

Colle de maths-Sujet 5

31 mars 2015

Exercice 1 : On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - |x|) & \text{si } x \in [-2, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1) Montrer que f est une densité.
- 2) Soit X une variable aléatoire de densité f , Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$ et Z une variable aléatoire à densité, indépendante de Y et telle que $Z + Y = X$. On cherche la loi de Z (on appellera F sa fonction de répartition).
 - a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x + 1) - F(x - 1) = 2f(x).$$

- b) Qu'en déduire pour $x \geq 2$? En déduire $F(u)$ pour $u \geq 1$ et pour $-1 \leq u \leq 1$.
 - c) Terminer la détermination de F et reconnaître la loi de Z .

Exercice 2 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0, telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x + y) = \exp(x)f(y) + \exp(y)f(x).$$

Rappel :

Le produit de convolution est

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t)dt.$$