

Colle de maths-Sujet 13

7 avril 2015

Exercice 1 : Un joueur vise une cible avec une fléchette. A chaque lancer, il atteint la cible avec la probabilité p , $0 < p < 1$ et la rate avec probabilité $q = 1 - p$.

Il effectue une série de lancers indépendants.

Il gagne, lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il atteint la cible excède de 2 le nombre de fois où il la rate.

Il perd, lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il rate la cible excède de 2 le nombre de fois où il l'atteint.

La partie s'arrête lorsque le joueur a gagné ou perdu.

On note les événements suivants A_n : "le joueur gagne au n-ème lancer", B_n : "le joueur perd au n-ème lancer", A : "le joueur gagne la partie", B : "le joueur perd la partie".

- 1) Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
- 2) En déduire $P(A)$ et $P(B)$. Déterminer la probabilité que la partie dure indéfiniment.
- 3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers que comporte la partie. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 2 : On définit une suite d'intégrales (I_n) par

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

- 1) Montrer que I_n est convergente pour $n > 0$.
- 2) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est convergente.
- 3) A l'aide d'une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n , déterminer I_n en fonction de n .