Université de Toulouse 2013-2014
L3 MMESI

TP5

1 Test de Neyman Pearson

Exercice 1 On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. On souhaite tester l'hypothèse H_0 : "$\theta = \theta_0$" contre l'alternative H_1 : "$\theta = \theta_1$" où $\theta_0 < \theta_1$

1. Montrer que le test de rapport de vraisemblance est fondé sur la statistique $S = X_1 + \cdots + X_n$.
2. Sachant que si Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbb{P}(Y > 1.64) = 0.05$, expliciter la région de rejet du test de niveau 5%.
3. Que pouvez-vous dire sur la puissance de ce test ?
4. On désire cette fois tester l'hypothèse $\mathcal{H}_0$: "$\theta \leq 0$" contre l'hypothèse $\mathcal{H}_1$: "$\theta > 0$". Montrer que le modèle est une famille à rapport de vraisemblances monotones.
5. Déterminer le test de puissance maximale de niveau α donné.
6. Un radar actif de surveillance aérienne a des caractéristiques telles qu'une éventuelle cible réfléchit 20 impulsions lors d'un balayage. A l'aide d'un traitement adapté, ces N impulsions réfléchies en cas de présence de la cible fournissent un vecteur d'observations (z_i) avec

$$\mathcal{H}_1 : z_i = A + b_i \text{ en présence de cible} \tag{1}$$
$$\mathcal{H}_0 : z_i = b_i \text{ en l'absence de cible} \tag{2}$$

   où les b_i sont des variables aléatoires gaussiennes $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendantes modélisant les divers bruits.

   (a) Donner le test de Neyman Pearson de niveau α de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$. Réaliser l'application numérique avec $A = 1, \sigma = 0.6$ et $\alpha = 10^{-6}$

   (b) Simuler n échantillons, chacun de taille N, sous l'hypothèse nulle. Appliquer le test de Neyman Pearson et calculer la fréquence empirique des fausses détections.

   (c) Faire la même chose sous l'alternative et calculer la fréquence empirique des cibles non détectées.

2 Graphiques bi-variés

`plot` : c'est la fonction de base pour afficher des points avec deux coordonnées. Elle re-crée un graphique à chaque appel, et place des points selon deux axes.

`legend` : cette fonction permet d'ajouter une légende.

Exemple 1 `plot(T[,c(1,3)], pch = ifelse(T$SEX == 1,25,26), col = ifelse(T$SEX == 1,"blue","red"))`
`legend("bottomleft", c("H","F"), col = c("blue","red"), pch = c(25,26))`

Le premier paramètre de la fonction `plot` – si c'est une table ayant au moins deux colonnes – ou les deux premiers paramètres – si ce sont des vecteurs – donnent les coordonnées des points à dessiner. Autres paramètres :

`pch` un (vecteur d')entier(s) indiquant le(s) symbole(s) à utiliser ;

`col` un (vecteur de) couleur(s) indiquant le(s) couleur(s) à utiliser (`"black"` par défaut, on peut utiliser `"blue"`, `"red"`,..., la commande `colors()` retourne la liste des couleurs possibles) ;

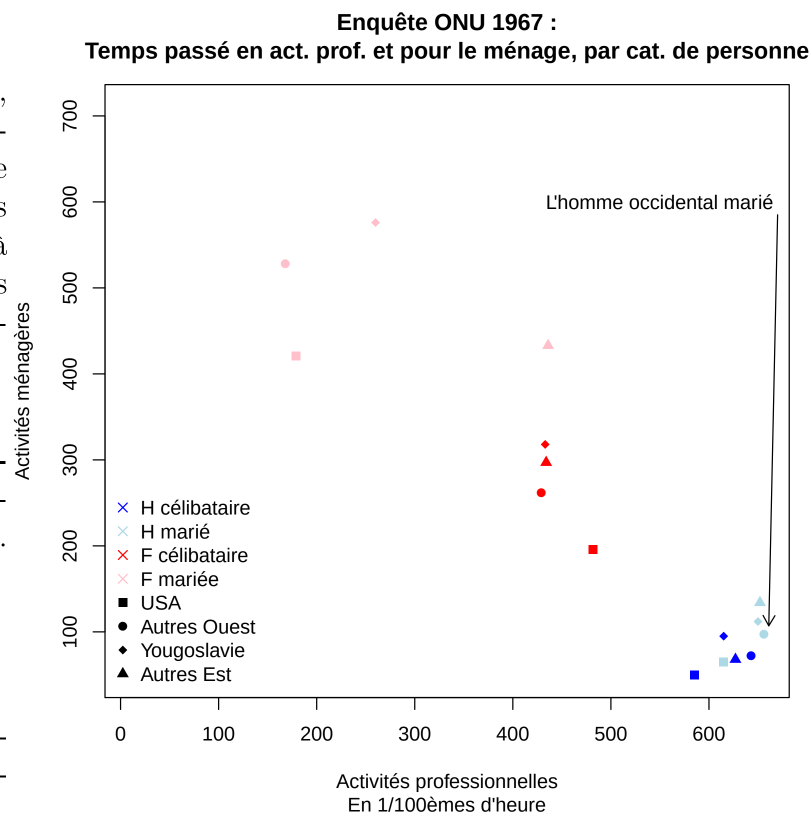
`xlim, ylim` les limites des axes horizontaux et verticaux (par défaut, les limites sont calculées de manières à faire rentrer exactement tous les points) ;

`xlab, ylab` les labels des axes horizontaux et verticaux (par défaut, les noms des variables) ;

`main` le titre du graphique (en gras, centré au-dessus du graphique) ;

`sub` le sous-titre du graphique (centré au-dessous du graphique).

Exercice 2 Créer le graphique ci-contre, avec des couleurs distinctes pour distinguer les hommes des femmes, ainsi que leur statut marital. (Il faut utiliser les fonctions `text`, pour d'ajouter du texte à un graphique, et `arrows`, pour ajouter des flèches (la fonction `lines` permet d'ajouter des lignes).



Créer des graphiques dans des fichiers C'est possible à l'aide des fonctions `pdf`, `tiff`, `png`, `jpeg` entre autres. Par exemple : `pdf(mon_fichier.pdf)`
... *instructions graphiques* ...
`def.off()`

Pour aller plus loin Le manuel d'introduction à `R` (cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf) contient une liste de fonctions graphiques, ainsi qu'une liste de paramètres que peuvent accepter ces fonctions (page 68).