Université de Toulouse 2015-2016
L3 SID

TP4 : Simulations de variables aléatoires et applications

1 Méthode de la fonction inverse

Il arrive qu'on ait besoin de simuler des variables aléatoires suivant des lois qui ne sont pas implémentées dans le logiciel. On propose ici une méthode permettant de simuler une variable aléatoire dès lors que l'on peut exprimer la fonction réciproque de sa fonction de répartition.

Propriété : On considère une variable aléatoire continue X de fonction de répartition F strictement croissante. On peut alors montrer que la variable aléatoire $Y = F(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 1 : On veut démontrer la propriété ci-dessus.

1. Quelle est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$?
2. Que peut-on dire de la fonction réciproque de F, F^{-1} ?
3. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction F (utiliser F^{-1}).
4. Conclure.

Méthode : D'après la propriété précédente, si l'on connait explicitement F^{-1}, il suffit de simuler une variable aléatoire U, de loi $\mathcal{U}[0, 1]$ et de considérer

$$X = F^{-1}(U).$$

Exercice 2 :

1. Appliquer cette méthode pour simuler un échantillon de 50 réalisations indépendantes d'une variable aléatoire de loi exponentielle. Rappel :

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \iff F(x) = 1 - \exp(-\lambda x).$$

2. Faire de même pour X suivant une loi normale standard.

2 Algorithme du rejet en dimension 1

Cette méthode permet de simuler une variable aléatoire T de densité $f(t)$, continue, à support compact et bornée (par M), et ce quelque soit f. Par exemple $f(t) = 3/4t^2(2-t)\mathbb{1}_{[0,2]}(t)$.

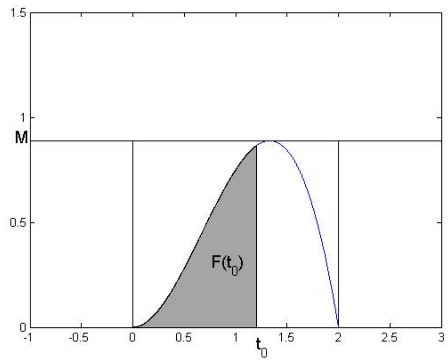

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $f(t)$

Méthode :
- On tire un point aléatoire $A = (x, y)$ dont les coordonnées sont des réalisations des variables aléatoires X et Y telles que $X \sim \mathcal{U}[0, 2]$ et $Y \sim \mathcal{U}[0, M]$.
- Si $y \geq f(x)$, on garde x comme réalisation de T.
- Sinon, on tire un autre point.
- On réitère jusqu'à avoir obtenu le nombre de réalisations voulues.

Exercice 3 : Appliquer cette méthode pour simuler la variable aléatoire X de densité $f_X(x) = \frac{1}{2}\sin(x)\mathbb{1}_{[0,\pi]}$.

3 Méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrale

Théorème (LFGN) : Soit $X_i, i \in \mathbb{N}$ une suite de variables aléatoires iid, telle que $\mathbb{E}(|X_0|) < \infty$. Alors, presque surement :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(|X_0|).$$

Théorème : Soit X une variable aléatoire de densité $f_X(x)$ sur $I \subset \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_I g(x) f_X(x) dx,$$

pour toute fonction $g : I \to R$ continue et telle que la variable aléatoire $g(X)$ soit intégrable.

Méthode : On voudrait obtenir une approximation numérique de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_I g(x) f(x) dx.$$

Alors, si on a bien $\int_I f(x)dx = 1$, on peut voir cette intégrale comme une espérance et appliquer la méthode de Monte-Carlo comme suit.
<u>Précision</u> : si l'intervalle I est différent de $\mathbb{R}$ tout entier, il est possible de considérer une densité à support borné ou compact (fonction indicatrice) de telle sorte que le calcul de l'espérance soit cohérent avec les bornes d'intégration.

- Pour n fixé, simuler un échantillon, $(x_i, i = 1...n)$ de n réalisations d'une variable aléatoire X de densité $f(x)$.
- Calculer $y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$.
- y_n fournit une estimation de $\mathcal{A} = \mathbb{E}(g(X))$.
- Si l'on sait évaluer I de façon analytique, mais que le résultat dépend, par exemple de e ou π, cette méthode nous permet d'obtenir une approximation numérique de ces nombres.

Exercice 4 : Appliquer la méthode de Monte-Carlo à l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} e^x sin(x)dx$$

Dans un second temps, effectuez ce calcul d'intégrale. Donnez l'approximation numérique obtenue.