# Rappels sur les trinômes

Tatiana Labopin-Richard

## 1 Définitions

**Définition 1.1** *On appelle polynôme du second degré ou trinôme tout expression de la forme*

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

*où, $a$, $b$ et $c$ sont des réels et $a \neq 0$.*

**Définition 1.2** *On appelle discriminant de $P$ le nombre*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

## 2 Etude des racines de $P$

**Propriété 2.1** *L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède :*
- *aucune solution réelle si $\Delta < 0$.*
- *une unique solution réelle $x_0 = \frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$.*
- *deux solutions rélles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.*

**Preuve** On commence par transformer l'expression du polynôme pour qu'elle soit plus manipulable. On appelle cela la forme canonique.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) && (1)\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] && (2)\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] && (3)\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right] && (4)
\end{aligned}$$

Ainsi, nous distinguons les cas :
1) Si $\Delta > 0$, on peut utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ce qui donne

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec $x_1$ et $x_2$ définis dans la propriété, qui sont donc les racines de $P$.
2) Si $\Delta = 0$, nous avons

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

avec $x_0$ défini dans la propriété, qui est donc la seule racine.
3) Si $\Delta < 0$, alors

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right] > 0$$

et donc le polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

# 3 Etude du signe de $P$

**Propriété 3.1** *Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est*
- *toujours du signe de a si $\Delta < 0$.*
- *toujours du signe de a mais s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$.*
- *du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé de a à l'intérieur des racines si $\Delta > 0$.*

**Preuve**
Reprenons la forme obtenue lors de la preuve de la propriété précédente.
1) Si $\Delta > 0$, nous avons

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Un tableau de signe nous permet alors de conclure :

| Valeurs de $x$ | $-\infty$ $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $(x - x_1)$ | - | + | + |
| Signe de $(x - x_2)$ | - | - | + |
| Signe de $(x - x_1)(x - x_2)$ | + | - | + |
| Signe de $P(x)$ | signe de a | signe opposé de a | signe de a |

2) Lorsque $\Delta = 0$,

$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$

Un carré étant toujours positif, $P$ est du signe de $a$ et s'annule en $x_0$.

3) Lorsque $\Delta < 0$, nous avons déjà vu que

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta}{(2a)^2}\right] > 0.$$

Ainsi, $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$ est donc toujours du signe de $a$.

# 4 Bilan