TP3 : Estimateur du maximum de vraisemblance

1 Exercice 1

1) On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Pour tout entier k, compris entre 1 et n, on note :

$$\overline{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i.$$

A l'aide de la commande plot, représenter l'évolution des $\overline{x}_k$ en fonction de k. Faire ce travail pour différentes valeurs de n ; on prendra $n = 50, 100, 1000$. Commenter les plots obtenus.

2) Soit l'expérience consistant à lancer $n = 10$ fois une pièce de monnaie équilibrée. Réaliser 1000 fois cette expérience aléatoire. Indiquer le nombre de fois que $\overline{x}_n$ sort de l'intervalle $[0.5-a, 0.5+a]$ où $a = 0.1$. En déduire une estimation de la probabilité $\mathrm{P}(|\overline{X}_n - 0.5| \leq a)$ où $a = 0.1$. Refaire le même travail avec $n = 50$, puis avec $n = 100$. Commenter les résultats relativement au fait que l'estimateur $\overline{X}$ est convergent en probabilité.

2 Exercice 2 : Estimation du paramètre d'une loi de Weibull

En fiabilité, la durée de vie X d'un composant électronique est souvent modélisée par une loi de Weibull de paramètre $\theta > 0$. Une variable aléatoire X distribuée selon une loi de Weibull de paramètre θ a pour densité :

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}\exp(-x^{\theta})$$

A noter que quand $\theta = 1$ la loi de Weibull coincide avec la loi Exponentielle de paramètre égal à 1.

L'interprétation du paramètre θ est la suivante. Quand $\theta > 1$ cela signifie que la propension à tomber en panne à l'instant t augmente avec t, quand $\theta < 1$, c'est l'inverse. Enfin, quand $\theta = 1$ la propension à tomber en panne à l'instant t ne dépent pas de t. On entend ici par panne toute défaillance du composant électronique rendant celui-ci hors d'usage.

1) Représenter le graphe de la densité d'une loi de Weibull quand $\theta = 1/2$, 1, et 3. On se limitera à l'intervalle $[0, 4]$ pour x.
   Pour estimer θ on dispose de la durée de vie de $n = 20$ composants, notée $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. On se place dans le cadre du modèle d'échantillonnage, autrement les X_i sont supposés i.i.d., chaque X_i suivant une loi de Weibull de paramètre θ.
   Les données (en milliers d'heures) sont les suivantes :

1.6	1.3	1.1	0.8	1.1	0.8	0.4	0.1	1.3	0.6
0.4	1.6	0.4	0.8	1.3	0.6	0.8	1.3	0.6	0.8

2) Chercher la valeur de θ qui maximise la vraisemblance. On la notera θ^*. On procédera de façon empirique en représentant le graphe de la Log-vraisemblance (ou de la vraisemblance) sur des intervalles $[a, b]$ fixés. On se contentera d'une valeur approchée de θ^* à 10^{-1} près. Quelle estimation de θ par maximum de vraisemblance proposez-vous ?
3) On se propose maintenant d'estimer θ en utilisant le fait que E(X)= $\Gamma(1 + 1/\theta)$.Indication : chercher dans un premier temps une estimation de la durée de vie moyenne du composant électronique, autrement dit de E(X), puis en déduire une estimation de θ.
   Remarque : Il existe sous R, une commande qui permet de résoudre des équations. Par exemple, pour résoudre $f(x) = 3$, sur l'intervalle $[0, 3]$, on utilise la commande :

```
optimize(function(x) abs(3-f(x)), c(0,3))
```

   Pour plus d'informations, aller voir l'aide.
4) Comparer les deux estimations, puis interpréter les résultats obtenus.

3 Exercice 3 : Bonus

Faire la dernière question du TP 1.