  $2 \leq q \leq +\infty$  est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(\alpha, u)D(u)) = f - \nabla p \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))), \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } O_p^c, \\ u|_\Sigma = \bar{u}|_\Sigma \quad \text{a.e.}, \\ u_\perp = 0 \quad \text{on } [0, T] \times \Gamma_i, \quad i = 1..I, \\ \theta_i u_\parallel + (1 - \theta_i) \frac{\partial u_\parallel}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } [0, T] \times \Gamma_i, \quad i = 1..I \\ u \text{ a des conditions de bord périodiques sinon,} \end{cases}$$

- $\alpha$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + u \cdot \nabla \alpha - \operatorname{div}(\sigma \nabla \alpha) = 0 \quad \text{dans } O_p^c, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } ([0, T] \times \Gamma) \cup \Sigma, \\ \alpha \text{ a des conditions de bord périodiques sinon,} \\ \alpha(0, \cdot) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}(0), \end{cases} \quad (3.12)$$

**Théorème 3.4.2** Sous les hypothèses du Théorème 3.4.1, il existe une unique solution  $(u, p, \alpha)$  à (3.7)-(3.9). De plus, la solution faible  $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \alpha^\varepsilon)$  de (3.10)-(3.11) converge fortement vers  $(u, p, \alpha)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Nous présentons maintenant les schémas des preuves des théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 en mettant en évidence les points clés qui permettent d'obtenir ces résultats.

### 3.5 Schéma de la preuve du théorème 3.4.1

Pour prouver l'existence d'une solution au problème non linéaire pénalisé, nous introduisons la suite  $(\alpha^n, u^n, p^n)$  définie par

1.  $\alpha^0 = \tilde{\alpha}_0$  le prolongement par 0 de  $\alpha_0$  hors de  $\Omega \setminus \bar{B}(0)$ ,
2.  $(u^n, p^n)$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \left( 2 \left( \mu_\infty + (\mu_0(\alpha^n) - \mu_\infty) (1 + 2\beta^2(\alpha^n) |D(u_n)|^2)^{q(\alpha^n)/2-1} \right) D(u^n) \right) \\ \quad + \frac{\mathbf{1}_B(t)}{\varepsilon} (u^n - \bar{u}) = f - \nabla p^n \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} u^n = 0 \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ u^n_\perp = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \theta_i u^n_\parallel + (1 - \theta_i) \frac{\partial u^n_\parallel}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_i, \quad i = 1..I, \\ u^n \text{ a des conditions de bord périodiques sinon,} \end{array} \right.$$

3.  $\alpha^{n+1}$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha^{n+1} + u^n \cdot \nabla \alpha^{n+1} - \operatorname{div} \eta \nabla \alpha^{n+1} = 0 \quad \text{dans } O_p^c, \\ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } ([0, T] \times \Gamma) \cup \Sigma, \\ \alpha^{n+1} = 0 \quad \text{dans } O_p, \\ \alpha^{n+1} \text{ a des conditions de bord périodiques sinon,} \\ \alpha^{n+1}(0, \cdot) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}(0), \end{array} \right.$$

On pose  $u^{n+1} = G(u^n)$ .

L'étude de cette suite récurrente nous conduit à étudier le problème de Stokes pénalisé d'une part et le problème de convection-diffusion dans un domaine mobile d'autre part.

Pour le problème de Stokes pénalisé, nous faisons appel à la théorie des espace de Lebesgue d'exposant variable (voir la section 6 en annexe), et nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 3.5.1** *On suppose (H1), (H2), (H3) et (H4).*

*Soit*

- $\varepsilon > 0, \mu_\infty > 0, T > 0,$
- $\mu \in \mathbf{L}^\infty([0, T] \times \Omega)$  tel que pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \Omega, \mu_0(t, x) \geq \mu_\infty,$
- $\beta \in \mathbf{L}^\infty([0, T] \times \Omega)$  tel que pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \Omega, \beta(t, x) \geq 0,$
- $q \in \mathbf{L}^\infty([0, T] \times \Omega)$  tel que pour tout  $t \in [0, T] q(t, \cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$  et  $1 < q^- \leq q^+ \leq 2,$
- $f \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)).$

Il existe alors une unique solution faible  $(u, p)$  au problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(x, u)D(u)) + \frac{\mathbf{1}_{B(t)}}{\varepsilon}(u - \bar{u}) = f - \nabla p & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } [0, T] \times \bar{\Omega}, \\ u_{\perp} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \theta_i u_{\parallel} + (1 - \theta_i) \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_i, \quad i = 1..I, \\ u \text{ a des conditions périodiques sinon,} \end{cases} \quad (3.13)$$

qui satisfait

$$(u, p) \in \mathbf{L}^r([0, T], V(\Omega)) \times \mathbf{L}^r([0, T]; \mathbf{L}_0^2(\Omega))$$

pour tout  $2 \leq r \leq +\infty$ . Nous avons aussi les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \mu_{\infty} \|D(u)\|_{\mathbf{L}^{\infty}([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^{\infty}([0, T]; \mathbf{L}^2(B(\cdot)))}^2 \\ & \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^{\infty}([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^{\infty}([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))} + C' \|f\|_{\mathbf{L}^{\infty}([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \\ & \quad + C'' \max \left( \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^{\infty}(0, T; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))}^2, \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^{\infty}(0, T; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))}^{\frac{3-q^-}{2}} \right) \\ & \mu_{\infty} \|D(u)\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(B(\cdot)))}^2 \\ & \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^{\infty}([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))} + C' \|f\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \\ & \quad + C'' \max \left( \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))}^2, \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^{\frac{3-q^-}{2}}([0, T]; \mathbf{H}^2(B(\cdot)))}^2 \right). \end{aligned}$$

**Preuve :** La preuve se décompose en deux morceaux. Une première partie concerne l'existence et l'unicité de solutions au problème, la seconde porte sur les estimations indépendantes de  $\varepsilon$ .

L'existence et l'unicité des solutions se prouve de façon assez classique à l'aide d'une version non linéaire du théorème de Lax-Milgram (voir [76] section 2.2). Comme la viscosité s'écrit sous la forme d'une loi de Carreau avec  $\mu_{\infty} > 0$ , l'espace naturel pour mener à bien toutes les estimations reste l'espace  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . La partie non-linéaire dans la loi de Carreau s'estime elle aussi sans problème grâce à des résultats classiques sur le  $p$ -laplacien (voir [75]), aux résultats sur les espaces de Lebesgue d'exposant variable (voir annexe 6) et au fait que l'exposant variable  $q$  soit à valeurs dans  $[q^-, q^+] \subset ]1, 2]$ . Ceci nous permet d'estimer aussi les parties non-linéaires dans l'espace  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . L'étude des conditions de bord suit le schéma classique de celles du problème de Stokes.

Les estimations indépendantes de  $\varepsilon$  sont obtenues en prenant comme fonction-test  $u - \tilde{u}$  où  $\tilde{u}(t, \cdot)$  est un prolongement de  $\bar{u}$  bien choisi dans  $\Omega \setminus \bar{B}(t)$  vérifiant les mêmes conditions au bord que  $u$  ainsi que la contrainte de divergence nulle. Pour finaliser les estimations, nous avons besoin d'estimations indépendantes du temps pour le prolongement  $\tilde{u}$ . Celles-ci sont obtenues à l'aide des théorèmes de trace et relèvement dans des domaines ne dépendant pas du temps, appliqué à  $\bar{u}(t, \Psi^{-1}(t, x))$ , bien défini dans le domaine stationnaire  $B$  grâce aux hypothèses H1 et H2. Les bornes indépendantes du temps sont ainsi obtenues grâce à celles que l'on a sur  $\Psi$ . ■

Pour l'équation de convection-diffusion dans un domaine déformable, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.5.2** *Soit  $\sigma > 0$  et  $u \in \mathbf{L}^\infty(0, T; V(\Omega))$ . Soit  $\alpha_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(0))$ . Il existe une unique solution  $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(0, T; H^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  au problème*

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + u \cdot \nabla \alpha - \operatorname{div}(\sigma \nabla \alpha) = 0 & \text{dans } O_p^c, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } ([0, T] \times \Gamma) \cup \Sigma, \\ \alpha \text{ a des conditions périodiques sinon,} \\ \alpha(0, \cdot) = \alpha_0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}(0). \end{cases} \quad (3.12)$$

De plus, si  $\alpha_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))$  alors  $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))) \cap \mathbf{H}^1(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  et il existe des constantes  $C$  et  $C'$  ne dépendant que de  $\Omega$  et  $\eta$  telles que pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, \cdot)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(t))} &\leq C \|\alpha_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))} \exp\left(C't \left(1 + \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}^4\right)\right), \\ \|\alpha\|_{\mathbf{L}^2(0, t; \mathbf{H}^3(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))} &\leq C \|\alpha_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))} \exp\left(C't \left(1 + \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}^4\right)\right). \end{aligned}$$

**Preuve :** Afin de prendre en compte le domaine variable, nous utilisons le difféomorphisme  $\Psi$  défini dans l'hypothèse (H2) afin de réécrire l'équation dans un domaine fixe mais avec un opérateur différentiel qui dépend du temps. On pose  $\beta(t, y) = \alpha(t, \Psi(t, y))$  pour tout  $t \in [0, T]$  et  $y \in \Omega \setminus \bar{B}$ . Dans la suite, on note  $\Psi_t(y)$  à la place de  $\Psi(t, y)$ .  $\beta$  vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \beta + v(t, y) \cdot {}^t J_t(y)^{-1} \nabla \beta - \sigma A(t, y) \beta = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \left( J_t(y)^{-1t} J_t(y)^{-1} \nabla \beta \right) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \left( \partial(\Omega \setminus \bar{B}) \cap \Omega \right) \cup \Gamma, \\ \beta \text{ a des conditions périodiques sinon,} \\ \beta(0, \cdot) = \alpha_0(\Psi_0(\cdot)) & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}. \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $\nu$  est la normale unitaire sortante à  $\Omega \setminus \bar{B}$ ,  $J_t(y)$  est la matrice jacobienne de  $y \mapsto \Psi_t(y)$ ,  $v(t, y) = u(t, \Psi_t(y)) - \partial_t \Psi_t(y)$ ,  ${}^t M$  est la transposée de  $M$  et

$$A(t, y) \beta = \operatorname{div} \left( \mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}}(y) ({}^t J_t(y) J_t(y))^{-1} \nabla \beta \right)$$

Comme  $\Psi$  conserve la mesure des domaines, nous avons  $|\det J_t(y)| = 1$  pour tout  $(t, y) \in [0, T] \times \Omega$  d'où l'expression de l'opérateur  $A$ . Cette hypothèse nous permet de travailler avec des espaces de Lebesgue et de Sobolev classiques plutôt qu'avec des espaces avec un poids dépendant du temps! Cette hypothèse implique également que  $\operatorname{div} J_t^{-1}(y) \partial_t \Psi(t, y) = 0$  pour tout  $(t, y) \in [0, T] \times \Omega \setminus \bar{B}$  et implique que

$$\operatorname{div} (J_t(y)^{-1} v(t, y)) = 0.$$

Nous ne pouvons pas utiliser ici la méthode de Galerkin classique car la dépendance en temps des fonctions propres de  $A$  pose problème (problème de régularité en temps,

de croisement des valeurs propres lorsque  $t$  varie, ce qui limiterait le temps d'existence des solutions obtenues par cette méthode). A la place, nous discrétisons en temps cette équation afin d'en trouver une solution : on pose  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $h = \frac{T}{N}$  et  $t^n = nh$ . Nous recherchons alors  $\beta^n(y)$  approximation de  $\beta(t^n, y)$ , solution du schéma numérique implicite suivant :

$$\begin{cases} \frac{\beta^{n+1} - \beta^n}{h} + v^{n+1} \cdot {}^t J_{t^{n+1}}(y)^{-1} \nabla \beta^{n+1} - \sigma A(t^{n+1}, y) \beta^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \left( J_{t^{n+1}}^{-1} {}^t J_{t^{n+1}}(y)^{-1} \nabla \beta^{n+1} \right) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \left( \partial(\Omega \setminus \bar{B}) \cap \Omega \right) \cup \Gamma =: \gamma, \\ \beta^{n+1} \text{ a des conditions périodiques sinon,} \\ \beta^0 = \beta(0, \cdot) = \alpha_0(\Psi_0(\cdot)) & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $v^{n+1}(y) = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (u(t, \Psi_t(y)) - (\partial_t \Psi_t(y))) dt$ .

Nous prouvons alors l'existence de solutions faibles puis fortes à l'aide du théorème de Lax-Milgram et des résultats de régularité classique pour les équations elliptiques.

Nous définissons ensuite par morceaux les fonctions  $\tilde{\beta}^N$  et  $\bar{\beta}^N$  par  $\tilde{\beta}^N = \beta^{n+1}$  et  $\bar{\beta}^N(t, y) = \beta^n(y) + \frac{t - t^n}{h} (\beta^{n+1} - \beta^n)$  pour tout  $y \in \Omega \setminus \bar{B}$  et  $t \in ]t^n, t^{n+1}]$ . Ces fonctions vérifient

$$\partial_t \bar{\beta}^N + \tilde{v}^N \cdot {}^t \tilde{J}_{t,N}^{-1} \nabla \tilde{\beta}^N - \sigma \tilde{A}^N(t, y) \tilde{\beta}^N = 0,$$

où  $\tilde{v}^N$ ,  $\tilde{J}_{t,N}$  et  $\tilde{A}^N$  sont définies par morceaux par  $\tilde{v}^N(t, y) = v^{n+1}(y)$ ,  $\tilde{J}_{t,N}(y) = J_{t^{n+1}}(y)$  et  $\tilde{A}^N(t, y) = A(t^{n+1}, y)$  pour tout  $t \in ]t^n, t^{n+1}]$  et  $y \in \Omega \setminus \bar{B}$ .

Nous prouvons des estimations d'énergie indépendantes de  $N$  qui nous permettent de passer à la limite dans les équations. Une fois l'existence et l'unicité des solutions obtenue, nous pouvons gagner le cran de régularité qui nous manque pour arriver au résultat annoncé.  $\blacksquare$

A l'aide des théorèmes 3.5.1 et 3.5.2, nous montrons que l'opérateur  $G$  définissant la suite récurrente est bien défini de  $E \cap F$  dans lui-même où  $E = \mathbf{L}^\infty(0, T; V(\Omega))$  et  $F = \mathbf{L}^2(0, T; V(\Omega))$ .

Nous avons de plus les estimations suivantes :

- si  $u$  et  $u'$  sont deux solutions de (3.13) associées à  $\alpha$  et  $\alpha'$  respectivement, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\|(u - u')(t, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|(\alpha - \alpha')(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)},$$

où la constante ne dépend que de  $T$ ,  $\Omega$ ,  $f$  et  $\bar{u}$ .

- si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont deux solutions de (3.12) associées respectivement à  $u$  et  $u'$ , pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \|(\alpha - \alpha')(t, \cdot)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(t))}^2 &\leq C \|u - u'\|_{\mathbf{L}^2(0,t; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))}^2 \\ \|\alpha - \alpha'\|_{\mathbf{L}^2(0,t; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))}^2 &\leq C \|u - u'\|_{\mathbf{L}^2(0,t; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))}^2, \end{aligned}$$

où les constantes ne dépendent que de  $\Omega$ ,  $\|\alpha_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}$ ,  $f$ ,  $\bar{u}$  et  $\|\mu\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$

De ces inégalités, nous déduisons que pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons

$$\|G(u) - G(u')\|_{\mathbf{L}^2(0,t;\mathbf{H}^1(\Omega))}^2 \leq Ct^{1/4}\|u - u'\|_{\mathbf{L}^2(0,t;\mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))},$$

d'où l'existence d'un temps  $0 < T^* < T$  tel que pour tout  $0 \leq t \leq T^*$ ,

$$\|G(u) - G(u')\|_{\mathbf{L}^2(0,T^*;\mathbf{H}^1(\Omega))} \leq \frac{1}{2}\|u - u'\|_{\mathbf{L}^2(0,T^*;\mathbf{H}^1(\Omega))}.$$

De plus,  $T^*$  ne dépend que de  $T$ ,  $\Omega$ ,  $O_p$ ,  $f$ ,  $\bar{u}$  et  $\alpha_0$ .

Nous avons également l'inégalité

$$\begin{aligned} \|(\mu(\alpha, u)D(u) - \mu(\alpha', u')D(u'))(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C \left( \| (D(u) - D(u'))(t, \cdot) \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|(\alpha - \alpha')(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

où la constante ne dépend que  $T$ ,  $\Omega$ ,  $O_p$ ,  $f$  et  $\bar{u}$ .

A l'aide de ces inégalités, de la contraction  $G$  et des bornes sur  $\alpha$  et  $u$  obtenues dans les théorèmes 3.5.2 et 3.5.1, nous prouvons l'existence d'un point fixe pour  $G$  et la convergence, à extraction près, de la suite dans les espaces souhaités. Les résultats de compacité classiques sur les espaces de Sobolev ainsi que le théorème d'Aubin-Simon permettent d'obtenir les convergences fortes pour passer à la limite dans les équations et obtenir une solution sur  $[0, T^*]$ .

La clé pour obtenir l'existence jusqu'à l'instant  $T$  réside dans les estimations sur  $T^*$ . Celui-ci ne dépend en effet que des données du problème, en particulier des estimations obtenues pour  $\alpha$  dans le théorème 3.5.2

$$\|\alpha\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))} \leq C\|\alpha_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))} \exp\left(C'TP\left(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}^2\right) ds\right),$$

où  $P(x) = 1 + x + x^2$  et les estimations sur  $u$  ne dépendent que des données du problème (Th. 3.5.1). En bornant  $\|\alpha_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))}$  avec cette estimation, quitte à prendre un temps  $T^*$  plus petit pour satisfaire les contraintes précédentes, nous obtenons que  $\alpha$  est borné dans  $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  et  $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$  est borné dans  $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  donc  $\alpha \in \mathcal{C}([0, T^*]; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  grâce au théorème d'Aubin-Simon appliqué à  $\beta(t, y) = \alpha(t, \Psi_t(y))$ . Cela implique que  $\alpha(0, \cdot) = \alpha_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))$  et  $\alpha(T^*, \cdot) \in \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(T^*))$ .  $\|\alpha(T^*, \cdot)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}$  satisfait alors la même borne que  $\|\alpha_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(0))}$ . Nous appliquons alors les mêmes estimations, mais en partant du temps  $T^*$  pour obtenir existence et unicité d'une solution sur  $(T^*, 2T^*)$  et par récurrence sur  $(0, T)$ .

### 3.6 Schéma de la preuve du théorème 3.4.2

Nous avons prouvé pour le théorème 3.4.1 que

- $\alpha^\varepsilon$  est bornée indépendamment de  $\varepsilon$  dans les espaces  $\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$ ,  $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  et  $\mathbf{H}^1(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$ , ce qui implique aussi que  $\alpha^\varepsilon$  et  $\nabla \alpha^\varepsilon$  sont bornés indépendamment de  $\varepsilon$  dans in  $\mathbf{H}^1(O_p^c)$ ,
- $u^\varepsilon$  est borné dans  $\mathbf{L}^q(0, T; V(\Omega))$  pour tout  $2 \leq q \leq +\infty$ ,
- $\varepsilon^{-1} \|u^\varepsilon - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^q(0, T; B(\cdot))}^2$  est borné pour tout  $2 \leq q \leq +\infty$ .

A extraction d'une sous-suite prêt, toujours notée  $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \alpha^\varepsilon)$  nous avons alors

$$\begin{aligned}
\alpha^\varepsilon &\rightharpoonup \alpha && \text{faible } - \star \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))), \\
\alpha^\varepsilon &\rightharpoonup \alpha && \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))), \\
\alpha^\varepsilon &\rightharpoonup \alpha && \text{faiblement dans } \mathbf{H}^1(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot))), \\
\alpha^\varepsilon &\rightarrow \alpha && \text{fortement dans } \mathbf{L}^q(O_p^c) \text{ pour tout } 2 \leq q \leq 4, \\
\nabla \alpha^\varepsilon &\rightarrow \nabla \alpha && \text{fortement dans } \mathbf{L}^q(O_p^c) \text{ pour tout } 2 \leq q \leq 4, \\
u^\varepsilon &\rightharpoonup u && \text{faiblement dans } \mathbf{L}^q(0, T; V(\Omega)) \text{ pour tout } 2 \leq q < +\infty, \\
u^\varepsilon &\rightharpoonup u && \text{faible } - \star \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0, T; V(\Omega)), \\
u^\varepsilon &\rightarrow \bar{u} && \text{fortement dans } \mathbf{L}^q(0, T; \mathbf{L}^2(B(\cdot))) \text{ pour tout } 2 \leq q \leq +\infty,
\end{aligned}$$

Les convergences fortes et faibles énoncées précédemment permettent de passer à la limite dans la formulation faible de l'équation de convection-diffusion, mais aussi dans les conditions de bord et la donnée initiale. De plus, nous obtenons une convergence forte de  $\alpha^\varepsilon$  dans  $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$  et dans  $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega \setminus \bar{B}(\cdot)))$ .

De même, les résultats précédents permettent de passer à la limite dans tous les termes du problème de Stokes. La convergence forte obtenue pour  $\alpha^\varepsilon$  et des résultats classiques sur les opérateurs non linéaires (pseudo-monotonie) permettent de montrer que l'équation de Stokes non-linéaire est bien satisfaite par  $u$  et  $p$ .

Enfin, une adaptation des estimations effectuées pour le point fixe dans le théorème précédent nous donne l'unicité des solutions.

### 3.7 Perspectives

Cette étude concernant le caractère bien-posé des problèmes étudiés montre la complexité et la diversité des outils requis lorsque l'on s'attaque à des cas issus du réel. Les modèles utilisés sont toutefois encore très simples.

Une première amélioration de ce travail consiste à inclure un couplage two-ways dans le modèle. Le domaine se déforme alors sous l'effet de force intérieure et de la résistance que lui oppose le fluide. Il devient donc une nouvelle inconnue du problème, régie par son propre jeu d'équations couplées au reste du modèle.

Une seconde extension de ce système d'équations aux dérivées partielles consiste à remplacer les conditions de bord par des conditions de bord non-linéaires. Ces dernières sont d'un intérêt fondamental dans le cadre de l'écoulement de polymères, en particulier dans le régime visco-plastique. On peut également remplacer une des conditions de bord

par un problème de surface libre, particulièrement dans le cas de l'écoulement de mucus dans les poumons.

On s'intéresse également au caractère bien-posé des équations quand la diffusion  $\sigma$  dépend de la vitesse  $u$ , modélisant ainsi la dispersion du front entre le fluide et le polymère comme cela a été mis en évidence dans [43] par exemple.

Une dernière généralisation naturelle de ce système consiste à introduire une relaxation en temps (Maxwell ou Oldroyd) dans l'équation de Stokes. En particulier, une perspective intéressante serait de considérer une relaxation en temps avec une contrainte d'ordre deux comme celle décrite par le modèle de Giesekus [89]. Cela permet de décrire une grande variété de fluides viscoélastiques au moyen de deux paramètres.



## Chapitre 4

# Schémas numériques pour des équations dispersives

Dans le cadre d'une récente collaboration avec Christophe Besse et Pascal Noble (IMT), je me suis intéressé aux équations dispersives, et plus particulièrement à leur résolution numérique. Afin de pouvoir étudier les phénomènes dispersifs (chocs en particulier), nous voulions avoir des données expérimentales, d'où la nécessité de résoudre précisément les équations dispersives. Nous nous sommes restreints dans un premier temps à des problèmes linéaires (équation KdV et KdV-BBM linéarisées, voir [A10]).

### 4.1 Introduction

L'équation de Korteweg-de Vries (KdV) est une équation classique, non-linéaire et dispersive qui modélise la propagation unidirectionnelle d'ondes longues faiblement non linéaires en présence de dispersion. Elle s'écrit :

$$\partial_t u + \partial_x u + \frac{3\eta}{2} u \partial_x u + \frac{\mu}{6} \partial_{xxx} u = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

où  $\eta > 0$  est la paramètre de non-linéarité,  $\mu$  est le paramètre de dispersion et  $\eta, \mu$  sont de même ordre de grandeur (voir [74] pour plus de détails sur la dérivation de cette équation particulière). Un modèle alternatif possédant de meilleures propriétés dispersives est obtenu en remarquant que, quand  $\eta, \mu \rightarrow 0$ ,  $\partial_x u = -\partial_t u + O(\eta + \mu)$ . Ceci nous permet de substituer une dérivée en temps à une dérivée en espace dans le terme dispersif. (4.1) est alors asymptotiquement équivalente à

$$\partial_t (u - \alpha \partial_{xx} u) + \partial_x u + \frac{3\eta}{2} u \partial_x u + \left(\frac{\mu}{6} - \alpha\right) \partial_{xxx} u = 0, \quad \forall 0 < \alpha \leq \frac{\mu}{6}. \quad (4.2)$$

Si  $\alpha = \mu/6$ , l'équation ainsi obtenue est appelée équation de Benjamin-Bona-Mahoney (BBM). Nous noterons (KdV-BBM) le modèle mixte (4.2). Les équations (KdV) et (KdV-BBM) possèdent toutes deux des solutions sous forme d'ondes solitaires et cnoïdales (périodiques) et il est particulièrement important d'étudier l'interaction entre ces

ondes et de déterminer si elles jouent un rôle dans la description des solutions de (4.1) ou (4.2) pour des temps asymptotiquement grands.

En effet, pour des solutions variant lentement (à la fois en espace et en temps) l'équation (KdV) peut-être vue comme une régularisation dispersive de l'équation de Burgers

$$\partial_t u + \partial_x u + \frac{3\eta}{2} u \partial_x u = 0.$$

Les régularisations dispersives de lois de conservation peuvent générer ce que l'on appelle des ondes de choc dispersives (DSW). Au contraire de leurs alter-égos diffusifs, les chocs dispersifs ont une structure oscillante et la largeur de la région oscillante croît avec le temps de sorte que les conditions de saut de Rankine-Hugoniot ne sont plus satisfaites. Il existe une énorme littérature sur ce modèle particulier pour l'équation de Korteweg-de Vries. La simulation numérique de tels modèles est difficile : habituellement, ces équations sont résolues au moyen de techniques spectrales, particulièrement adaptées à la description de phénomènes oscillants, mais qui nécessitent des conditions de bord périodiques aux extrémités du domaine de calcul. De plus, comme la partie oscillante du choc dispersif (DSW) croît au cours du temps, il est nécessaire de prendre des domaines de calcul de plus en plus grand, ce qui augmente les coûts de calcul. Il faut aussi mentionner que la dynamique des équations dispersives dépend du fait qu'elles soient résolues dans l'espace tout entier ou dans un domaine périodique : dans ce dernier cas, les ondes de faible amplitude ne peuvent plus diffuser à l'infini et restent indéfiniment dans le domaine de calcul.

Une stratégie plus appropriée consiste à utiliser des conditions de bord transparentes (TBC) : c'est-à-dire à obtenir des conditions au bord telles que la solution obtenue dans le domaine de calcul soit une approximation de la solution exacte restreinte au domaine de calcul. Ces conditions de bord artificielles sont appelées conditions de bord absorbantes (ABC) si elles permettent d'obtenir un problème bien posé dans lequel de l'énergie est absorbée aux bords. Nous renvoyons à [7] pour une revue des techniques utilisées pour construire de telles conditions transparentes ou artificielles au bord dans le cas de l'équation de Schrödinger.

Nous nous sommes intéressés dans [A10] à l'équation (4.2) linéarisée autour d'un état constant  $u = U$ . Cela conduit à l'équation de KdV-BBM linéarisée

$$\partial_t(u - \alpha \partial_{xx} u) + c \partial_x u + \varepsilon \partial_{xxx} u = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

où  $\alpha, \varepsilon = \mu/6 - \alpha > 0$  sont les paramètres de dispersion et  $c = (1 + 3\eta \frac{U}{2})$  la vitesse. Le calcul des conditions au bord transparentes pour les cas continu et discret a été effectué récemment dans le cas purement (BBM) ( $\varepsilon = 0$ ) dans [17]. Dans le cas purement (KdV) ( $\alpha = 0$ ), les conditions de bord transparentes continues ont été obtenues dans [95, 96]. Récemment, les conditions de bord transparentes, continues et discrètes, ont été obtenues et implémentées dans [16]. Les conditions de bord discrètes ont été dérivées pour une discrétisation spatiale décentrée amont (premier ordre) et centrée (second ordre). La discrétisation temporelle est basée sur le schéma de Crank-Nicolson. Les conditions de bord discrètes artificielles (DTBC) avaient été précédemment introduites dans [11, 10,

54, 55, 53] principalement pour l'équation de Schrödinger instationnaire. Ces (DTBC) sont meilleures car elles sont, par construction, parfaitement adaptées au schéma utilisé à l'intérieur du domaine et préservent les propriétés de stabilité de la méthode de discrétisation et ne produisent donc théoriquement pas de réflexion au bord. Toutefois, dans le cas de l'équation de (KdV) linéarisée les conditions au bord ne sont pas explicites et nécessitent une  $\mathcal{Z}$ -transformée inverse numérique (un analogue discret de la transformée de Laplace inverse) qui, elle, produit une erreur numérique et crée des instabilités en temps long (voir [11, 97]).

Notre objectif est de proposer une procédure alternative qui permet de calculer numériquement la  $\mathcal{Z}$ -transformée inverse et d'obtenir des conditions au bord transparentes sans restriction sur le temps de simulation (voir [A10]). Dans la section 4.2, nous rappelons tout d'abord la dérivation de conditions de bord transparentes pour l'équation linéarisée (KdV-BBM) et prouvons un résultat de stabilité. Dans la section 4.3, nous intéressons aux conditions de bord transparentes discrètes : nous prouvons la consistance de ces conditions et fournissons des conditions de stabilité suffisantes qui garantissent la convergence dans le schéma numérique. Dans la section 4.4, nous procédons à des tests numériques en utilisant pour donnée initiale le cas gaussien et celui du paquet d'onde. Pour de grands temps de simulations, nous dérivons également des conditions de bord discrètes explicites et montrons leur stabilité numérique.

## 4.2 Conditions de bord transparentes pour l'équation KdV-BBM linéarisée

Nous rappelons tout d'abord comment obtenir la dérivation des conditions de bord artificielles exactes. Dans ce cadre, nous considérons le problème suivant

$$\partial_t(u - \alpha \partial_{xx}u) + c \partial_x u + \varepsilon \partial_{xxx}u = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) = 0, \quad (4.6)$$

où  $u_0$  est à support compact dans l'intervalle borné de calcul  $[x_\ell, x_r]$  avec  $x_\ell < x_r$ . Les constantes  $c \in \mathbb{R}$  et  $\alpha, \varepsilon > 0$  sont respectivement la vitesse et les deux paramètres de dispersion. La construction de conditions de bord artificielles continues associées aux problèmes (4.4)-(4.6) se fait en considérant le problème sur le complémentaire de  $[x_\ell, x_r]$

$$\partial_t(u - \alpha \partial_{xx}u) + c \partial_x u + \varepsilon \partial_{xxx}u = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x < x_\ell, \quad \forall x > x_r, \quad (4.7)$$

$$u(0, x) = 0, \quad \forall x < x_\ell, \quad \forall x > x_r, \quad (4.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) = 0. \quad (4.9)$$

### 4.2.1 Conditions de bord exactes

Afin d'obtenir les conditions de bord transparentes, nous écrivons (4.7) comme un système du premier ordre par rapport à la variable  $x$  :

$$\partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon^{-1}\partial_t & -\varepsilon^{-1}c & \alpha\varepsilon^{-1}\partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Le problème étant homogène en temps, nous utilisons la transformée de Laplace. Soit  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})(s, \cdot) = \int_0^\infty e^{-st}(u, v, w)(t, \cdot)dt$  la transformée de Laplace de  $(u, v, w)$  par rapport à la variable temporelle. Alors (4.10) devient le système différentiel classique de premier ordre de paramètre  $s \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(s) > 0$  :

$$\partial_x \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon^{-1}s & -\varepsilon^{-1}c & \alpha\varepsilon^{-1}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} := \mathcal{A}_{\alpha, \varepsilon}(s, c) \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Les solutions générales de ce système d'EDO s'écrivent explicitement sous la forme

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1(s)x} \mathcal{V}_1(s) + e^{\lambda_2(s)x} \mathcal{V}_2(s) + e^{\lambda_3(s)x} \mathcal{V}_3(s), \quad x < x_\ell, \quad x > x_r, \quad (4.12)$$

où  $\lambda_k(s), k = 1, 2, 3$  sont les racines de  $P(s, c, \alpha, \varepsilon, \lambda) = s + c\lambda - \alpha s\lambda^2 + \varepsilon\lambda^3 = 0$  et  $\mathcal{V}_k = (1, \lambda_k, \lambda_k^2)^T$  les vecteurs propres de la matrice  $\mathcal{A}_{\alpha, \varepsilon}(s, c)$  associés aux valeurs propres  $\lambda_k$ .

**Proposition 4.2.1** *pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $\alpha \geq 0$ , les racines  $\lambda_k(s), k = 1, 2, 3$  possèdent la propriété de séparation suivante :*

$$\Re(\lambda_1(s)) < 0, \quad \Re(\lambda_2(s)) > 0, \quad \Re(\lambda_3(s)) > 0, \quad \forall \Re(s) > 0.$$

Nous cherchons maintenant des solutions  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})^T$  telles que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{u}(s, x) = 0$ . Cette condition est vérifiée si on impose que

$$\mathcal{V}_1(s) \wedge \begin{pmatrix} \hat{u}(s, x_r) \\ \hat{v}(s, x_r) \\ \hat{w}(s, x_r) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.13)$$

ce qui nous donne les deux conditions de bord suivantes

$$\partial_x \hat{u}(s, x_r) = \lambda_1(s) \hat{u}(s, x_r), \quad \partial_{xx} \hat{u}(s, x_r) = \lambda_1^2(s) \hat{u}(s, x_r). \quad (4.14)$$

Un argument similaire pour obtenir des solutions  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})^T$  telles que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{u}(s, x) = 0$  nous impose la condition

$$\mathcal{V}_2(s) \wedge \mathcal{V}_3(s) \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}(s, x_\ell) \\ \hat{v}(s, x_\ell) \\ \hat{w}(s, x_\ell) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.15)$$

qui nous donne à son tour la condition de bord suivante :

$$\partial_{xx}\hat{u}(s, x_\ell) - (\lambda_2(s) + \lambda_3(s))\partial_x\hat{u}(s, x_\ell) + \lambda_2\lambda_3\hat{u}(s, x_\ell) = 0.$$

En utilisant les relations entre les racines  $\lambda_i$ , cette condition est équivalente à

$$\partial_{xx}\hat{u}(s, x_\ell) + \left(\lambda_1(s) - \frac{\alpha s}{\varepsilon}\right)\partial_x\hat{u}(s, x_\ell) + \left(\lambda_1(s)^2 - \frac{\alpha s}{\varepsilon}\lambda_1(s) + \frac{c}{\varepsilon}\right)\hat{u}(s, x_\ell) = 0. \quad (4.16)$$

En les réécrivant dans les variables temporelles, ces conditions de bord (4.14) et (4.16) deviennent

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x_r) &= \mathcal{L}^{-1}(\lambda_1(s)) * u(t, x_r), & \partial_{xx} u(t, x_r) &= \mathcal{L}^{-1}(\lambda_1^2(s)) * u(t, x_r), \\ \partial_{xx} u(t, x_\ell) + \mathcal{L}^{-1}\left(\lambda_1(s) - \frac{\alpha s}{\varepsilon}\right) * \partial_x u(t, x_\ell) & & & \\ + \mathcal{L}^{-1}\left(\lambda_1(s)^2 - \frac{\alpha s}{\varepsilon}\lambda_1(s)\right) * u(t, x_\ell) + \frac{c}{\varepsilon}u(t, x_\ell) & & & = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Une question naturelle est de savoir si cette procédure de troncature fournit des conditions de bord absorbantes. Nous prouvons le résultat de stabilité  $\mathbf{H}^1$  suivant

**Proposition 4.2.2** *Supposons que*

$$\frac{c}{2} + \varepsilon \left( \Re(\lambda_1^2(i\xi)) - \frac{|\lambda_1(i\xi)|^2}{2} \right) - \alpha \Re(i\xi\lambda_1(i\xi)) \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t(u - \alpha\partial_{xx}u) + c\partial_x u + \varepsilon\partial_{xxx}u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times (x_\ell, x_r), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in (x_\ell, x_r), \\ \partial_x u(t, x_r) = \mathcal{L}^{-1}(\lambda_1(s)) * u(t, x_r), & t \in \mathbb{R}_*^+, \\ \partial_{xx} u(t, x_r) = \mathcal{L}^{-1}(\lambda_1^2(s)) * u(t, x_r), & t \in \mathbb{R}_*^+, \\ \partial_{xx} u(t, x_\ell) + \mathcal{L}^{-1}\left(\lambda_1(s) - \frac{\alpha s}{\varepsilon}\right) * \partial_x u(t, x_\ell) & t \in \mathbb{R}_*^+, \\ + \mathcal{L}^{-1}\left(\lambda_1(s)^2 - \frac{\alpha s}{\varepsilon}\lambda_1(s)\right) * u(t, x_\ell) + \frac{c}{\varepsilon}u(t, x_\ell) = 0, & \end{array} \right. \quad (4.18)$$

est  $H^1$ -stable. Plus précisément, pour tout  $t > 0$ , l'énergie cinétique généralisée vérifie

$$\int_{x_\ell}^{x_r} u^2(t, x) + \alpha(\partial_x u)^2(t, x) dx \leq \int_{x_\ell}^{x_r} u_0^2(x) + \alpha(\partial_x u_0)^2 dx.$$

**Remarque 4.2.1** *La racine  $\lambda_1(s)$  est définie pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 0$ . Nous définissons  $\lambda_1(i\xi)$  avec  $\xi \in \mathbb{R}$  de la façon suivante*

$$\lambda_1(i\xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \lambda_1(\eta + i\xi).$$

**Proposition 4.2.3** *La condition de stabilité donnée dans la proposition 4.2.2 est toujours vérifiée :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \frac{c}{2} + \varepsilon \left( \Re(\lambda_1^2(i\xi)) - \frac{|\lambda_1(i\xi)|^2}{2} \right) - \alpha \Re(i\xi\lambda_1(i\xi)) \geq 0.$$

**Preuve :** On pose  $\lambda_1(i\xi) = a + ib$ . Cela nous permet de réinterpréter la condition de stabilité. En posant  $s = \eta + i\xi$ , on procède à un développement asymptotique de  $\lambda_1$  quand  $\eta$  tend vers zéro. Cela nous fournit des informations supplémentaires sur  $a$  et  $b$  qui nous permettent de conclure suite à l'étude de tous les cas possibles. ■

### 4.3 Conditions de bord transparentes discrètes

Il n'est pas possible de calculer explicitement la transformée de Laplace inverse de  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , ce qui ne permet pas d'obtenir une formulation pratique des conditions de bord. Il est donc difficile de discrétiser les conditions de bord transparentes (4.17) sans autre information. Dans [16] et [17], la construction des conditions de bord discrètes transparentes pour l'approximation de l'équation linéarisée de Korteweg-de Vries (lKdV) ( $\alpha = 0$ ) et l'équation linéarisée de Benjamin-Bona-Mahoney (IBBM) ( $\varepsilon = 0$ ) est effectuée sur les schémas numériques discrétisés. Dans le cas (IBBM), l'opérateur différentiel spatial est d'ordre deux et il est possible de donner une formulation explicite à la fois aux conditions de bord transparentes continues et discrètes. Ce n'est pas le cas lorsque l'on traite le cas (lKdV) où l'opérateur différentiel est d'ordre 3. Dans le cas continu, nous n'avons pas accès explicitement à la transformée de Laplace inverse explicite. Nous rencontrons ce problème également au niveau discret où une procédure numérique est utilisée pour calculer numériquement la  $\mathcal{Z}$ -transformée inverse. En effet, elle requiert une implémentation en quadruple précision pour éviter des instabilités en temps grand (voir [16] pour plus de détails). Nous proposons ici une approche alternative pour inverser numériquement la  $\mathcal{Z}$ -transformée qui permet de construire "explicitement" les coefficients des noyaux discret.

#### 4.3.1 Construction et calcul des conditions de bord transparentes discrètes

Nous construisons ici les conditions de bord transparentes discrètes associées à la discrétisation Crank-Nicolson centrée de l'équation linéarisée de KdV-BBM :

$$\begin{aligned} & u_j^{n+1} - u_j^n - \lambda_B \left( u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^n + 2u_j^n - u_{j-1}^n \right) \\ & + \frac{\lambda_H}{4} \left( u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} \right) + \frac{\lambda_H}{4} \left( u_{j+1}^n - u_{j-1}^n \right) \\ & + \frac{\lambda_D}{4} \left( u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1} \right) \\ & + \frac{\lambda_D}{4} \left( u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n \right) = 0, \quad \forall j = 0, \dots, J, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où

$$\lambda_H = \frac{c\delta t}{\delta x}, \quad \lambda_D = \frac{\varepsilon\delta t}{\delta x^3}, \quad \lambda_B = \frac{\alpha}{\delta x^2}.$$

Nous avons noté  $\delta t > 0$  le pas de temps et  $\delta x > 0$  le pas d'espace. Nous posons  $J = (x_r - x_\ell)/\delta x$ . L'approximation de la solution exacte  $u(t, x)$  aux points  $j\delta x$  et aux instants  $n\delta t$  avec  $0 \leq j \leq J$  et  $n \in \mathbb{N}$  est  $u_j^n \approx u(n\delta t, x_\ell + j\delta x)$ .

Afin d'obtenir les conditions de bord artificielles appropriées nous suivons la même procédure que dans la section 4.2, mais au niveau discret. Nous appliquons au schéma (4.19) la  $\mathcal{Z}$ -transformée par rapport à l'indice de temps  $n$ , ce qui est l'analogie discret de la transformée de Laplace en temps. La  $\mathcal{Z}$ -transformée est définie par

$$\hat{u}(z) = \mathcal{Z}\{(u^n)_n\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k z^{-k}, \quad |z| > R > 0,$$

où  $R$  est le rayon de convergence de la série de Laurent et  $z \in \mathbb{C}$ . En notant  $\hat{u}_j = \hat{u}_j(z)$  la  $\mathcal{Z}$ -transformée de la suite  $(u_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , nous obtenons à partir de (4.19) l'équation homogène aux différences d'ordre 4

$$\begin{aligned} \hat{u}_{j+2} - \left(2 - \frac{\lambda_H}{\lambda_D} + \frac{4\lambda_B}{\lambda_D} \frac{z-1}{z+1}\right) \hat{u}_{j+1} + \left(\frac{4}{\lambda_D} + \frac{8\lambda_B}{\lambda_D}\right) \frac{z-1}{z+1} \hat{u}_j \\ + \left(2 - \frac{\lambda_H}{\lambda_D} - \frac{4\lambda_B}{\lambda_D} \frac{z-1}{z+1}\right) \hat{u}_{j-1} - \hat{u}_{j-2} = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence linéaire est donné par

$$P(r) = r^4 - (2 - a + \mu p(z))r^3 + \left(\frac{4a}{\lambda_H} + 2\mu\right)p(z)r^2 + (2 - a - \mu p(z))r - 1 = 0. \quad (4.21)$$

où

$$a = \frac{\lambda_H}{\lambda_D}, \quad \mu = \frac{4\lambda_B}{\lambda_D}, \quad p(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Comme dans le cadre continu, nous avons une propriété de séparation des racines  $r_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  :

**Proposition 4.3.1** *Supposons  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\delta x, \delta t > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors, les racines de  $P$  sont bien séparées :*

$$|r_1(z)| < 1, \quad |r_2(z)| < 1, \quad |r_3(z)| > 1, \quad |r_4(z)| > 1$$

ce qui définit une propriété de séparation discrète. En conséquence, il existe une paramétrisation régulière du sous-espace "stable" (resp. instable)  $\mathbb{E}^s(z)$  (resp.  $\mathbb{E}^u(z)$ ) des solutions de (4.20) qui décroît vers zéro quand  $j \rightarrow +\infty$  (resp.  $j \rightarrow -\infty$ ) pour  $|z| > R$  avec  $R$  suffisamment grand.

Suite à cette proposition, nous posons

$$S^s(z) = r_1(z) + r_2(z), \quad P^s(z) = r_1(z)r_2(z), \quad S^u(z) = r_3(z) + r_4(z), \quad P^u(z) = r_3(z)r_4(z)$$

et le polynôme caractéristique  $P$  admet la factorisation

$$P(r) = \left(r^2 - S^u(z)r + P^u(z)\right) \left(r^2 - S^s(z)r + P^s(z)\right)$$

Les conditions de bord transparentes discrètes s'écrivent alors comme suit. Sur la frontière gauche, nous avons :

$$(\hat{u}_{-2}, \hat{u}_{-1}, \hat{u}_0, \hat{u}_1) \in \mathbb{E}^u(z)$$

qui est aussi équivalent aux conditions aux limites suivantes

$$\hat{u}_1 - S^u(z) \hat{u}_0 + P^u(z) u_{-1} = 0, \quad \hat{u}_0 - S^u(z) \hat{u}_{-1} + P^u(z) u_{-2} = 0. \quad (4.22)$$

D'autre part, nous avons sur le bord droit :

$$(\hat{u}_{J-1}, \hat{u}_J, \hat{u}_{J+1}, \hat{u}_{J+2}) \in \mathbb{E}^s(z)$$

qui s'écrit aussi

$$\hat{u}_{J+2} - S^s(z) \hat{u}_{J+1} + P^s(z) \hat{u}_J = 0, \quad \hat{u}_{J+1} - S^s(z) \hat{u}_J + P^s(z) \hat{u}_{J-1} = 0. \quad (4.23)$$

Les coefficients de  $P$  admettent une singularité en  $z = -1$ , ce qui induit un mauvais comportement des coefficients dans le développement de  $S^u, P^u, S^s, P^s$ . Afin de se débarrasser de cette singularité artificielle, nous considérons des conditions de bord alternatives en multipliant (4.23) et (4.22) par  $1 + z^{-1}$ . En inversant la  $\mathcal{Z}$ -transformée, nous obtenons que les conditions de bord à gauche et à droite s'écrivent :

$$u_1^{n+1} + u_1^n + \tilde{s}^u *_d u_0^{n+1} + \tilde{p}^u *_d u_{-1}^{n+1} = 0, \quad u_0^{n+1} + u_0^n + \tilde{s}^u *_d u_{-1}^{n+1} + \tilde{p}^u *_d u_{-2}^{n+1} = 0, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} u_{J+2}^{n+1} + u_{J+2}^n + \tilde{s}^s *_d u_{J+1}^{n+1} + \tilde{p}^s *_d u_J^{n+1} &= 0, \\ u_{J+1}^{n+1} + u_{J+1}^n + \tilde{s}^u *_d u_J^{n+1} + \tilde{p}^u *_d u_{J-1}^{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

où les suites  $\tilde{S}^u, \tilde{P}^u$  et  $\tilde{S}^s, \tilde{P}^s$  sont définies par

$$\begin{aligned} \tilde{S}^s(z) &= (1 + z^{-1})S^s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{s}_n^s}{z^n}, & \tilde{P}^s(z) &= (1 + z^{-1})P^s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{p}_n^s}{z^n}, \\ \tilde{S}^u(z) &= (1 + z^{-1})S^u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{s}_n^u}{z^n}, & \tilde{P}^u(z) &= (1 + z^{-1})P^u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{p}_n^u}{z^n}. \end{aligned}$$

Les relations (4.24) et (4.25) permettent de calculer les valeurs fantômes  $u_{-2}, u_{-1}, u_{J+1}$  et  $u_{J+2}$ . Il reste maintenant à calculer les coefficients  $\tilde{s}_n^u, \tilde{p}_n^u, \tilde{s}_n^s, \tilde{p}_n^s$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour l'équation de Schrödinger [11, 97] et l'équation (1KdV) ( $\alpha = 0$ ) [16], la procédure numérique pour calculer les coefficients est la suivante : si on pose  $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^{-k}$  pour tout  $|z| > R$ , les coefficients  $u_k$  sont obtenus via la formule

$$v_n = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(r e^{i\phi}) e^{in\phi} d\phi, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour  $r > R$  et les approximations de ces intégrales sont effectuées grâce à la transformée de Fourier rapide. Dans [11, 97, 16], nous avons  $R = 1$  donc la procédure numérique est instable quand  $n \rightarrow \infty$  à cause des erreurs de troncature. Nous proposons ici une

approche différente basée sur l'utilisation des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Nous posons  $x = z^{-1}$  et nous devons résoudre le système suivant

$$\begin{aligned}
S^s(x) + S^u(x) &= 2 - a + \mu \frac{1-x}{1+x}, \\
P^u(x) + P^s(x) + S^u(x)S^s(x) &= \left( \frac{4a}{\lambda_H} + 2\mu \right) \frac{1-x}{1+x}, \\
P^u(x)S^s(x) + P^s(x)S^u(x) &= - \left( 2 - a - \mu \frac{1-x}{1+x} \right), \\
P^u(x)P^s(x) &= -1.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous calculons à la place un développement de  $\tilde{S}^u, \tilde{S}^s, \tilde{P}^u, \tilde{P}^s$  : le système vérifié par ces quantités est donné par

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^s(x) + \tilde{S}^u(x) &= (2-a)(1+x) + \mu(1-x), \\
(1+x)\tilde{P}^u(x) + (1+x)\tilde{P}^s(x) + \tilde{S}^u(x)\tilde{S}^s(x) &= \left( \frac{4a}{\lambda_H} + 2\mu \right) (1-x^2), \\
\tilde{P}^u(x)\tilde{S}^s(x) + \tilde{P}^s(x)\tilde{S}^u(x) &= - \left( (2-a)(1+x)^2 - \mu(1-x^2) \right), \\
\tilde{P}^u(x)\tilde{P}^s(x) &= -(1+x)^2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Les coefficients satisfont maintenant pour tout  $n \geq 1$  la relation de récurrence linéaire :

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_n^s + \tilde{s}_n^u &= \sigma_1^n, \\
\tilde{p}_n^u + \tilde{p}_n^s + \tilde{s}_0^s \tilde{s}_n^u + \tilde{s}_n^s \tilde{s}_0^u &= \sigma_2^n - \tilde{p}_{n-1}^u - \tilde{p}_{n-1}^s - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{s}_k^s \tilde{s}_{n-k}^u, \\
\tilde{s}_0^s \tilde{p}_n^u + \tilde{s}_n^s \tilde{p}_0^u + \tilde{p}_0^s \tilde{s}_n^u + \tilde{p}_n^s \tilde{s}_0^u &= \sigma_3^n - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{s}_k^s \tilde{p}_{n-k}^u - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{p}_k^s \tilde{s}_{n-k}^u, \\
\tilde{s}_0^s \tilde{p}_n^u + \tilde{s}_n^s \tilde{p}_0^u &= \sigma_n^4 - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{p}_k^s \tilde{p}_{n-k}^u.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

où les coefficients pour  $n = 0$  vérifient le système non-linéaire :

$$\tilde{s}_0^s + \tilde{s}_0^u = \sigma_1^0, \quad \tilde{p}_0^s + \tilde{p}_0^u + \tilde{s}_0^s \tilde{s}_0^u = \sigma_2^0, \quad \tilde{p}_0^u \tilde{s}_0^s + \tilde{p}_0^s \tilde{s}_0^u = \sigma_3^0, \quad \tilde{p}_0^s \tilde{p}_0^u = \sigma_4^0. \tag{4.29}$$

Les suites  $\sigma_k, k = 1, 2, 3, 4$  sont données par

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (2-a+\mu)\delta_0 + (2-a-\mu)\delta_1, \quad \sigma_2 = \left( \frac{4a}{\lambda_H} + 2\mu \right) (\delta_0 - \delta_2), \\
\sigma_3 &= -(2-a-\mu)\delta_0 - 2(2-a)\delta_1 - (2-a+\mu)\delta_2, \quad \sigma_4 = -\delta_0 - 2\delta_1 - \delta_2.
\end{aligned}$$

Le système non-linéaire est résolu numériquement en calculant les racines de  $P$  pour  $z^{-1} = x = 0$  et la relation de récurrence (4.28) est directement implémentée. Elle requiert l'inversion d'une matrice  $4 \times 4$  dont l'inversibilité est assurée par la séparation des racines quand  $x = 0$ . Nous traçons les  $\tilde{s}_n^s$  sur les courbes de gauche de la figure 4.1 où nous voyons qu'elles décroissent en  $n^{-3/2}$  comme dans le cas BBM ou pour l'équation de Schrödinger [54].

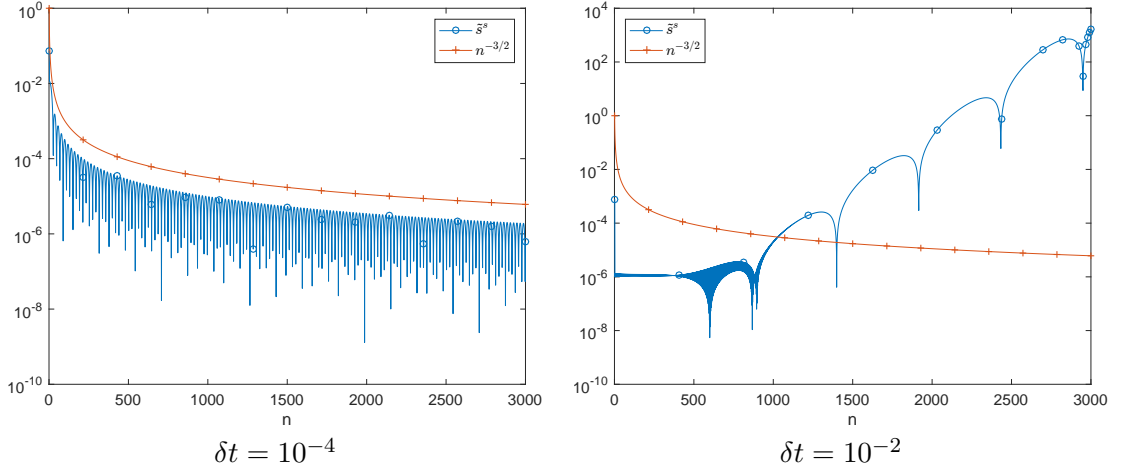


FIGURE 4.1 – Coefficients  $\tilde{s}_n^s$  avec  $\delta x = 2^{-18}$ ,  $\alpha = \delta = 1$  et  $c = 2$

Toutefois, dans la limite  $\delta x \rightarrow 0$ , les racines de  $P$  ne sont plus séparées, ce qui implique que le système linéaire à résoudre dans la procédure est mal conditionné (le déterminant de la matrice tend vers 0 quand  $\delta x \rightarrow 0$ ) ce qui augmente l'impact des erreurs numériques : voir les courbes de gauche de la figure 4.1. Remarquons toutefois que ce "mauvais" comportement n'est observé que pour des pas d'espace  $\delta x$  beaucoup plus petits que ceux utilisés dans [16]. Afin de gérer ce problème n'apparaissant que pour des petits pas d'espace  $\delta x$ , nous effectuons un développement asymptotique des coefficients  $\tilde{s}_n^s, \tilde{s}_n^u$  et  $\tilde{p}_n^s, \tilde{p}_n^u$  quand  $\delta x \rightarrow 0$  et tronquons ces estimations à un ordre  $p$  plus grand que 2 afin de préserver la précision du schéma. En supposant  $\alpha > 0$  et dans la limite  $\delta t \rightarrow 0$ , la divergence des coefficients est beaucoup plus forte puisque l'on a facilement le résultat suivant :

$$r_1(z = +\infty) \sim_{\delta t \rightarrow 0} -\frac{\varepsilon \delta t}{4\alpha \delta x}, \quad r_4(z = +\infty) \sim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{4\alpha \delta x}{\varepsilon \delta t}.$$

### 4.3.2 Consistance et stabilité des conditions de bord transparentes discrètes

Nous vérifions ici la consistance des conditions de bord transparentes discrètes et (4.22) et (4.23) par rapport aux conditions de bord continues. En conséquence, nous obtenons un développement asymptotique des coefficients de convolution  $\tilde{s}_n^s, \tilde{s}_n^u$  et  $\tilde{p}_n^s, \tilde{p}_n^u$ . Tout d'abord, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 4.3.2** *Soit  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 0$ . Posons  $z = \exp(s\delta t)$  et  $\mu(z) = \frac{2(z-1)}{\delta t(z+1)}$  et supposons que les racines  $\lambda_i(s)$  sont distinctes. Alors les racines  $r_1, r_2, r_3, r_4$  de l'équation caractéristique (4.21) admettent un développement régulier quand  $\delta t, \delta x \rightarrow 0$  et*

s'écrivent :

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 + \delta x \tilde{\lambda}_1(s, \delta x) = 1 + \delta x \lambda_1(s) + \delta x^2 \lambda_1^1 + \delta x O(\delta x^2 + s^2 \delta t^2), \\ r_2 &= -1 + \frac{\alpha s}{\varepsilon} \delta x - \frac{\alpha^2 s^2}{2\varepsilon^2} \delta x^2 + \delta x O(\delta x^2 + s^2 \delta t^2), \\ r_3 &= 1 + \delta x \tilde{\lambda}_2(s, \delta x) = 1 + \delta x \lambda_2(s) + O(\delta x^2 + s^2 \delta t^2), \\ r_4 &= 1 + \delta x \tilde{\lambda}_3(s, \delta x) = 1 + \delta x \lambda_3(s) + O(\delta x^2 + s^2 \delta t^2). \end{aligned}$$

où

$$\lambda_1^1 = \frac{\lambda_1(s) (\alpha s \lambda_1(s)^2 - 2c \lambda_1(s) + 3s)}{3\lambda_1^2(s) - 2\alpha s \lambda_1(s) + c}.$$

Nous pouvons maintenant vérifier la consistance des conditions de bord transparentes discrètes par rapport à leur version continue. Afin de simplifier la présentation, nous supposons que  $[x_\ell, x_r] = [0, 1]$ .

**Proposition 4.3.3** *Soit  $u$  une solution régulière du système (KdV-BBM) (4.18). Pour tout  $x \in [-2\delta x, 1 + 2\delta x]$ , nous définissons la  $\mathcal{Z}$ -transformée de  $(u(n\delta t, x))_{n \in \mathbb{N}}$  par*

$$\hat{u}(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(n\delta t, x)}{z^n}.$$

Alors, pour tout  $K \subset \mathbb{C}^+$  et tout  $s \in K$ , nous avons pour les conditions de bord à gauche :

$$\begin{aligned} \hat{u}(e^{s\delta t}, \delta x) - S^u(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, 0) + P^u(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, -\delta x) &= \delta x^2 O(\delta t + \delta x), \\ \hat{u}(e^{s\delta t}, 0) - S^u(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, -\delta x) + P^u(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, -2\delta x) &= \delta x^2 O(\delta t + \delta x), \end{aligned}$$

alors qu'à droite

$$\begin{aligned} \hat{u}(e^{s\delta t}, 1 + 2\delta x) - S^s(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, 1 + \delta x) + P^s(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, 1) &= \delta x O(\delta t + \delta x), \\ \hat{u}(e^{s\delta t}, 1 + \delta x) - S^s(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, 1) + P^s(e^{s\delta t})\hat{u}(e^{s\delta t}, 1 - \delta x) &= \delta x O(\delta t + \delta x). \end{aligned}$$

**Remarque 4.3.1** *Notons que la précision est inférieure d'un ordre de grandeur pour la condition de bord droite. Cette perte de précision, provenant d'un mode additionnel bifurquant à partir de  $-1$ , est un artéfact purement numérique.*

Écrivons maintenant un résultat de stabilité pour les conditions de bord transparentes discrètes. A cette fin, nous introduisons  $\mathcal{A}^s(z)$  et  $\mathcal{A}^u(z)$  les matrices hermitiennes

$$\mathcal{A}^s = \begin{pmatrix} \alpha^s(z) & \gamma^s(z) \\ \gamma^s(z) & \beta^s(z) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^u = \begin{pmatrix} \alpha^u(z) & \gamma^u(z) \\ \gamma^u(z) & \beta^u(z) \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha^s(z) &= \frac{|z+1|^2}{2} \Re(-p^s(z)), \\ \beta^s(z) &= \frac{|z+1|^2}{2} \left( \Re(s^s(z))^2 - p^s(z) + (a-2)s^s(z) \right) - \mu \frac{z-\bar{z}}{2i} \Im(s^s(z)), \\ \gamma^s(z) &= \frac{|z+1|^2}{4} \left( \overline{s^s(z)} - s^s(z) \right) p^s(z) - (a-2)p^s(z) - \mu \frac{z-\bar{z}}{2i} \frac{p^s(z)}{2i}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha^u(z) &= \frac{|z+1|^2}{2} \Re(p^u(z)), \\ \beta^u(z) &= \frac{|z+1|^2}{2} \left( \Re(p^u(z) - s^u(z)^2 - (a-2)s^u(z)) - \mu \frac{z-\bar{z}}{2i} \Im(s^u(z)) \right), \\ \gamma^u(z) &= \frac{|z+1|^2}{4} \left( p^u(z)s^u(z) - \overline{s^u(z)} + (a-2)p^u(z) \right) + \mu \frac{z-\bar{z}}{2i} \frac{p^u(z)}{2i}.\end{aligned}$$

**Proposition 4.3.4** *Soit  $u_j^n$  avec  $j \in [-1, J+1]$  et  $n \in \mathbb{N}$  solution de (4.19) avec les conditions de bord transparentes (4.24) et (4.25). Posons  $\mathcal{E}_n$*

$$\mathcal{E}_n = \sum_{j=1}^J \frac{(u_j^n)^2}{2} + \alpha \sum_{j=0}^J \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)^2}{2\delta x^2}. \quad (4.30)$$

*Supposons que pour tout  $\theta \in [-\pi, \pi]$  les matrices hermitiennes  $\mathcal{A}^s(e^{i\theta})$  et  $\mathcal{A}^u(e^{i\theta})$  sont positives. Alors les conditions de bord (4.24) et (4.25) sont dissipatives :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{E}_N - \mathcal{E}_0 = -\mathcal{R}_\ell - \mathcal{R}_r \leq 0$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_r &= \frac{\lambda_D}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \widehat{u_{J-1}}(e^{i\theta}) \\ \widehat{u_J}(e^{i\theta}) \end{pmatrix}; \mathcal{A}^s(e^{i\theta}) \begin{pmatrix} \widehat{u_{J-1}}(e^{i\theta}) \\ \widehat{u_J}(e^{i\theta}) \end{pmatrix} \right\rangle d\theta \geq 0, \\ \mathcal{R}_\ell &= \frac{\lambda_D}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \widehat{u_{-1}}(e^{i\theta}) \\ \widehat{u_0}(e^{i\theta}) \end{pmatrix}; \mathcal{A}^u(e^{i\theta}) \begin{pmatrix} \widehat{u_{-1}}(e^{i\theta}) \\ \widehat{u_0}(e^{i\theta}) \end{pmatrix} \right\rangle d\theta \geq 0.\end{aligned}$$

**Remarque 4.3.2** *Dans le cas purement BBM, les conditions de bord transparentes discrètes sont dissipatives et pour tout  $n \geq 0$ , nous avons  $\mathcal{E}_n \leq \mathcal{E}_0$  (voir [17] pour une preuve). Dans ce cas, on notera que les conditions de bord transparentes n'ajoutent qu'un point fantôme à chaque bord. La dissipativité se prouve en étudiant, à chaque bord, le signe d'une fonction définie sur le cercle unité. Ici, nous voyons que nous avons besoin de vérifier que deux matrices hermitiennes sont positives. La taille des matrices est déterminée par le nombre de points fantômes ajoutés à chaque bord. Ces conditions sont difficilement vérifiables dans le cas général, mais on pourra vérifier numériquement que les conditions de bord sont effectivement dissipatives. Un cadre général pour l'étude de la dissipativité des conditions de bord transparentes pour les équations d'évolution est donné dans [41].*

## 4.4 Résultats numériques

Nous illustrons ici le comportement des solutions numériques de (4.3) quand nous utilisons le schéma numérique (4.19) avec les conditions de bord (4.24) et (4.25).

#### 4.4.1 Cas 1 : conditions de bord transparentes exactes

Le schéma numérique est donné par (4.19) couplé aux conditions de bord (4.24) et (4.25). Afin de vérifier l'ordre du schéma numérique, nous définissons  $e^{(n)}$  l'erreur relative  $\ell^2$  au temps  $t = n\delta t$  donné par :

$$e^{(n)} = \|u_{\text{ref}}(t_n, \cdot) - u^n(\cdot)\|_2 / \|u_{\text{ref}}(t_n, \cdot)\|_2,$$

où  $u^n$  est la solution du schéma numérique. Grâce à la définition de  $e^{(n)}$ , nous travaillons avec la fonction d'erreur donnée par le maximum de  $e^{(n)}$  pour  $0 < n \leq N$

$$\mathcal{E}_P = \max_{0 < n \leq N} (e^{(n)})$$

qui correspond à la version discrète de la fonction d'erreur  $L_t^\infty L_x^2$ . Comme nous travaillons avec le schéma de Crank-Nicolson (4.19), nous devons avoir la borne

$$\mathcal{E}_P \leq C_t \delta t^2 + C_x \delta x^2. \quad (4.31)$$

Nous considérons deux types de données initiales, une Gaussienne et une Gaussienne modulée (ou paquet d'ondes). Les deux conditions initiales que nous considérons s'écrivent :

$$u_{0,G} = \exp\left(-400\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad u_{0,WP} = u_{0,G} \sin(20\pi x).$$

Nous traçons sur la figure 4.2 le comportement de  $\mathcal{E}_P$  lorsque  $\delta x$  varie pour plusieurs valeurs de  $\delta t$  dans quatre cas tests. Dans tous les cas et pour  $\delta x > 5 \cdot 10^{-5}$ , nous retrouvons le comportement d'ordre deux du schéma numérique. Il y a un processus de saturation lié à  $C_t$ . Quand  $\delta x$  est suffisamment petit, le terme dominant dans (4.31) est  $C_t \delta t^2$ . Quand  $\delta x < 5 \cdot 10^{-5}$ , le comportement de  $\mathcal{E}_P$  se détériore et la relation (4.31) n'est plus valide. Ce processus est lié à une singularité  $(\delta x, \delta t)$  des coefficients de convolution  $\tilde{s}^u$ ,  $\tilde{p}^u$ ,  $\tilde{s}^s$  et  $\tilde{p}^s$ . En effet, comme nous l'avons précisé dans la section précédente, la stratégie pour calculer ces coefficients consiste à inverser une matrice  $4 \times 4$  : quand  $\delta x \rightarrow 0$ , le déterminant est d'ordre  $O\left(\frac{c\delta x^2}{\varepsilon} + \frac{\delta x^3}{\varepsilon\delta t}\right)$  ce qui augmente les erreurs numériques lors du calcul des coefficients de convolution. Ce mauvais comportement est toutefois limité quand  $\delta t > 5 \cdot 10^{-5}$ . Un moyen de corriger cette singularité en  $\delta x$  est proposé dans la section suivante. La sous-figure en haut à gauche dans la figure 4.2 doit être comparée à la figure 5 dans [16] qui se limitait à des  $\delta x \approx 10^{-3}$  à cause de l'instabilité de l'inversion de la  $\mathcal{Z}$ -transformée. De plus, l'étude de l'erreur  $\mathcal{E}_P$  pour de très petits  $\delta x$  et  $\delta t$  semble n'avoir jamais été effectuée auparavant dans la littérature (par exemple, le plus petit  $\delta x$  vaut approximativement  $10^{-3}$  avec  $\delta t = 10^{-4}$  dans [7]) et devrait être présente pour d'autres conditions de bord transparentes et d'autres équations. Nous traçons aussi l'évolution de  $\mathcal{E}_P$  par rapport à  $\delta t$  avec  $\delta x = 2^{-14} \approx 6 \cdot 10^{-5}$  pour  $(c = 0, \alpha = \varepsilon = 10^{-3})$  et  $u_0 = u_{0,G}$  sur la figure 4.3 (les résultats dans les autres cas sont similaires). Nous retrouvons bien une erreur d'ordre deux en  $\delta t$ .

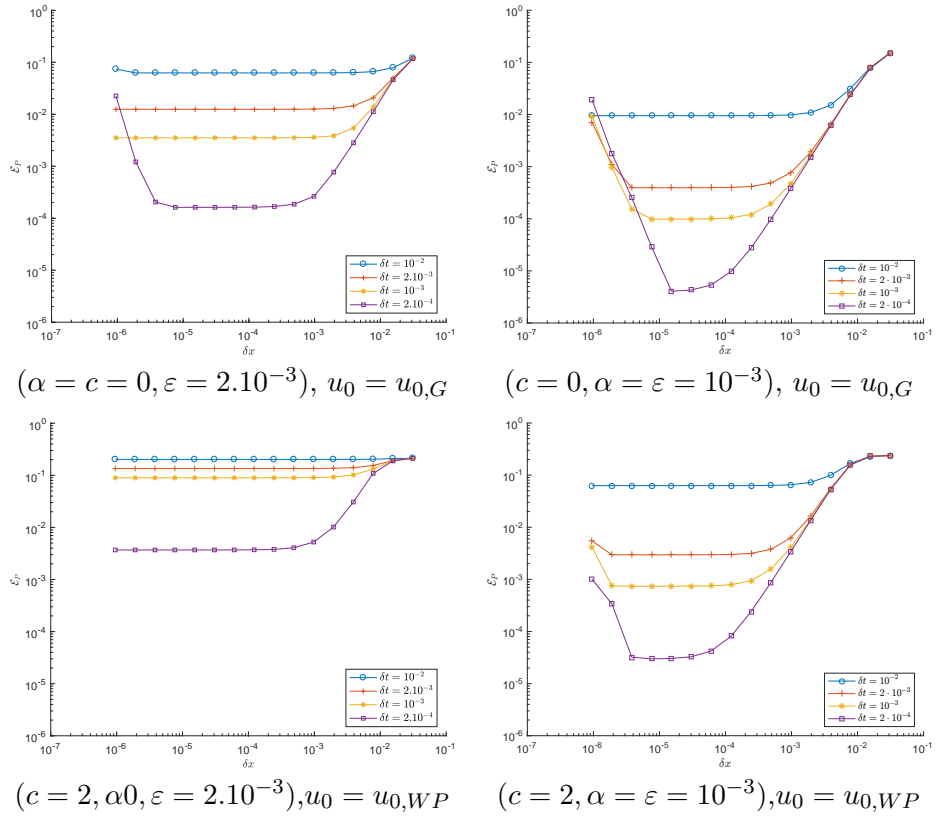


FIGURE 4.2 – Évolution de  $\mathcal{E}_P$  par rapport à  $\delta x$  pour différents  $\delta t$ .

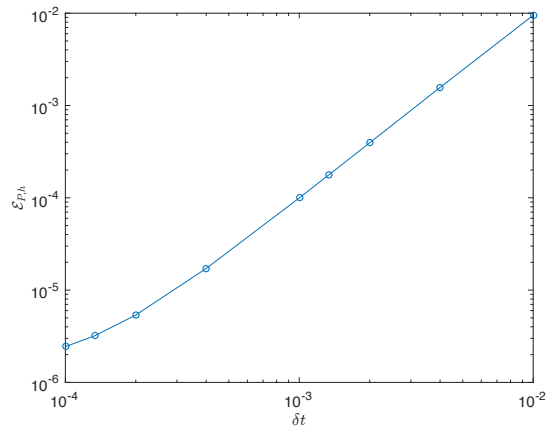


FIGURE 4.3 – Évolution de  $\mathcal{E}_P$  par rapport à  $\delta t$  pour  $\delta x = 2^{-14}$ .

#### 4.4.2 Cas 2 : conditions de bord transparentes discrètes approchées

Nous explorons ici la limite  $\delta x \rightarrow 0$ . Afin de simplifier la discussion, nous travaillons sur l'équation (IKdV) ( $\alpha = 0$ ). Le cas général est présenté dans l'appendice de [A10]. Nous calculons tout d'abord un développement asymptotique des coefficients impliqués dans la formulation des conditions de bord transparentes discrètes (4.24) et (4.25). Nous présentons ensuite différents résultats numériques, en particulier des résultats de convergence afin de vérifier que la méthode de troncature n'induit pas des instabilités numériques et ne détruit pas l'ordre de convergence du schéma.

Rappelons que le problème de l'inversion de la transformée en  $\mathcal{Z}$  dans les conditions de bord transparentes (4.22) et (4.23) revient à développer en série de Laurent les fonctions  $s^s(z), s^u(z), p^s(z), p^u(z)$  données par la relation

$$\begin{aligned} P(r) &= r^4 - 2r^3 + \frac{4\delta x^3}{\varepsilon\delta t} p(z)r^2 + 2r - 1 \\ &= (r^2 - s^s(z)r + p^s(z))(r^2 - s^u(z)r + p^u(z)). \end{aligned}$$

Les racines de  $r^2 - s^s r + p^s$  appartiennent à  $\{r \in \mathbb{C}, |r| < 1\}$  alors que celles de  $r^2 - s^u r + p^u$  sont dans  $\{r \in \mathbb{C}, |r| > 1\}$ . Calculons  $(s^s, p^s, s^u, p^u)$ . Ces fonctions satisfont

$$\begin{cases} s^s + s^u &= 2, \\ s^s s^u + p^s + p^u &= \frac{4\delta x^3}{\varepsilon\delta t} p(z), \\ s^s p^u + s^u p^s &= -2, \\ p^s p^u &= -1. \end{cases} \quad (4.32)$$

Nous recherchons un développement limité de ces quantités quand  $\delta x \rightarrow 0$  sous la forme :

$$s^s = \sum_{k \geq 0} s_k \delta x^k, \quad p^s = \sum_{k \geq 0} p_k \delta x^k, \quad s^u = \sum_{k \geq 0} t_k \delta x^k, \quad p^u = \sum_{k \geq 0} q_k \delta x^k.$$

En substituant ces développements dans (4.32) et en identifiant les termes en  $O(\delta x^n)$  pour  $(n \in \mathbb{N})$ , nous obtenons un système non-linéaire et une suite de systèmes linéaires à résoudre. Tout d'abord, en identifiant le terme d'ordre zéro, nous obtenons le système non-linéaire d'équations :

$$\begin{cases} s_0 + t_0 &= 2, \\ s_0 t_0 + p_0 + q_0 &= 0, \\ s_0 q_0 + t_0 p_0 &= -2, \\ p_0 q_0 &= -1, \end{cases}$$

dont la solution est  $(s_0, p_0, t_0, q_0) = (0, -1, 2, 1)$ . Ensuite, nous identifions les termes d'ordre  $O(\delta x^n)$  pour  $n \geq 1$  et obtenons une famille de systèmes linéaires non inversibles munis d'une condition de compatibilité permettant le calcul de tous les coefficients.

Soit  $\lambda_1$  la racine de  $\lambda_1^3 + \frac{2}{\varepsilon\delta t} p(z) = 0$  dont la partie réelle est négative. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} s^s &= \lambda_1 \delta x + \frac{\lambda_1^2}{2} \delta x^2 + \frac{p}{3\varepsilon\delta t} \delta x^3 + O(\delta x^4), \\ s^u &= 2 - \lambda_1 \delta x - \frac{\lambda_1^2}{2} \delta x^2 - \frac{p}{3\varepsilon\delta t} \delta x^3 + O(\delta x^4), \end{aligned}$$

$$p^s = -1 - \lambda_1 \delta x - \frac{\lambda_1^2}{2} \delta x^2 + \frac{2p}{3\varepsilon \delta t} \delta x^3 + O(\delta x^4),$$

$$p^u = 1 - \lambda_1 \delta x + \frac{\lambda_1^2}{2} \delta x^2 + \frac{2p}{3\varepsilon \delta t} \delta x^3 + O(\delta x^4).$$

Nous devons maintenant inverser la transformée en  $\mathcal{Z}$  de  $z \mapsto \lambda_1(s(z)) = -\left(\frac{2}{\varepsilon \delta t}\right)^{1/3} p(z)^{1/3}$ .  
Notons que

$$p(z)^{k/3} = \frac{(1 - z^{-1})^{k/3}}{(1 + z^{-1})^{k/3}}, \quad \forall |z| > 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En conséquence,  $p(z)^{k/3}$  peut être développé en série de Laurent explicitement et nous permet enfin de formuler les conditions de bord transparentes discrètes approchées en fonction des coefficients des développements asymptotiques en  $\delta x$  des séries de Laurent précédemment obtenues (voir [A10] pour les détails). Pour illustrer numériquement l'efficacité de ces nouveaux coefficients de convolution, nous reproduisons le cas test ( $\alpha = c = 0, \varepsilon = 10^{-3}$ ) avec  $u_0 = u_{0,G}$  et comparons l'évolution de  $\mathcal{E}_P$  sur la figure 4.4. Nous n'utilisons ces coefficients asymptotiques que pour de petites valeurs de  $\delta x$ . Le mauvais comportement de  $\mathcal{E}_P$  est clairement limité quand  $\delta x, \delta x^3/\delta t$  sont très petits.

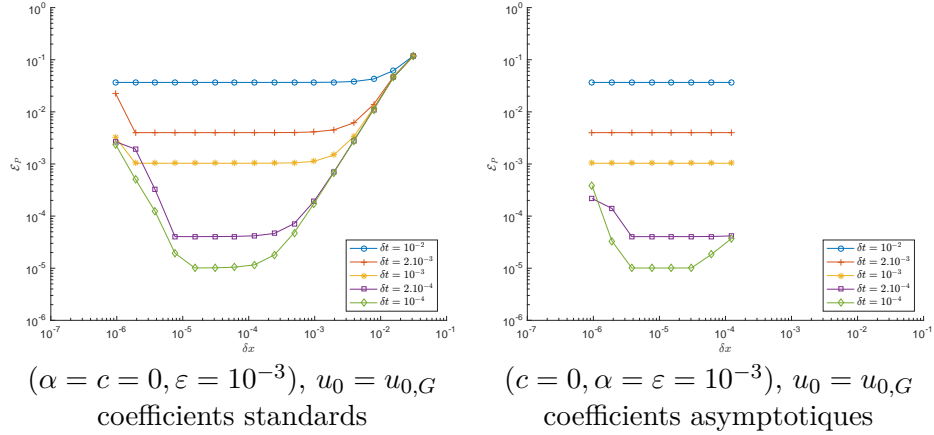


FIGURE 4.4 – Évolution de  $\mathcal{E}_P$  par rapport à  $\delta x$  pour différents  $\delta t$ .

Ces coefficients asymptotiques sont aussi très utiles pour des simulations en temps long. Nous considérons ici  $T = 1000$ ,  $\delta t = 10^{-1}$ ,  $\delta x = 2^{-18}$  et  $u_0 = u_{0,G}$ . Nous voyons sur la figure 4.5 que les coefficients standards n'ont pas la bonne décroissance en  $n^{-3/2}$ . Ce taux est bien préservé par les coefficients asymptotiques. Dans ce cas test, nous présentons l'évolution de la solution avec les coefficients standards et asymptotiques mais aussi l'énergie discrète (4.30) respectivement sur les figures 4.6 et 4.7. Il est évident que le comportement de la solution avec les coefficients standard n'est pas bon puisque la solution ne décroît pas avec le temps et que l'énergie discrète est croissante. Nous obtenons un bon comportement avec les coefficients asymptotiques.

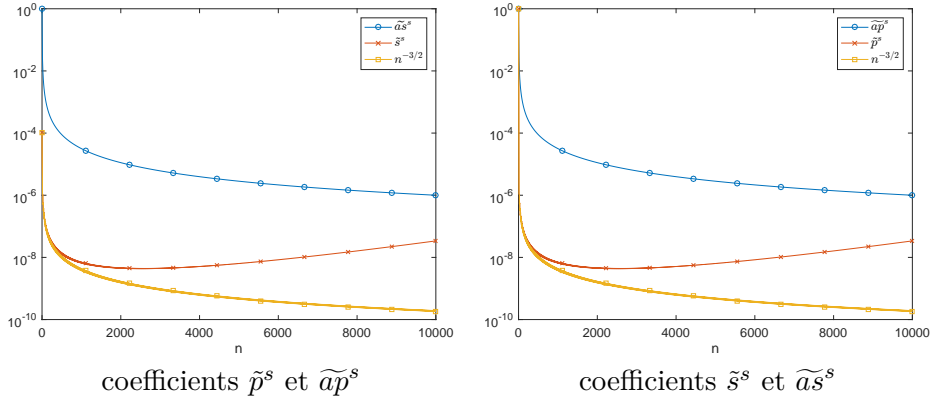


FIGURE 4.5 – Évolution des coefficients de convolution.

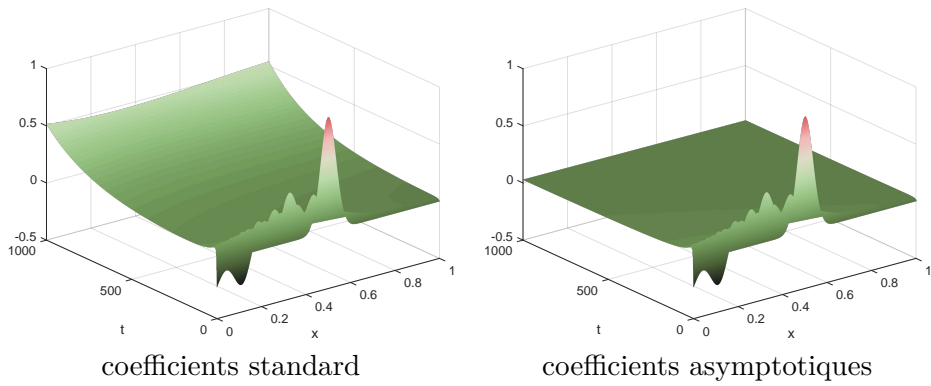


FIGURE 4.6 – Évolution de la solution avec des coefficients de convolution standards et asymptotiques.

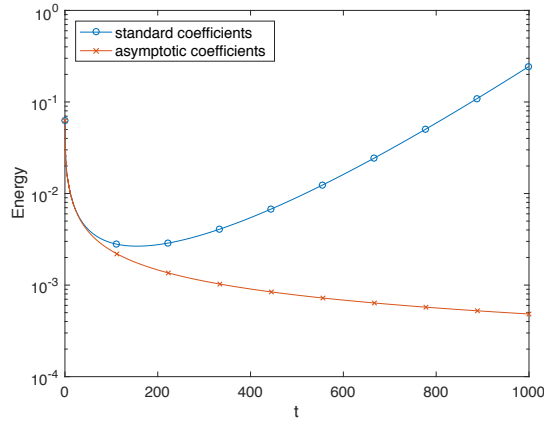


FIGURE 4.7 – Évolution de l'énergie discrète  $\mathcal{E}_n$  de la solution pour des coefficients de convolution standard et asymptotiques.

## 4.5 Conclusion et perspectives

Nous avons obtenu des conditions de bord transparentes discrètes pour l'équation linéarisée (KdV)-(BBM) (voir aussi [A10]). La première étape consiste à obtenir des conditions de bord transparentes continues pour l'équation. Plutôt que de discrétiser directement ces conditions l'idée principale consiste à reproduire dans le cadre discret le cheminement utilisé dans le cadre continu.

Nous avons choisi ici un schéma aux différences finies centré pour les dérivées spatiales et un schéma de Crank-Nicolson en temps afin d'obtenir un schéma d'ordre deux en espace et en temps et de préserver certains des invariants de l'équation (moyenne spatiale, énergie). Nous prouvons que les conditions de bord transparentes continues sont stables et donnons des conditions suffisantes pour les conditions discrètes. De plus, nous avons prouvé la consistance entre les conditions transparentes discrètes et continues.

D'un point de vue numérique, le point-clé de cette étude réside dans le calcul de la  $\mathcal{Z}$ -transformée inverse de noyaux de convolution. Nous proposons une nouvelle stratégie basée sur le fait que des les noyaux de convolutions sont les produits et sommes de racines de certains polynômes caractéristiques : nous calculons simplement un développement asymptotique de ces racines quand  $x = z^{-1} \rightarrow 0$  où  $z$  est le paramètre dans la  $\mathcal{Z}$ -transformée. Cette méthode s'est avérée être très efficace et stable sauf pour de très petits  $\delta x$ . Nous montrons que les coefficients obtenus ont un bon comportement pour des grands temps de simulation, ce qui n'était pas le cas pour la première stratégie.

Dans la suite, nous voulons travailler sur les équations non-linéaires. Afin de dériver des conditions de bord transparentes dans le cas non-linéaire, nous souhaitons adapter notre stratégie à des équations linéaires à coefficients variables et utiliser une straté-

gie de point fixe (voir [7] pour plus de détails dans le cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire). Nous souhaitons utiliser cette stratégie pour étudier précisément les interactions de solitons dans les équations BBM comme [56], [52] (où des conditions de bord non physiques étaient utilisées).

D'autres questions intéressantes concernent la conception de conditions de bord transparentes discrètes pour des modèles plus généraux de vagues. D'une part, il serait intéressant d'adapter cette stratégie à des modèles bi-dimensionnels de vagues non-linéaires en onde longue comme l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) : le principal problème résiderait dans le traitement des termes non locaux de l'équation. Un modèle proche que l'on pourrait étudier est celui de l'équation de Zakharov-Kuznetsov [71]. D'autre part, il serait intéressant de dériver des conditions de bord transparentes discrètes dans le cas des équations de Serre-Green-Naghdi [74] qui sont physiquement plus pertinentes dans les problèmes de vagues : la principale difficulté dans ce cas réside dans la conception des conditions de bord transparentes discrètes dans le contexte de systèmes d'équations aux dérivées partielles au lieu d'équations aux dérivées partielles scalaires.



## Chapitre 5

# Du particulaire au fluide

Les descriptions particulières et le passage à des équations mésoscopiques (équations sur la densité de particules) ou fluides (équations sur les moments de la densité) permettent d'obtenir une grande variété de modèles tant en physique qu'en biologie.

A mon arrivée à Toulouse, en collaboration avec Pierre Degond, j'ai eu l'occasion de m'intéresser à ces modèles et méthodes dans le cadre de l'ANR Panurge regroupant mathématiciens, biologistes et physiciens. L'objectif consistait à étudier le comportement d'animaux grégaires, comme les moutons, et modéliser leur comportement. Cette collaboration a rapidement débouché sur le co-encadrement de la thèse de Laurent Navoret [79] et donné lieu à plusieurs publications [P3, A7]. Une partie de ces travaux sera détaillée dans la section 5.1.

Ces méthodes ont également été au cœur d'un autre travail de modélisation réalisé en collaboration avec Guillaume Dufour (ONERA) et Georges Da Costa (IRIT) (voir section 5.2). Nous nous sommes intéressés aux grilles de calcul utilisées en informatique et plus particulièrement à des modèles de migration de "jobs" entre des clusters de calcul afin d'optimiser différents critères et plus particulièrement l'énergie consommée par les clusters. Cette collaboration a donné lieu à un proceeding dans une conférence internationale en informatique [P2] et a débouché sur le co-encadrement avec Guillaume Dufour du stage de Master 2 d'Alexandra De Cecco. Les modèles obtenus ont ensuite été développés et étendus par cette dernière dans sa thèse [45, S2].

### 5.1 Comportements collectifs de moutons

Tant dans le cadre des interactions sociales que dans la modélisation des chaînes de production, la congestion est un problème majeur pour la dynamique de ces phénomènes. Ces deux types de systèmes sont en effet confrontés à des limites physiques telles que la capacité des machines dans les chaînes de production [9] et des contraintes de non-recouvrement entre les individus des groupes sociaux. Nous nous sommes intéressés ici au groupe social constitué par les troupeaux de moutons. Le comportement de cet animal grégaire a été étudié dans [82]. Nous nous focalisons sur un mouvement du troupeau dans lequel tous les animaux vont à la même vitesse et nous dérivons un modèle macroscopique

pour le troupeau prenant en compte les contraintes de vitesse et de congestion à partir d'un modèle individu centré. Afin de mettre en évidence le phénomène de congestion dans la dynamique obtenue, nous prenons une limite singulière du modèle macroscopique et mettons en évidence deux phases, une congestionnée et une non-congestionnée. Nous étudions enfin plus en détail la phase congestionnée.

### 5.1.1 Modèle

A partir de l'étude d'un système de particules sujettes à des forces d'attraction agissant à longue portée (instinct grégaire de l'animal) et des forces de répulsion à courte portée (effet de non-recouvrement des individus) dans l'esprit du modèle proposé par Aoki [8] ou Couzin et al. [42] pour modéliser les effets grégaires et de nuées, nous avons obtenu dans [A7] le système suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla_{\vec{x}} \cdot \rho \vec{\Omega} = 0, \quad (5.1)$$

$$\partial_t \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega} + (Id - \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega}) \nabla_{\vec{x}} p(\rho) = 0. \quad (5.2)$$

Ce modèle a été obtenu à l'aide de changement d'échelles successives par des méthodes issues de la théorie des champs moyens et de l'hydrodynamique dans lequel les phénomènes d'attraction longue distance sont négligés.

Dans ce modèle,  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  est la densité de particule et  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\vec{x}, t)$  est la vitesse des particules,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  la position dans le plan et  $t > 0$  le temps. On suppose de plus que la vitesse  $\vec{\Omega}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^2$  satisfait la contrainte de normalisation

$$|\vec{\Omega}(\vec{x}, t)| = 1, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0. \quad (5.3)$$

La fonction  $p(\rho)$  est une fonction croissante telle que  $p(\rho) \sim \rho^\gamma$  quand  $\rho \ll 1$  et  $p(\rho) \rightarrow +\infty$  quand  $\rho \rightarrow \rho^*$  où  $\rho^*$  sera ce qu'on appellera la densité de congestion. Nous poserons ici

$$p(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\gamma}, \quad (5.4)$$

par souci de simplicité mais toute autre fonction au comportement similaire produirait des résultats équivalents. Les opérateurs  $\nabla_{\vec{x}} \cdot$  et  $(\vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{x}})$  sont définis pour un champ de vecteur  $\vec{A} = (A_1, A_2)(\vec{x})$ , par

$$\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{A} = \partial_{x_1} A_1 + \partial_{x_2} A_2, \quad (5.5)$$

$$(\vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{A} = ((\Omega_1 \partial_{x_1} + \Omega_2 \partial_{x_2}) A_1, (\Omega_1 \partial_{x_1} + \Omega_2 \partial_{x_2}) A_2)^T, \quad (5.6)$$

où  $T$  est l'opérateur transposé. Finalement,  $(Id - \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega})$  est la matrice de projection sur la ligne engendrée par  $\vec{\Omega}^\perp$ , où  $\vec{\Omega}^\perp$  est le vecteur  $\vec{\Omega}$  tourné d'un angle  $\pi/2$ . Alternativement, nous avons, pour un vecteur  $\vec{A}$  :

$$(Id - \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega}) \vec{A} = \vec{A} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{A}) \vec{\Omega}, \quad (5.7)$$

où  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{A})$  est le produit scalaire  $\vec{\Omega} \cdot \vec{A} = \Omega_1 A_1 + \Omega_2 A_2$ .

Notre principal objectif réside dans l'étude des effets de congestion induits par la singularité de  $p(\rho)$  près de la densité de congestion  $\rho^*$ . En effet, un troupeau d'animaux peut être vu, à grande échelle, comme un domaine de l'espace où la densité  $\rho$  est proche de la densité de saturation  $\rho^*$ . La façon de définir la frontière du troupeau n'est toutefois pas claire.

Une façon non ambiguë de définir le troupeau est de forcer le système (5.1)-(5.2) à faire apparaître des transitions claires entre la phase non-congestionnée  $\rho < \rho^*$  et la phase congestionnée  $\rho = \rho^*$ . Dans l'esprit des travaux [14, 46, 15] pour le trafic routier, on l'obtient à l'aide d'un régime asymptotique revenant à supposer qu'il y a très peu d'interactions répulsives tant que  $\rho < \rho^*$ , et que la force de pression répulsive apparaît soudainement quand  $\rho$  atteint la densité de congestion  $\rho^*$ . Cela s'obtient via le changement d'échelle de  $p(\rho)$  en  $\varepsilon p(\rho)$  où  $\varepsilon \ll 1$  est un petit paramètre. Dans ce cas les interactions répulsives sont de l'ordre de  $O(\varepsilon)$  tant que  $\rho < \rho^*$ , mais deviennent d'ordre  $O(1)$  quand  $\rho = \rho^*$  (voir figure 5.1).

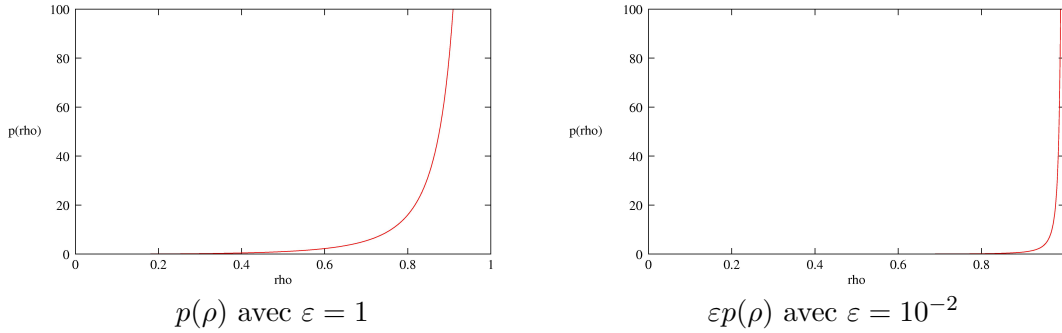


FIGURE 5.1 – Le potentiel d'interaction répulsive  $p(\rho)$  (gauche) et  $\varepsilon p(\rho)$  (droite) après le changement d'échelle par le petit paramètre  $\varepsilon = 10^{-2}$ , avec  $\gamma = 2$  et  $\rho^* = 1$ . Dans la figure de droite, il est évident que l'interaction répulsive n'apparaît que quand  $\rho$  est très proche de  $\rho^*$

Biologiquement, cette hypothèse signifie que les animaux ne changent pas de direction tant qu'ils n'entrent pas en contact avec leurs voisins. Le paramètre  $\varepsilon \ll 1$  est lié à l'échelle de temps à laquelle le changement de trajectoire se produit et est supposé petit. Notons aussi que notre modèle considère que tous les animaux se déplacent à la même vitesse unitaire et ne s'arrêtent jamais.

Nous étudions donc ici la perturbation suivante :

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho^\varepsilon \vec{\Omega}^\varepsilon) = 0, \quad (5.8)$$

$$\partial_t \vec{\Omega}^\varepsilon + (\vec{\Omega}^\varepsilon \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{\Omega}^\varepsilon + \varepsilon (Id - \vec{\Omega}^\varepsilon \otimes \vec{\Omega}^\varepsilon) \nabla_{\vec{x}} p(\rho^\varepsilon) = 0, \quad (5.9)$$

$$|\vec{\Omega}^\varepsilon| = 1. \quad (5.10)$$

Nous nous intéressons à la limite formelle  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Une étude théorique rigoureuse de ce type de problème ne fait pas partie de nos objectifs. Nous montrons dans la suite que,

dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ce modèle fait apparaître une transition de phase entre des régimes compressible et incompressible.

### 5.1.2 Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ : transition entre un modèle compressible et incompressible

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon p(\rho^\varepsilon)$  ne devient non négligeable que quand  $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho^*$  suffisamment vite. Ainsi, à la limite, soit  $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho < \rho^*$  et  $\varepsilon p(\rho^\varepsilon) \rightarrow 0$  soit  $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho^*$  et  $\varepsilon p(\rho^\varepsilon) \rightarrow \bar{p}$  où  $\bar{p}$  est éventuellement non nul. En d'autres termes, l'équation  $(\rho^* - \rho)\bar{p} = 0$  est vérifiée à la limite. Si de plus,  $\bar{p} < +\infty$ , nous obtenons immédiatement que

$$\rho^* - \rho^\varepsilon = O(\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}}). \quad (5.11)$$

Ainsi, la limite formelle quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  du système (5.8)-(5.9)-(5.10) est donnée par le système suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{\Omega}) = 0, \quad (5.12)$$

$$\partial_t \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega} + (Id - \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega}) \nabla_{\vec{x}} \bar{p} = 0, \quad (5.13)$$

$$|\vec{\Omega}| = 1, \quad (5.14)$$

$$(\rho^* - \rho)\bar{p} = 0. \quad (5.15)$$

Dans le domaine, non congestionné, le système se réduit à un modèle de la dynamique des gaz compressibles et sans pression avec la contrainte de vitesse

$$\partial_t \rho + \nabla_{\vec{x}} \cdot \rho \vec{\Omega} = 0, \quad (5.16)$$

$$\partial_t \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega} = 0, \quad (5.17)$$

$$|\vec{\Omega}| = 1. \quad (5.18)$$

Ce système décrit le comportement du système hors de la zone congestionnée. Biologiquement, il décrit le comportement d'animaux dispersés, hors du troupeau. L'étude mathématique de ce système n'est pas notre objectif. Nous renvoyons à [18] pour l'étude de modèles de dynamique des gaz sans pression (et sans contrainte sur la vitesse). Notons que ce système fait apparaître des régions vides où  $\rho = 0$ .

### 5.1.3 Étude du domaine congestionné

Le domaine congestionné est défini comme étant la zone où la contrainte de congestion  $\rho = \rho^*$  est atteinte. Biologiquement, cela définit le domaine de l'espace occupé par le troupeau. Nous appellerons "clusters" ses composantes connexes. Dans le domaine congestionné, le système (5.12)-(5.15) se transforme en un modèle d'Euler incompressible avec contrainte de vitesse :

$$\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\Omega} = 0, \quad (5.19)$$

$$\partial_t \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega} + (Id - \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega}) \nabla_{\vec{x}} \bar{p} = 0. \quad (5.20)$$

$$|\vec{\Omega}| = 1, \quad (5.21)$$

$$\rho = \rho^*, \quad (5.22)$$

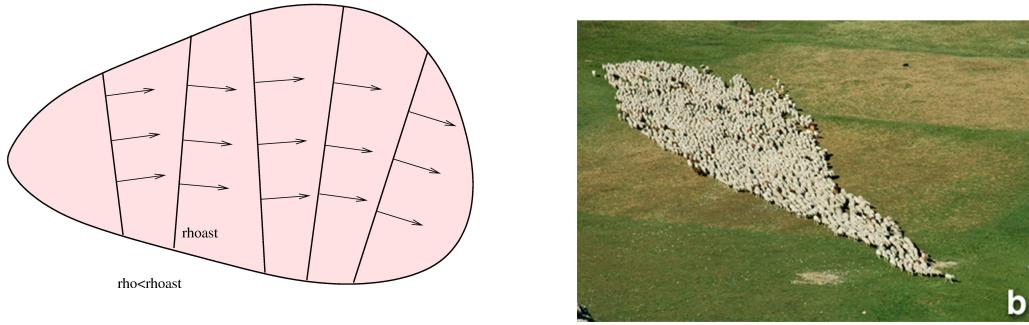


FIGURE 5.2 – Gauche : schéma d'une zone congestionnée où les flèches représentent les vecteurs  $\vec{\Omega}$ . Droite : image d'un troupeau de moutons.

Nous remarquons tout d'abord qu'un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  incompressible régulier de norme constante a une structure particulière :

**Proposition 5.1.1** *Soit  $\vec{\Omega}(x)$  un champ de vecteurs régulier défini sur le domaine  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$  et satisfaisant la contrainte d'incompressibilité  $\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\Omega} = 0$ . Alors les lignes intégrales de  $\vec{\Omega}^\perp$  sont des lignes droites et  $\vec{\Omega}$  est constant le long de ces lignes (où  $\vec{\Omega}^\perp$  est tourné d'un angle de  $\pi/2$ ) et les lignes intégrales de  $\vec{\Omega}$  sont parallèles entre elles.*

La preuve de cette proposition découle simplement de l'introduction de l'angle  $\theta$  tel que  $\vec{\Omega}(\vec{x}, t) = (\cos(\theta(\vec{x}, t)), \sin(\theta(\vec{x}, t)))$ . On vérifie alors que  $\theta$  satisfait l'"équation de transport"

$$\partial_{x_2} \theta - (\tan \theta) \partial_{x_1} \theta = 0.$$

Cette propriété implique que la connaissance de  $\vec{\Omega}$  sur les bords des clusters suffit pour connaître  $\vec{\Omega}$  de partout à l'intérieur des clusters.

Les courbes intégrales de  $\vec{\Omega}$  fournissent ainsi une description mathématique des files d'animaux dans le troupeau. Ces courbes étant parallèles entre elles, elles corroborent l'intuition et l'observation que les animaux se déplacent en file indienne dans un troupeau (voir figure 5.2).

La pression  $\bar{p}$  vérifie une équation elliptique. En effet, en prenant la divergence de l'équation (5.20) et après quelques calculs, nous obtenons

$$\nabla_{\vec{x}} \cdot \left( (Id - \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega}) \nabla_{\vec{x}} \bar{p} \right) = \text{Tr}((\nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega})(\nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega})^T), \quad (5.23)$$

où  $\text{Tr}$  est la trace d'une matrice et l'exposant  $T$  désigne l'opérateur transposé. Cette équation peut s'écrire de façon équivalente :

$$-(\vec{\Omega}^\perp \cdot \nabla_{\vec{x}})^2 \bar{p} - (\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{\Omega}^\perp)(\vec{\Omega}^\perp \cdot \nabla_{\vec{x}}) \bar{p} = -\text{Tr}((\nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega})(\nabla_{\vec{x}} \vec{\Omega})^T), \quad (5.24)$$

et ne fait intervenir que l'opérateur  $(\vec{\Omega}^\perp \cdot \nabla_{\vec{x}})$  appliqué à  $\bar{p}$ . Comme les lignes intégrales de  $\vec{\Omega}^\perp$  sont rectilignes, l'équation (5.24) est juste une équation elliptique monodimensionnelle pour  $\bar{p}$  posée sur cette droite. Connaissant les valeurs au bord de  $\bar{p}$  là où cette droite rencontre le bord du cluster nous permet donc de calculer  $\bar{p}$  sur toutes ces lignes et donc dans le cluster (voir figure 5.2). Une fois que  $\vec{\Omega}$  est connu dans le cluster la résolution de cette équation ne requiert donc que la connaissance des conditions de bord pour  $\bar{p}$  aux bords du cluster.

Afin de fermer le système, c'est-à-dire de déterminer comment la solution évolue dans le domaine congestionné, nous avons besoin de déterminer ces conditions de bord. Elles ne sont pas données par la limite formelle du système et nous avons besoin de procéder autrement pour les obtenir. Nous devons alors étudier les solutions du problème de Riemann pour les systèmes perturbés et limites. Remarquons que si nous abandonnons la contrainte de norme constante  $|\vec{\Omega}| = 1$ , le terme non conservatif  $(\vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega})\nabla_{\vec{x}}\bar{p}$  dans l'équation de conservation de moment (5.13) disparaît et nous retrouvons un modèle conservatif faisant apparaître les équations de masse et de moment. Les conditions de Rankine-Hugoniot aux frontières entre les domaines compressible et incompressible fournissent alors les conditions au bord pour la pression. La contrainte de norme constante nous empêche toutefois d'appliquer cette stratégie.

Afin d'obtenir les conditions de bord au bord du cluster, nous avons besoin de plus d'informations sur le système perturbé (5.8)-(5.10) que le simple système limite (5.12)-(5.15) qui est sous-déterminé. Il faut donc passer à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans des solutions spéciales de ce système. Je renvoie à la suite de l'article [A7] pour plus de détails et plus particulièrement à la thèse de Laurent Navoret [79] pour l'étude complète des clusters et de leur dynamique.

## 5.2 Modélisation de réseau informatique

La consommation électrique dûe aux technologies de l'information a atteint 270 TWh en 2012 [64] ce qui correspond environ à 1.4% de la consommation électrique mondiale alors que le secteur des technologies de l'information et de la communication (fabrication exclue) compte pour 4.7%. De plus, les besoins énergétiques des centres de données ont crû annuellement de 5% entre 2006 et 2012 (voir aussi [40]). En 2030 les centres de données pourraient utiliser entre 3% (meilleur cas) et 13% (pire scénario) de la production électrique globale [5]. Nous nous intéressons ici à la gestion des "clusters" de calcul et à l'amélioration de leur consommation énergétique tout en maintenant une certaine qualité de service. Il ya plusieurs pistes pour limiter leur impact énergétique [92]. L'une en particulier consiste à améliorer l'utilisation de ces derniers en les faisant coopérer. Il existe différentes politiques : certaines sont basées sur une étude *a priori* de l'état des du réseau de clusters avant de lancer une application (un "job") dessus [83]. D'autres se basent sur une gestion dynamique des clusters *via* le déplacement de jobs entre des ordinateurs ou des clusters. Ces mouvements sont facilités par l'utilisation des machines virtuelles dans lesquels les jobs sont encapsulés [90]. Le principal problème réside dans l'évaluation de la qualité de ces politiques de gestion : à cause du passage à l'exascale,

les méthodes de simulation directe [81] deviennent trop coûteuses et il faut proposer d'autres méthodes d'évaluation ne requérant pas le traitement de chaque job individuellement [44]. Nous proposons ici une méthode d'évaluation basée sur le regroupement de différents processus. Ces méthodes macroscopiques ou fluides sont déjà utilisées dans d'autres domaines d'applications [47, 12] et dans les réseaux d'ordinateurs [77].

Nous considérons ici un modèle microscopique, individu centré pour les jobs et leurs mouvements entre les clusters. À l'aide d'un changement d'échelle, nous obtenons à la limite un modèle sur les fonctions de densité de probabilité des jobs et finalement un modèle macroscopique d'écrivant l'évolution d'un réseau de clusters. Les bases de ce modèle ont été posées dans [P2] et développées dans la thèse de De Cecco [45, S2].

Nous détaillons dans la section 5.2.1 une description microscopique des clusters et des jobs en cours d'exécution puis nous mettons en évidences les asymptotiques du modèle pour dériver un modèle fluide dans la section 5.2.2. Nous justifions enfin dans la section 5.2.3 les modèles obtenus.

### 5.2.1 Description d'un réseau de clusters

Nous considérons dans cette étude un réseau de grilles de calculs modélisé par un réseau de  $C$  clusters (notés  $C_j$ ,  $j \in \{1, \dots, C\}$ ). On suppose que ce réseau est géré par un intergiciel qui décide si un job en cours d'exécution sur un cluster doit poursuivre son exécution sur site ou doit être envoyé vers un autre cluster afin d'améliorer un coût (temps de calcul, coût énergétique, financier, ... ou toute combinaison de ces derniers). Afin d'évaluer le gain possible résultant d'un déplacement de job, chaque cluster  $C_j$  est caractérisé par un petit nombre de paramètres tels que son indice de performance  $v_j \in \mathbb{R}^+$  (sa vitesse de calcul), sa puissance énergétique  $Z_j(t, q) \in \mathbb{R}^+$ , dépendant du temps et de la charge du cluster (éventuellement de plus de paramètres comme le nombre de processeurs utilisés), son coût opérationnel  $C_j(t) \in \mathbb{R}^+$ , (coût de location par exemple, dépendant du nombre de processeurs utilisés par le coeur), le nombre total de processeurs  $\pi_j \in \mathbb{N}^*$ , le nombre maximal de tâches simultanées  $T_j \in \mathbb{N}^*$ .

Dans notre cas nous ne prendrons en compte que le nombre de processeurs de chaque cluster. De plus, le temps de transfert entre chaque cluster connecté au réseau est défini à l'aide d'une matrice de temps de transfert  $\tau = (\tau_{jk})_{j,k \in \{1, \dots, C\}} \in M_C(\mathbb{R}^+)$  où  $\tau_{jk}$  est le temps nécessaire pour transférer une tâche du cluster  $C_j$  vers le  $C_k$ . Etant donné qu'il n'y a pas de transfert d'un cluster vers lui-même et que les connections sont bidirectionnelles, nous supposons que pour tout  $j$ ,  $\tau_{jj} = 0$  et que  $\tau$  est symétrique.

Nous considérons également  $N$  jobs, notés  $J_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  en cours d'exécution sur le réseau. Chacun d'eux est décrit par sa taille  $s_i \in \mathbb{R}_+^*$  (la mémoire utilisée par le job sur le cluster),  $q_i(t) \in \mathbb{R}_+^*$ , la charge de calculs restante pour terminer le job, sa position  $P_i(t) \in \{C_1, \dots, C_C\}$  dans le réseau, c'est-à-dire le cluster sur lequel le job est exécuté au temps  $t$ ,  $p_i \in \mathbb{N}^*$ , le nombre minimum de processeurs requis pour effectuer le job, l'âge du job  $a_i(t) \in \mathbb{R}^+$ , son temps d'attente  $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$ . Nous introduisons ce temps pour prendre en compte le temps de transfert d'un job. Lorsqu'un job est déplacé d'un cluster à un autre, les ressources sur le cluster d'arrivée sont immédiatement réservées au job entrant et donc indisponibles pour de nouveaux jobs. Nous supposons que le job est transféré

instantanément mais qu'il arrive sur le nouveau cluster avec un temps d'attente  $\theta$  avant exécution égal à son temps de transfert.

Nous n'utiliserons pas ici les paramètres  $s_i$  et  $p_i$ . Le temps de transfert entre deux clusters sera donc une donnée indépendante du job considéré (et de la mémoire occupée par ce dernier).

La décision de déplacer un job d'un cluster à un autre au temps  $t$  dépend d'une fonction de coût. Cela peut être par exemple le temps d'exécution restant,

$$t^{exe}(q_i(t), P_i(t) = C_j, C_k) = \frac{q_i(t)}{v_k} + \tau_{jk}, \quad \forall (j, k) \in \{1, \dots, C\}^2,$$

la consommation énergétique associée,

$$K^{exe}(q_i(t), C_k) = \int_0^{\frac{q_i(t)}{v_k}} Z_k(t, q) dt, \quad \forall k \in \{1, \dots, C\},$$

le coût en fonctionnement du matériel,...

La fonctionnelle que nous souhaitons minimiser sera une combinaison du temps d'exécution restant et de la consommation d'énergie :

$$K(q_i(t), C_k) = c_t t^{exe}(q_i(t), C_j, C_k) + c_e K^{exe}(q_i(t), C_k),$$

où les poids  $c_t$  et  $c_e$  sont dans  $\mathbb{R}^+$  tels que  $c_t + c_e = 1$ .

La tâche sera transférée au cluster  $C_{k^*}$  (choisi arbitrairement si il n'y a pas unicité) qui minimise la fonction de coût. Ce cluster peut éventuellement être celui sur lequel la tâche est actuellement en cours d'exécution ( $P_i(t) = C_{k^*}$ ). On associe une fonction de décision Dec à la fonction de coût de la façon suivante :

$$\text{Dec}(t, q_i(t), P_i(t), P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i(t) \neq C_{k^*} \text{ et } P = C_{k^*}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intergiciel fonctionne comme une boîte noire qui renvoie le résultat 1 si la tâche est déplacée d'un cluster à un autre et 0 sinon. Nous introduisons  $\tau_{pr}$  le temps nécessaire pour évaluer la fonction de décision pour un job supposé constant. Nous supposons que l'intergiciel teste les jobs les uns après les autres et nous donnons un numéro  $\alpha_i \in \{1, \dots, N\}$  à chaque job qui détermine l'ordre dans lequel ils seront testés, de telle sorte que le temps nécessaire pour tester le job  $J_i$  est  $\alpha_i \tau_{pr}$ . Nous supposons de plus que si la charge de travail d'un job est suffisamment petite, il ne sera pas déplacé et donc la fonction Dec vaut zéro pour ce dernier.

Nous obtenons ainsi les équations suivantes pour chaque job :

$$q_i'(t) = -v_{P_i(t)} \mathbf{1}_{q_i(t) > 0} \mathbf{1}_{\theta_i(t) \leq 0}, \quad (5.25)$$

$$\theta_i'(t) = -\mathbf{1}_{\theta_i(t) > 0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^C \tau_{jk} \text{Dec}(t, q_i(t), C_j, C_k) \delta_{\theta_i(t)=0}, \quad (5.26)$$

**Remarque 5.2.1** *Les quantités  $\theta_i$  et  $q_i$  n'évoluent pas simultanément. Nous autorisons  $\theta_i(t)$  à être négatif. Cela ne se produit jamais en pratique mais facilite la dérivation du modèle cinétique dans la suite. Enfin, un job en attente ne sera pas testé tant que son temps d'attente  $\theta$  ne vaudra pas 0 puisqu'il est en cours de transfert.*

### 5.2.2 Vers un modèle fluide

Pour obtenir le comportement global des jobs sur le réseau sans devoir les étudier individuellement, nous introduisons la densité de probabilité de jobs  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^C$  dont chaque composante  $f^j$  est la densité de probabilité de jobs de charge  $q$  et de temps d'attente  $\theta$  sur le cluster  $C_j$  :

$$f(t, P, q, \theta) = \left( f^j(t, q, \theta) \delta_{P=C_j} \right)_{j \in \{1, \dots, C\}} \quad \text{où} \quad f^j(t, q, \theta) = \frac{1}{T_j} \sum_{\substack{i=1 \\ P_i(t)=C_j}}^{N_j} \delta_{q=q_i(t)} \delta_{\theta=\theta_i(t)}$$

et  $N_j$  est le nombre de jobs sur le cluster  $C_j$ . La quantité  $\int_{q, \theta} f^j dq d\theta = N_j/T_j$  désigne alors le taux de remplissage du cluster  $C_j$ .

Nous étudions maintenant l'évolution de  $f_j$  entre les temps  $t$  et  $t + \delta t$  au sens des distributions en distinguant tous les cas de figure et passons à la limite quand  $\delta t \rightarrow 0$ . Pour cela, nous avons besoin de mettre à l'échelle les temps caractéristiques du problème afin que le comportement de chaque job soit correctement pris en compte. Comme nous étudions le transfert de jobs entre des clusters, de nombreux jobs doivent être testés pendant l'intervalle de temps  $\delta t$  pour obtenir un modèle pertinent. Cela implique que  $\tau_{pr} \ll \delta t$ . Si, par contre, tous les jobs sont testés pendant l'intervalle de temps  $\delta t$ , cela correspond à un intergiciel prenant des décisions instantanées. Nous supposons ici que le temps requis pour tester tous les jobs,  $\mathcal{T} = N \tau_{pr}$ , reste constant dans la limite  $\delta t \rightarrow 0$ . Nous supposons donc dans la suite que

$$\tau_{pr} = \delta t^2 \ll \delta t \ll \mathcal{T} = \mathcal{O}(1). \quad (5.27)$$

**Remarque 5.2.2** *Cette mise à l'échelle implique que le nombre de jobs sur le réseau vérifie  $N = \mathcal{O}(1/\delta t^2)$ , le nombre de clusters  $C$  restant constant. Le nombre de jobs testé sur le réseau pendant  $\delta t$  est alors défini par*

$$N_{\delta t} = \frac{\delta t}{\tau_{pr}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta t}\right) \gg 1.$$

*Sous l'hypothèse supplémentaire que les jobs sont indépendants et identiquement distribués, le nombre de jobs testé sur le cluster  $C_j$  pendant  $\delta t$  est*

$$\frac{N_j}{N} N_{\delta t} = N_j \frac{\delta t}{\mathcal{T}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta t}\right) \gg 1.$$

*Enfin, indépendamment de ce choix d'asymptotique, nous imposons que le taux de remplissage de chaque cluster reste borné (et non nul) :*

$$\int_{q, \theta} f^j dq d\theta = \frac{N_j}{T_j} = \mathcal{O}(1).$$

**Hypothèse 5** Nous supposons que  $Dec^{-1}\{1\}$  est un ouvert.

Cette hypothèse est valide dès que la fonction coût est continue. Elle implique que  $Dec$  ne dépend que des caractéristiques des jobs et pas des jobs eux-même.

**Lemme 5.2.1** Limite formelle quand  $\delta t \rightarrow 0$

L'équation cinétique gouvernant l'évolution de la densité de probabilité dans chaque cluster  $C_j$ ,  $j = \{1, \dots, C\}$ , pour tout temps  $t > 0$  est donnée dans  $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*))_q \otimes (\mathcal{D}'(\mathbb{R}))_\theta$  par :

$$\begin{aligned} \partial_t f^j(t) - \mathbf{1}_{\theta \leq 0} v_j \partial_q f^j(t) - \mathbf{1}_{\theta > 0} \partial_\theta f^j(t) = & -\frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^C f^j(t) \mathbf{1}_{\theta \leq 0} Dec(j, k) \\ & + \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^C \frac{T_k}{T_j} \langle f^k(t) Dec(k, j), \mathbf{1}_{\theta \leq 0} \rangle_\theta \delta_{\theta = \tau_{kj}}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Comme les évolutions en les variables  $q$  et  $\theta$  ne sont pas simultanées, nous découpons la fonction de densité  $f^j$  de la façon suivante

$$f^j(t, q, \theta) = \rho_j^{exe}(t, q) \delta_{\theta=0} + \rho_j^{wait}(t, q, \theta) \mathbf{1}_{\theta > 0} + \rho_j^{garb}(t, q, \theta) \mathbf{1}_{\theta < 0}, \quad (5.29)$$

où les fonction  $\rho_j^{exe}$  (pour les jobs en cours d'exécution),  $\rho_j^{wait}$  (pour les jobs en attente) et  $\rho_j^{garb}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \rho_j^{exe}(t, q) = f^j(t, q, \theta) \mathbf{1}_{\theta=0}, \quad \rho_j^{wait}(t, q, \theta) = f^j(t, q, \theta) \mathbf{1}_{\theta > 0}, \\ \rho_j^{garb}(t, q, \theta) = f^j(t, q, \theta) \mathbf{1}_{\theta < 0}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

**Remarque 5.2.3** Comme l'évolution en  $\theta$  s'arrête dès que  $\theta \leq 0$ ,  $\rho^{garb}$  n'est pris en compte que par souci de généralité et afin que le paramètre  $\theta$  soit défini dans un domaine ouvert. Cette formulation est cohérente avec les solutions obtenues pour des équations de transport à coefficient discontinus [19].

**Lemme 5.2.2** *Caractérisation des solutions de l'équation cinétique*

Nous supposons que  $f^j(t = 0, q, \theta)$  satisfait la décomposition (5.29) où  $\rho_j^{exe}(t = 0, q) \in \mathbb{W}^{1, \infty}(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $\rho_j^{wait}(t = 0, q, \theta) \in \mathbb{W}^{1, \infty}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$  et  $\rho_j^{garb}(t = 0, q, \theta) \in \mathbb{W}^{1, \infty}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*)$ . Alors les solutions dans  $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*))_q \otimes (\mathcal{D}'(\mathbb{R}))_\theta$  de (5.28) satisfons pour  $t > 0$  la décomposition (5.29), où  $\rho_j^{wait}(t, q, \theta) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1, \infty}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*))$  et  $\rho_j^{garb}(t, q, \theta) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{1, \infty}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*))$ .

Notons que si  $\rho_j^{garb}(0, \cdot, \cdot) = 0$  (ce qui est le cas dans notre modèle), alors  $\rho_j^{garb}(t, \cdot, \cdot) = 0$  pour tout  $t > 0$  et si la solution existe, elle s'écrit :

$$f^j(t, q, \theta) = \rho_j^{exe}(t, q) \delta_{\theta=0} + \rho_j^{wait}(t, q, \theta) \mathbf{1}_{\theta > 0}. \quad (5.31)$$

où les fonctions  $\rho_j^{exe}$  et  $\rho_j^{wait}$  sont définies par

$$\rho_j^{exe}(t, q) = \langle f^j(t, q, \theta), \mathbf{1}_{\theta \leq 0} \rangle \quad \text{and} \quad \rho_j^{wait}(t, q, \theta) = f^j(t, q, \theta) \mathbf{1}_{\theta > 0}.$$

Nous obtenons enfin le système fluide vérifié par  $\rho_j^{exe}$  et  $\rho_j^{wait}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, C\}$  au sens des distributions :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_j^{exe}(t, q) - v_j \partial_q \rho_j^{exe}(t, q) = S_j^{exe}(t, q), \\ \partial_t \rho_j^{wait}(t, q, \theta) - \partial_\theta \rho_j^{wait}(t, q, \theta) = S_j^{wait}(t, q, \theta), \end{cases} \quad (5.32)$$

où

$$S_j^{exe}(t, q) = \rho_j^{wait}(\theta = 0^+) - \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k \neq j} \rho_k^{exe}(t, q) \text{Dec}(j, k), \quad (5.33)$$

et

$$S_j^{wait}(t, q, \theta) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k \neq j} \frac{T_k}{T_j} \rho_k^{exe}(t, q) \text{Dec}(k, j) \delta_{\theta = \tau_{kj}}. \quad (5.34)$$

### 5.2.3 Etude du modèle (5.32)-(5.33)-(5.34)

Pour prouver l'existence de solutions au système fluide, nous adaptons un théorème de Jabin à notre cas [65].

Soit la donnée initiale :

$$f(0, \cdot, \cdot) = f_0, \quad \rho_j^{exe}(0, \cdot) = \rho_{j,0}^{exe} \quad \text{et} \quad \rho_j^{wait}(0, \cdot, \cdot) = \rho_{j,0}^{wait}. \quad (5.35)$$

**Lemme 5.2.3**  $\rho_j^{exe}$  et  $\rho_j^{wait}$ , avec les données initiales (5.35), sont solutions du système fluide (5.32) dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)_q$  et  $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*))_q \otimes (\mathcal{D}'(\mathbb{R}))_\theta$  respectivement si et seulement si  $f^j$ , écrit sous la forme (5.31), est solution de l'équation cinétique (5.28) munie d'une donnée itinitiale satisfaisant la l'hypothèse de fermeture (5.31).

Le système fluide (5.32) est non-linéaire à cause de la fonction de décision Dec. Nous introduisons les espaces de distribution suivants :

$$B^{exe} = \mathbb{L}^\infty \left( [0, T], \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*)_q \right) \cap F_q \quad (5.36)$$

et

$$B^{wait} = \mathbb{L}^\infty \left( [0, T], \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^*)_q \times \mathbb{W}^{1,\infty}(\mathbb{R})_\theta \right) \cap F_\theta \quad (5.37)$$

où

$$F_x = \left\{ f \mid \forall x, \exists y \text{ tel que } \lim_{\eta \rightarrow 0^+} f(x + \eta) = y \right\}. \quad (5.38)$$

Nous posons  $\rho^{exe}$  et  $\rho^{wait}$  tels que  $\rho^{exe} = (\rho_j^{exe})_{j \in \{1, \dots, C\}} \in (B^{exe})^C$  et  $\rho^{wait} = (\rho_j^{wait})_{j \in \{1, \dots, C\}} \in (B^{wait})^C$ . Nous définissons la norme de  $\rho^{exe}$  telle que

$$\|\rho^{exe}\|_{exe} = \sum_{j=1}^C T_j \|\rho_j^{exe}\|_{B^{exe}}. \quad (5.39)$$

### **Théorème 5.2.4 Existence et unicité des solutions fluides**

Soit  $\rho_{j,0}^{exe} \in B^{exe}$  et  $\rho_{j,0}^{wait} \in B^{wait}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, C\}$ . Il existe alors une unique solution  $\rho^{exe}$  et  $\rho^{wait}$  à (5.32) pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  avec les données initiales  $\rho_j^{exe}(0, q) = \rho_{j,0}^{exe}(q)$  et  $\rho^{wait}(0, q, \theta) = \rho_{j,0}^{wait}(q, \theta)$ .

## **5.3 Conclusion et perspectives**

Ces deux modélisations ont permis de mettre en évidence la pertinence de ces méthodes. Même si le résultat n'est pas précis, il permet de dégager des modèles simplifiés prédisant une partie du comportement (comportement en file dans les troupes) et sur lequel peuvent être testés à moindre coût différentes optimisations (réseau de cluster).

D'un point de vue purement mathématique, notons que les équations fluides qui apparaissent (par exemple sur les réseaux informatiques) ne sont pas standards et nécessitent une étude théorique particulière. Dans [S2], nous étudions le caractère bien posé du problème et testons plusieurs politiques de gestion de jobs sur des clusters. Nous illustrons ainsi les gains énergétiques (resp. de performance) que l'on peut obtenir tout en conservant de fortes performances (resp. économies d'énergie).

Avec le développement actuel des services informatiques, une des priorités des acteurs du secteur est la qualité de service (QoS) fournie à leurs clients. De plus en plus de services sont dématérialisés (vidéo, musique, mais aussi de nombreux logiciels fonctionnent sur des machines distantes) alors que l'utilisateur s'attend à conserver des prestations de service équivalentes (voire supérieures) à celles qu'il aurait dans le cadre de services localisés chez lui.

Une "extension" de ces travaux consiste à s'intéresser à la structure actuelle des prestataires de service et à la façon dont ils distribuent les requêtes des usagers entre leurs serveurs. Ici aussi, une approche micro/méso/macrosopique permettra d'étudier à moindre coût l'influence d'une politique locale de gestion et de répartition des requêtes sur la qualité de service, la consommation énergétique ou les coûts matériels.

Le développement des objets connectés (IoT, Internet of Things), des villes connectées (smartcities) par exemple constituent également de nouveaux champs de modélisation.

## Chapitre 6

# Annexe : Espaces de Lebesgue d'exposant variable

Les espaces présentés ici sont largement introduits et étudiés par Diening (voir [50]). Il s'agit juste d'un bref rappel, sans démonstration, des définitions et de quelques propriétés de ces derniers. Ils ont été introduits initialement par Diening et ses co-auteurs [50, 51, 49] pour traiter le cas de fluides électrorhéologiques où ils se trouvaient confrontés à des problèmes du type  $q(x)$ -laplacien.

**Définition 6.0.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  muni de la tribu des boréliens  $\mathcal{B}(\Omega)$  et de la mesure de Lebesgue. On note  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions mesurables  $q : \Omega \rightarrow [1, +\infty]$ . Une fonction  $q \in \mathcal{P}(\Omega)$  est appelée exposant variable sur  $\Omega$ .

Soit  $q^- = \text{ess inf}_{x \in \Omega} q(x)$  et  $q^+ = \text{ess sup}_{x \in \Omega} q(x)$ . Si  $q^+ < +\infty$ , on dit que  $q$  est un exposant variable borné.

Si  $q \in \mathcal{P}(\Omega)$ , on définit l'exposant variable conjugué  $q' \in \mathcal{P}(\Omega)$  de  $q$  par :

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

On pose, pour toute fonction  $f$  mesurable sur  $\Omega$  :

$$\rho_{q(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{q(x)} dx,$$

et on définit l'espace de Lebesgue d'exposant variable  $L^{q(\cdot)}(\Omega)$  comme

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega), \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \rho_{q(\cdot)}(\lambda f) < +\infty \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{q(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho_{q(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

**Proposition 6.0.1** Soit  $q \in \mathcal{P}(\Omega)$  avec  $q^- < +\infty$ . Si  $\rho_{q(\cdot)}(f) > 0$  ou  $q^+ < +\infty$ , alors

$$\min \left\{ (\rho_{q(\cdot)}(f))^{1/q^-}, (\rho_{q(\cdot)}(f))^{1/q^+} \right\} \leq \|f\|_{q(\cdot)} \leq \max \left\{ (\rho_{q(\cdot)}(f))^{1/q^-}, (\rho_{q(\cdot)}(f))^{1/q^+} \right\}.$$

**Théorème 6.0.2** Si  $q \in \mathcal{P}(\Omega)$ , alors  $L^{q(\cdot)}(\Omega)$  est un espace de Banach. De plus, si  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ , il existe une sous-suite de  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge presque partout vers une fonction mesurable.

Si  $1 < q^- < q^+ < +\infty$ , l'espace  $L^{q(\cdot)}(\Omega)$  est réflexif et  $(L^{q(\cdot)}(\Omega))' = L^{q'(\cdot)}(\Omega)$ . On a pour tout  $g \in L^{q'(\cdot)}(\Omega)$

$$\frac{1}{2} \|g\|_{q'(\cdot)} \leq \|g\|_{(L^{q(\cdot)})'} \leq 2 \|g\|_{q'(\cdot)}.$$

**Lemme 6.0.3** Soit  $(q, r, s) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$  tels que pour presque tout  $x \in \Omega$

$$\frac{1}{s(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}.$$

Alors pour tout  $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$  et  $g \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$

$$\|fg\|_{s(\cdot)} \leq \left( \left( \frac{s}{q} \right)^+ + \left( \frac{s}{r} \right)^+ \right) \|f\|_{q(\cdot)} \|g\|_{r(\cdot)}.$$

# Publications

## Articles dans des journaux à comité de lecture

- [A1] D. SANCHEZ. « Boundary layer on a high-conductivity domain ». In : *Communications on Pure and Applied Analysis* 1.4 (2002), p. 547-564. ISSN : 1534-0392. DOI : 10.3934/cpaa.2002.1.547.
- [A2] David SANCHEZ. « Phénomène de couche limite dans un modèle de ferromagnétisme ». In : *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6* 11.2 (2002), p. 239-261. ISSN : 0240-2963. DOI : <http://dx.doi.org/10.5802/afst.1025>.
- [A3] David SANCHEZ. « Behaviour of the Landau-Lifschitz equation in a periodic thin layer ». In : *Asymptotic Analysis* 41.1 (2005), p. 41-69. ISSN : 0921-7134.
- [A4] David SANCHEZ. « Long waves in ferromagnetic media, Khokhlov-Zabolotskaya equation ». In : *Journal of Differential Equations* 210.2 (2005), p. 263-289. ISSN : 0022-0396. DOI : 10.1016/j.jde.2004.08.017.
- [A5] David SANCHEZ. « Numerical study of long waves in ferromagnetic media ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations. An International Journal* 22.5 (2006), p. 1127-1148. ISSN : 0749-159X. DOI : 10.1002/num.20142.
- [A6] David SANCHEZ. « Behaviour of the Landau-Lifschitz equation in a ferromagnetic wire ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 32.2 (2009), p. 167-205. ISSN : 0170-4214. DOI : 10.1002/mma.1030.
- [A7] Pierre DEGOND, Laurent NAVORET, Richard BON et David SANCHEZ. « Congestion in a macroscopic model of self-driven particles modeling gregariousness. » English. In : *Journal of Statistical Physics* 138.1-3 (2010), p. 85-125. ISSN : 0022-4715; 1572-9613/e. DOI : 10.1007/s10955-009-9879-x.
- [A8] Naoufel BEN ABDALLAH, Elise FOUASSIER, Clément JOURDANA et David SANCHEZ. « On a model of magnetization switching driven by a spin current : a multiscale approach ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 13.7 (2015), p. 1875-1904. ISSN : 1539-6746. DOI : <http://dx.doi.org/10.4310/CMS.2015.v13.n7.a10>.

- [A9] Robin CHATELIN, David SANCHEZ et Philippe PONCET. « Analysis of the penalized 3D variable viscosity stokes equations coupled to diffusion and transport ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 50.2 (mar. 2016), p. 565-591. ISSN : 0764-583X, 1290-3841. DOI : [10.1051/m2an/2015056](https://doi.org/10.1051/m2an/2015056).
- [A10] Christophe BESSE, Pascal NOBLE et David SANCHEZ. « Discrete transparent boundary conditions for the mixed KDV-BBM equation ». In : *Journal of Computational Physics* 345 (2017), p. 484-509. ISSN : 0021-9991. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.05.031>.

## Chapitre de livre

- [C1] R. CHATELIN, D. ANNE-ARCHARD, M. MURRIS-ESPIN, D. SANCHEZ, M. THIRIET, A. DIDIER et P. PONCET. « Chapter 5 - Modeling Cystic Fibrosis and Mucociliary Clearance ». In : *Modeling of Microscale Transport in Biological Processes*. Sous la dir. de Sid M. BECKER. Academic Press, 2017, p. 113-154. ISBN : 978-0-12-804595-4. DOI : <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-804595-4.00005-5>.

## Proceedings

- [P1] David SANCHEZ. « Thin layers for the Landau-Lifschitz equation ». In : *Dynamic systems and applications. Vol. 4*. Atlanta, GA : Dynamic, 2004, p. 239-244.
- [P2] Georges DA COSTA, Guillaume DUFOUR et David SANCHEZ. « Modèles fluides pour l'économie d'énergie dans les grilles par migration : une première approche ». In : *Renpar'19*. 2009.
- [P3] Laurent NAVORET, Richard BON, Pierre DEGOND, Jacques GAUTRAIS, David SANCHEZ et Guy THERAULAZ. « Analogies between social interaction models and supply chains ». In : *Progress in industrial mathematics at ECMI 2008*. T. 15. Math. Ind. Springer, 2010, p. 535-540.

## Thèse

- [T1] David SANCHEZ. « Méthodes asymptotiques en ferromagnétisme ». Thèse de doct. Université Bordeaux 1, 2004.

## Rapports techniques

- [RT1] David SANCHEZ. *Thin Layer for the Landau-Lifschitz equation*. Rapp. tech. Institut de Mathématiques de Bordeaux, 2005.

## Articles soumis

- [S1] Gilles CARBOU et David SANCHEZ. « Stability of walls for narrowing ferromagnetic nanowires ».
- [S2] Alexandra DE CECCO, Guillaume DUFOUR et David SANCHEZ. « Mathematical Modeling of Cluster Dynamics ».
- [S3] David SANCHEZ, Laurène HUME, Robin CHATELIN et Philippe PONCET. « Analysis of 3D generalized Stokes problem coupled to transport-diffusion for miscible shear-thinning heterogeneous microscale flows : Digital rock physics and mucociliary clearance applications ».



# Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS. *Adams R.A. Sobolev spaces*. Academic Press. 1975.
- [2] François ALOUGES et Stéphane LABBÉ. « Convergence of a ferromagnetic film model ». In : *Comptes Rendus Mathématique* 344.2 (2007), p. 77-82.
- [3] François ALOUGES, Tristan RIVIERE et Sylvia SERFATY. « Néel and cross-tie wall energies for planar micromagnetic configurations ». In : *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 8 (2002), p. 31-68.
- [4] François ALOUGES et Alain SOYEUR. « On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations : existence and nonuniqueness ». In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 18.11 (1992), p. 1071-1084.
- [5] Anders SG ANDRAE et Tomas EDLER. « On global electricity usage of communication technology : trends to 2030 ». In : *Challenges* 6.1 (2015), p. 117-157. DOI : <https://doi.org/10.3390/challe6010117>.
- [6] Philippe ANGOT, Charles-Henri BRUNEAU et Pierre FABRIE. « A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows ». In : *Numerische Mathematik* 81.4 (1999), p. 497-520.
- [7] Xavier ANTOINE, Anton ARNOLD, Christophe BESSE, Matthias EHRHARDT et Achim SCHÄDLE. « A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear Schrödinger equations ». In : *Commun. Comput. Phys.* 4.4 (2008), p. 729-796. ISSN : 1815-2406.
- [8] I. AOKI. « A simulation study on the schooling mechanism in fish ». In : *Bulletin of the Japanese Society of Scientific Fisheries (Japan)* 48 (1982), p. 1081-1088.
- [9] Dieter ARMBRUSTER, Pierre DEGOND et Christian RINGHOFER. « Continuum models for interacting machines ». In : *Networks of Interacting Machines : Production Organization in Complex Industrial Systems and Biological Cells* (2005), p. 1-32.
- [10] Anton ARNOLD, Matthias EHRHARDT, Maike SCHULTE et Ivan SOFRONOV. « Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation on circular domains ». In : *Commun. Math. Sci.* 10.3 (2012), p. 889-916. ISSN : 1539-6746. DOI : [10.4310/CMS.2012.v10.n3.a9](https://doi.org/10.4310/CMS.2012.v10.n3.a9).

- [11] Anton ARNOLD, Matthias EHRHARDT et Ivan SOFRONOV. « Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation : fast calculation, approximation, and stability ». In : *Commun. Math. Sci.* 1.3 (2003), p. 501-556. ISSN : 1539-6746.
- [12] Nicola BELLOMO et Christian DOGBE. « On the modeling of traffic and crowds : A survey of models, speculations, and perspectives ». In : *SIAM review* 53.3 (2011), p. 409-463.
- [13] L. BERGER. « Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current ». In : *Phys. Rev. B* 54.13 (1996), p. 9353-9358.
- [14] F. BERTHELIN, P. DEGOND, M. DELITALA et M. RASCLE. « A model for the formation and the evolution of traffic jams ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 187.2 (2008), p. 185-220.
- [15] F. BERTHELIN, P. DEGOND, V. LE BLANC, S. MOUTARI, M. RASCLE et J. ROYER. « A traffic-flow model with constraints for the modeling of traffic jams ». In : *Math. Models Methods Appl. Sci* 18 (2008), p. 1269-1298.
- [16] Christophe BESSE, Matthias EHRHARDT et Ingrid LACROIX-VIOLET. « Discrete artificial boundary conditions for the linearized Korteweg-de Vries equation. » English. In : *Numer. Methods Partial Differ. Equations* 32.5 (2016), p. 1455-1484. ISSN : 0749-159X ; 1098-2426/e. DOI : 10.1002/num.22058.
- [17] Christophe BESSE, Benoit MÉSOGNON-GIREAU et Pascal NOBLE. « Artificial boundary conditions for the linearized Benjamin–Bona–Mahony equation ». In : *Numerische Mathematik* 139.2 (2018), p. 281-314. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00211-017-0943-1>.
- [18] F. BOUCHUT. « On zero pressure gas dynamics ». In : *Advances in kinetic theory and computing : selected papers, Ser. Adv. Math. Appl. Sci.* 22 (1994), p. 171-190.
- [19] François BOUCHUT et François JAMES. « One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients ». In : *Nonlinear Analysis* 32.7 (1998), p. 891.
- [20] Franck BOYER et Pierre FABRIE. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*. T. 183. Applied Mathematical Sciences. New York, NY : Springer New York, 2013. ISBN : 978-1-4614-5974-3 978-1-4614-5975-0.
- [21] Gilles CARBOU. « Thin layers in micromagnetism ». In : *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences* 11.9 (2001), p. 1529-1546. ISSN : 0218-2025. DOI : 10.1142/S0218202501001458.
- [22] Gilles CARBOU. « Stability of Static Walls for a three dimensional Model of Ferromagnetic Material ». In : 93 (fév. 2010), p. 183-203. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2009.10.004>.
- [23] Gilles CARBOU. « Domain walls dynamics in ferromagnetic nanowires ». In : *Differential and Integral Equations* 26.3/4 (2013), p. 201-236.

- [24] Gilles CARBOU. « Metastability of Wall Configurations in Ferromagnetic Nanowires ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 46.1 (jan. 2014), p. 45-95. ISSN : 0036-1410, 1095-7154. DOI : 10.1137/13090568X.
- [25] Gilles CARBOU et Pierre FABRIE. « Time average in micromagnetism ». In : *Journal of Differential Equations* 147.2 (1998), p. 383-409. ISSN : 0022-0396. DOI : 10.1006/jdeq.1998.3444.
- [26] Gilles CARBOU et Pierre FABRIE. « Regular solutions for Landau-Lifschitz equation in  $\mathbb{R}^3$  ». In : *Communications in Applied Analysis. An International Journal for Theory and Applications* 5.1 (2001), p. 17-30. ISSN : 1083-2564.
- [27] Gilles CARBOU et Pierre FABRIE. « Regular solutions for Landau-Lifschitz equation in a bounded domain ». In : *Differential and Integral Equations. An International Journal for Theory & Applications* 14.2 (2001), p. 213-229. ISSN : 0893-4983.
- [28] Gilles CARBOU et Pierre FABRIE. « Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow ». In : *Advances in Differential equations* 8.12 (2003), p. 1453-1480.
- [29] Gilles CARBOU, Pierre FABRIE et Olivier GUES. « On the ferromagnetism equations in the non static case ». In : *Communications on Pure and Applied Analysis* 3 (2004), p. 367-394.
- [30] Gilles CARBOU, Pierre FABRIE et Olivier GUÈS. « Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 27.7-8 (2002), p. 1467-1495. ISSN : 0360-5302. DOI : 10.1081/PDE-120005845.
- [31] Gilles CARBOU, Pierre FABRIE et Frank JOCHMANN. « A remark on the weak  $\omega$ -limit set for micromagnetism equation ». In : *Applied mathematics letters* 15.1 (2002), p. 95-99.
- [32] Gilles CARBOU et Rida JIZZINI. « Domain walls dynamics in a nanowire subject to an electric current ». In : *Journal of Differential Equations* 258.8 (2015), p. 2941-2965. ISSN : 0022-0396. DOI : 10.1016/j.jde.2014.12.035.
- [33] Gilles CARBOU et Stéphane LABBÉ. « Stability for static walls in ferromagnetic nanowires ». In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 6 (2006).
- [34] Gilles CARBOU et Stéphane LABBÉ. « Stabilization of walls for nano-wires of finite length ». In : *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 18.1 (jan. 2012), p. 1-21. DOI : 10.1051/cocv/2010048.
- [35] Gilles CARBOU, Stéphane LABBÉ et Emmanuel TRÉLAT. « Control of travelling walls in a ferromagnetic nanowire ». In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S* 1.1 (2008), p. 51-59. ISSN : 1937-1632. DOI : 10.3934/dcdss.2008.1.51.
- [36] Gilles CARBOU, Stéphane LABBÉ et Emmanuel TRÉLAT. « Smooth control of nanowires by means of a magnetic field ». In : *Communications on Pure and Applied Analysis* 8.3 (2009), p. 871-879.

- [37] Robin CHATELIN. « Méthodes numériques pour l'écoulement de Stokes 3D : fluides à viscosité variable en géométrie complexe mobile ; application aux fluides biologiques ». Thèse de doct. Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2013.
- [38] Robin CHATELIN, Dominique ANNE-ARCHARD, Marlène MURRIS-ESPIN, Marc THIRIET et Philippe PONCET. « Numerical and experimental investigation of mucociliary clearance breakdown in cystic fibrosis ». In : *Journal of biomechanics* 53 (2017), p. 56-63.
- [39] Thierry COLIN, Cédric GALUSINSKI et Hans G. KAPER. « Waves in ferromagnetic media ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 27.7-8 (2002), p. 1625-1658.
- [40] Gary COOK, J LEE, T TSAI, A KONG, J DEANS, B JOHNSON et E JARDIM. « Clicking Clean : Who is winning the race to build a Green Internet ? » In : *Greenpeace International, Amsterdam, The Netherlands* (2017).
- [41] Jean-François COULOMBEL. « Transparent numerical boundary conditions for evolution equations : Derivation and stability analysis ». Preprint available at <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01369975>. Sept. 2016.
- [42] I.D. COUZIN, J. KRAUSE, R. JAMES, G.D. RUXTON et N.R. FRANKS. « Collective memory and spatial sorting in animal groups ». In : *J. Theoret. Biol.* 218.1 (2002), p. 1-11.
- [43] Maria Veronica D'ANGELO, Harold AURADOU, Catherine ALLAIN et Jean-Pierre HULIN. « Pore scale mixing and macroscopic solute dispersion regimes in polymer flows inside two-dimensional model networks ». en. In : *Physics of Fluids* 19.3 (mar. 2007), p. 033103. ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.2714065.
- [44] Georges DA COSTA et al. « Exascale machines require new programming paradigms and runtimes ». anglais. In : *Supercomputing Frontiers and Innovations, Sustainability in ultrascale computing systems* Hors-série.2 (2015). Nesus, (on line).
- [45] Alexandra DE CECCO. « Fluid Modeling for Network Dynamics ». Theses. Université de Toulouse, juin 2016.
- [46] P. DEGOND et M. DELITALA. « Modelling and simulation of vehicular traffic jam formation ». In : *Kinet. Relat. Models* 1 (2008), p. 279-293.
- [47] Pierre DEGOND et Marcello DELITALA. « Modelling and simulation of vehicular traffic jam formation ». In : *Kinetic & Related Models* 1.2 (2008), p. 279-293.
- [48] Antonio DESIMONE, Robert V. KOHN, Stefan MÜLLER et Felix OTTO. « A reduced theory for thin-film micromagnetics ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 55.11 (2002), p. 1408-1460.
- [49] Lars DIENING. « Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids ». Albert-Ludwigs Universität, 2002.

- [50] Lars DIENING, Petteri HARJULEHTO, Peter HÄSTÖ et Michael RUZICKA. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. T. 2017. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN : 978-3-642-18362-1 978-3-642-18363-8.
- [51] Lars DIENING, Peter HÄSTÖ et Ales NEKVINDA. « Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces ». In : *FSDONA04 Proceedings, Milovy, Czech Republic*. T. 3858. Citeseer, 2004.
- [52] Denys DUTYKH et Efim PELINOVSKY. « Numerical simulation of a solitonic gas in KdV and KdV-BBM equations ». In : *Phys. Lett. A* 378.42 (2014), p. 3102-3110. ISSN : 0375-9601. DOI : 10.1016/j.physleta.2014.09.008.
- [53] M. EHRHARDT et A. ARNOLD. « Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation ». In : *Riv. Mat. Univ. Parma (6)* 4\* (2001). Fluid dynamic processes with inelastic interactions at the molecular scale (Torino, 2000), p. 57-108. ISSN : 0035-6298.
- [54] Matthias EHRHARDT. « Discrete artificial boundary conditions ». Thèse de doct. Technische Universitaät Berlin, 2001.
- [55] Matthias EHRHARDT. « Discrete transparent boundary conditions for Schrödinger-type equations for non-compactly supported initial data ». In : *Appl. Numer. Math.* 58.5 (2008), p. 660-673. ISSN : 0168-9274. DOI : 10.1016/j.apnum.2007.02.002.
- [56] J. C. EILBECK et G. R. MCGUIRE. « Numerical study of the regularized long-wave equation. II. Interaction of solitary waves ». In : *J. Computational Phys.* 23.1 (1977), p. 63-73. ISSN : 0021-9991.
- [57] Emmanuel GRENIER. « Oscillatory perturbations of the Navier Stokes Equation ». In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série* 76 (1997), p. 477-498.
- [58] J. GROLLIER, V. CROS et A. FERT. « Synchronization of spin-transfer oscillators driven by stimulated microwave currents ». In : *Physical Review B* 73.6 (2006), p. 060409.
- [59] Julie GROLLIER, A. CHANTHBOUALA, R. MATSUMOTO, A. ANANE, V. CROS, F. NGUYEN VAN DAU et Albert FERT. « Magnetic domain wall motion by spin transfer ». en. In : *Comptes Rendus Physique* 12.3 (avr. 2011), p. 309-317. ISSN : 16310705. DOI : 10.1016/j.crhy.2011.03.007.
- [60] Housseem HADDAR. « Modèles asymptotiques en ferromagnétisme : couches minces et homogénéisation ». Thèse de doct. Déc. 2000.
- [61] Housseem HADDAR et Patrick JOLY. « Effective boundary conditions for thin ferromagnetic layers : the one-dimensional model ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 61.4 (2001), p. 1386-1417.

- [62] Housseem HADDAR et Patrick JOLY. « Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings ». In : *Journal of computational and applied mathematics* 143.2 (2002), p. 201-236.
- [63] K. HAMDACHE et M. TILIOUA. « On the zero thickness limit of thin ferromagnetic films with surface anisotropy energy ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 11.08 (2001), p. 1469-1490.
- [64] Ward Van HEDDEGHEM, Sofie LAMBERT, Bart LANNOO, Didier COLLE, Mario PICKAVET et Piet DEMEESTER. « Trends in worldwide ICT electricity consumption from 2007 to 2012 ». In : *Computer Communications* 50 (2014). Green Networking, p. 64-76. ISSN : 0140-3664. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2014.02.008>.
- [65] Pierre-Emmanuel JABIN. « Various levels of models for aerosols ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12.07 (2002), p. 903-919.
- [66] Rida JIZZINI. « Etude mathématique d'un modèle de fil ferromagnétique en présence d'un courant électrique ». Thèse de doct. Bordeaux 1, mar. 2013.
- [67] Jean-Luc JOLY, Guy MÉTIVIER et Jeffrey RAUCH. « Global solutions to Maxwell equations in a ferromagnetic medium ». In : *Annales Henri Poincaré* 1 (2000), p. 307-340.
- [68] Patrick JOLY et Olivier VACUS. *Maxwell's equations in a 1D ferromagnetic medium : existence and uniqueness of strong solutions*. INRIA, 1996.
- [69] Patrick JOLY et Olivier VACUS. « Mathematical and numerical studies of non linear ferromagnetic materials ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 33.03 (1999), p. 593-626.
- [70] Clément JOURDANA. « Mathematical modeling and numerical simulation of innovative electronic nanostructures ». Theses. Université Paul Sabatier - Toulouse III ; Università degli studi di Pavia, nov. 2011.
- [71] E. A. KUZNETSOV et V. E. ZAKHAROV. « On three-dimensional solitons, » in : *Sov. Phys. JETP* 39 (1974), p. 285-286.
- [72] Stéphane LABBÉ. « Simulation numérique du comportement hyperfréquence des matériaux ferromagnétiques ». Thèse de doct. Université Paris-Nord-Paris XIII, 1998.
- [73] LALE LANDAU et Evgeny LIFSHITZ. « On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies ». In : *Phys. Z. Sowjetunion* 8.153 (1935), p. 101-114.
- [74] David LANNES. *The Water Waves Problem : Mathematical Analysis and Asymptotics*, t. 188. Mathematical Surveys and Monographs. AMS, 2013.
- [75] Peter LINDQVIST. *Notes on the p-Laplace equation*. Univ., 2006.
- [76] Jacques-Louis LIONS. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. T. 31. Dunod Paris, 1969.

- [77] Marco Ajmone MARSAN, Michele GARETTO, Paolo GIACCONE, Emilio LEONARDI, Enrico SCHIATTARELLA et Alessandro TARELLO. « Using partial differential equations to model TCP mice and elephants in large IP networks ». In : *IEEE/ACM Transactions on Networking* 13.6 (2005), p. 1289-1301.
- [78] E. B. MYERS, D. C. RALPH, J. A. KATINE, R. N. LOUIE et R. A. BUHRMAN. « Current-Induced Switching of Domains in Magnetic Multilayer Devices ». In : *Science* 285.5429 (1999), p. 867-870. DOI : 10.1126/science.285.5429.867. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/285/5429/867.full.pdf>.
- [79] Laurent NAVORET. « Asymptotical and Numerical Methods for Plasma Physics Problems and Social Interactions Models ». Thèse de doct. Université Paul Sabatier - Toulouse III, juin 2010.
- [80] Stuart SP PARKIN, Masamitsu HAYASHI et Luc THOMAS. « Magnetic domain-wall racetrack memory ». In : *Science* 320.5873 (2008), p. 190-194.
- [81] Wojciech PIKATEK, Ariel OLEKSIK et Georges DA COSTA. « Energy and thermal models for simulation of workload and resource management in computing systems ». In : *Simulation Modelling Practice and Theory* 58 (2015), p. 40-54. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.simpat.2015.04.008>.
- [82] Marie-Hélène PILLOT. « Étude expérimentale et modélisation des déplacements collectifs chez le mouton Mérinos (*Ovis aries*) ». Thèse de doct. Toulouse 3, 2010.
- [83] Rajiv RANJAN, Aaron HARWOOD, Rajkumar BUYYA et al. « Grid federation : An economy based, scalable distributed resource management system for large-scale resource coupling ». In : *Grid Computing and Distributed Systems Laboratory, University of Melbourne, Australia* (2004).
- [84] Tristan RIVIÈRE et Sylvia SERFATY. « Limiting domain wall energy in micro-magnetism ». In : (2000).
- [85] A. SHPIRO, P. M. LEVY et S. ZHANG. « Self-consistent treatment of nonequilibrium spin torques in magnetic multilayers ». In : *Phys. Rev. B* 67.10 (mar. 2003), p. 104430. DOI : 10.1103/PhysRevB.67.104430.
- [86] J.C. SLONZEWSKI. « Current-driven excitation of magnetic multilayers ». In : *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 159 (1996), p. 1-7.
- [87] Tomohiro TANIGUCHI, Sumito TSUNEGI, Hitoshi KUBOTA et Hiroshi IMAMURA. « Self-oscillation in spin torque oscillator stabilized by field-like torque ». In : *Applied Physics Letters* 104.15 (2014), p. 152411.
- [88] Marc THIRIET. *Tissue functioning and remodeling in the circulatory and ventilatory systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [89] Maria D. TORRES, Bart HALLMARK, D. Ian WILSON et Loic HILLIOU. « Natural Giesekus fluids : Shear and extensional behavior of food gum solutions in the semidilute regime ». en. In : *AIChE Journal* 60.11 (nov. 2014), p. 3902-3915. ISSN : 00011541. DOI : 10.1002/aic.14611.

- [90] Amir VARASTEH et Maziar GOUDARZI. « Server consolidation techniques in virtualized data centers : A survey ». In : *IEEE Systems Journal* 11.2 (2017), p. 772-783.
- [91] Augusto VISINTIN. « On Landau-Lifshitz'equations for ferromagnetism ». In : *Japan journal of applied mathematics* 2.1 (1985), p. 69-84.
- [92] Muhammad ZAKARYA et Lee GILLAM. « Energy efficient computing, clusters, grids and clouds : A taxonomy and survey ». In : *Sustainable Computing : Informatics and Systems* 14 (2017), p. 13-33.
- [93] Zhongming ZENG, Giovanni FINOCCHIO et Hongwen JIANG. « Spin transfer nano-oscillators ». In : *Nanoscale* 5.6 (2013), p. 2219-2231.
- [94] S. ZHANG, P. M. LEVY et A. FERT. « Mechanisms of Spin-Polarized Current-Driven Magnetization Switching ». In : *Phys. Rev. Lett.* 88.23 (mai 2002), p. 236601. DOI : 10.1103/PhysRevLett.88.236601.
- [95] Chunxiong ZHENG. « Numerical simulation of a modified KdV equation on the whole real axis ». In : *Numer. Math.* 105.2 (2006), p. 315-335. ISSN : 0029-599X. DOI : 10.1007/s00211-006-0044-z.
- [96] Chunxiong ZHENG, Xin WEN et Houde HAN. « Numerical solution to a linearized KdV equation on unbounded domain ». In : *Numer. Methods Partial Differential Equations* 24.2 (2008), p. 383-399. ISSN : 0749-159X. DOI : 10.1002/num.20267.
- [97] Andrea ZISOWSKY. « Discrete transparent boundary conditions for systems of evolution equations ». Thèse de doct. Technische Universität Berlin, 2003.