# Colle de maths-Sujet 1

31 mars 2015

**Exercice 1 :** On considère $U$ et $V$ deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Déterminer la loi de $X = -\ln(U)$ et $Y = -\ln(V)$.
2) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
3) Féterminer la loi de $T = \exp(Z)$. En déduire la loi de $\frac{1}{UV}$.

**Exercice 2 :**

1) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leq a + b.$$

2) On considère les suites de réels positifs $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

2) Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite notée $M(a,b)$. Cette quantité s'appelle la moyenne arithmético-géométrique.
3) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.
4) Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$.

**Rappel :**

Le produit de convolution est

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt.$$