

# Notes de cours de mathématiques

## 1 Probabilités

### 1.1 Quelques rappels

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat est soumis au hasard. On lui associe l'**ensemble fondamental**  $\Omega$  formé de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. L'ensemble  $\Omega$  peut être fini ou infini.

Un **événement**  $A$  est une partie (sous-ensemble) de  $\Omega$  ( $A \subset \Omega$ ). Un **événement élémentaire** est un singleton  $\{\omega\}$  de  $\Omega$  ( $\omega \in \Omega$ ). Notons les deux événements particuliers :  $\Omega$  est l'événement **certain** et  $\emptyset$  est l'événement **impossible**.

Si  $A \subset \Omega$  et  $B \subset \Omega$  sont des événements, on note

- $A \cup B$  : l'événement  $A$  **ou**  $B$  est réalisé
- $A \cap B$  : les événements  $A$  **et**  $B$  sont réalisés
- $\bar{A}$  : l'événement  $A$  **n'est pas** réalisé

Il existe une définition mathématique de la notion de probabilité que nous ne donnerons pas. Intuitivement, la probabilité d'un événement  $A$  (notée ici  $Pr(A)$ ) est la mesure de la place qu'il occupe dans  $\Omega$ . Il est alors clair que  $Pr(A) \in [0; 1]$ .

On a bien entendu  $Pr(\emptyset) = 0$  et  $Pr(\Omega) = 1$  mais attention, si  $Pr(A) = 0$  alors  $A$  n'est pas forcément égal à  $\emptyset$  (c'est-à-dire,  $A$  n'est pas forcément impossible).

On a les propriétés

- $A \subset B \implies Pr(A) \leq Pr(B)$
- $Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A)$
- $Pr(A) = Pr(A \cap B) + Pr(A \cap \bar{B})$
- $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$  ( $A$  et  $B$  incompatibles)  $\implies Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$

**Remarque 1** Si  $\Omega$  est un ensemble fini et si tous les événements élémentaires ont la même probabilité ( $1/\text{Card}(\Omega)$ ) on a alors, pour tout événement  $A$  :

$$Pr(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

### 1.2 Probabilités conditionnelles

On considère deux événements  $A$  et  $B$ . La **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant  $B$  est définie par :  $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$ .

$$\text{On a : } Pr(B|B) = 1, \quad Pr(A|B) + Pr(\bar{A}|B) = 1 \text{ et } Pr(B|A) = \frac{Pr(B)}{Pr(A)} \cdot Pr(A|B).$$

#### 1.2.1 Indépendance

Les événements  $A$  et  $B$  sont dits **indépendants** si  $Pr(A \cap B) = Pr(A) \times Pr(B)$ . On a la propriété :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff Pr(A|B) = Pr(A).$$

### 1.2.2 La formule des probabilités totales

On considère des événements  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . S'ils forment une partition de  $\Omega$  (c'est-à-dire, s'ils sont deux à deux disjoints et si leur réunion est égale à  $\Omega$ ) on dit qu'ils forment un **système de probabilité totale** ou un **système complet d'événements**. On a alors la formule :

$$Pr(A) = Pr(A|B_1).Pr(B_1) + Pr(A|B_2).Pr(B_2) + \dots + Pr(A|B_k).Pr(B_k).$$

Cas particulier :  $Pr(A) = Pr(A|B).Pr(B) + Pr(A|\bar{B}).Pr(\bar{B})$ .

### 1.3 Variables aléatoires discrètes

On fait une expérience aléatoire menant à un ensemble fondamental  $\Omega$ . Intuitivement, une variable aléatoire  $X$  est une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Là encore, il existe une définition mathématique plus correcte qu'on ne donnera pas ici.

Une variable aléatoire  $X$  est dite **discrète** si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est un sous-ensemble fini ou infini dénombrable de  $\mathbb{R}$ . Si par contre, l'ensemble de ses valeurs est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on dit qu'elle est **continue**.

Dans tout ce qui suit, on ne s'intéresse qu'aux variables aléatoires discrètes même si les définitions données peuvent « facilement » s'adapter au cas continu.

#### 1.3.1 Fonction de répartition

C'est la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = Pr(X \leq x)$ . Elle a quelques propriétés :

- $F$  est une fonction en escalier,
- $Pr(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ ,
- $F$  est croissante,
- $\lim_{-\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{+\infty} F(x) = 1$ ,
- $Pr(X > a) = 1 - Pr(X \leq a) = 1 - F(a)$ .

#### 1.3.2 Loi de probabilité

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète avec pour ensemble de valeurs  $\{x_1, x_2, \dots\}$ , sa loi de probabilité est définie par tous les  $p_i = Pr(X = x_i)$ . Bien sûr, on a  $\sum_i p_i = 1$ .

#### 1.3.3 Moyenne et Variance

Comme dans le cas des statistiques, on peut définir moyenne (ou plutôt **espérance mathématique**) et variance d'une variable aléatoire  $X$ .

Si  $x_1, x_2, x_3, \dots$  sont les valeurs de  $X$ , alors l'espérance mathématique et la variance de  $X$  sont respectivement

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i Pr(X = x_i) \\ Var(X) &= \sum_i [(x_i - E(X))^2 Pr(X = x_i)] \\ &= \left( \sum_i x_i^2 Pr(X = x_i) \right) - \left( \sum_i x_i Pr(X = x_i) \right)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

### 1.3.4 Combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes

On dit que deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a

$$Pr(X = x \text{ et } Y = y) = Pr(X = x) \times Pr(Y = y).$$

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels, on a :

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a :

$$Var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 Var(X) + \beta^2 Var(Y).$$

Attention, la formule sur la moyenne est vraie même si les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes. Par contre, la formule sur les variances nécessite l'hypothèse d'indépendance.

### 1.3.5 Lois usuelles discrètes

On se contente de donner ici les lois les plus usuelles avec leurs paramètres.

**Loi de Bernoulli**  $B(p)$  Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0; 1]$  si elle ne prend que deux valeurs : 0 et 1, avec  $Pr(X = 1) = p$ . La loi de probabilité de  $X$  est alors

$$Pr(X = 1) = p \quad \text{et} \quad Pr(X = 0) = 1 - p,$$

et on a  $E(X) = p$  et  $Var(X) = p(1 - p)$ .

**Loi Binomiale**  $B(n, p)$  On fait de façon indépendante  $n$  fois la même expérience de Bernoulli  $B(p)$ . Plus précisément, on répète  $n$  fois, de manière indépendante, la même expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : les événements  $A$  et  $\bar{A}$ , avec  $Pr(A) = p$ . La variable  $X$  correspond alors au nombre de fois où le résultat de l'expérience a été  $A$ .

Les valeurs de  $X$  sont donc  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , sa loi est

$$Pr(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

et on a  $E(X) = np$  et  $Var(X) = np(1 - p)$ .

Rappel :  $n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$  avec  $0! = 1$ .

**Loi de Poisson**  $\mathcal{P}(\lambda)$  On l'appelle parfois la loi des « événements rares ». Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda > 0$  si ses valeurs sont  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  et sa loi de probabilité est :

$$Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Notons que l'ensemble des valeurs de  $X$  n'est pas fini mais est infini dénombrable.

Un calcul (pas forcément évident) donne alors  $E(X) = Var(X) = \lambda$ .

**Remarque 2** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y$  une loi  $\mathcal{P}(\mu)$  et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors la somme  $X + Y$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

**Approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson** On suppose que  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . Si  $n \geq 30$  ( $n$  grand),  $p \leq 0.1$  ( $p$  petit) et  $np \leq 10$  alors on peut supposer que  $X$  suit approximativement une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  avec  $\lambda = np$ . Les conditions de validité de cette approximation ne sont ni standard ni « optimales » ; tout dépend de la finesse que l'on souhaite donner à cette approximation.

## 2 Fonctions : Généralités

### 2.1 Domaine de définition

Une fonction  $f$  est habituellement donnée par une expression  $y = f(x)$  et, par définition, le **domaine de définition** (noté  $\mathcal{D}f$ ) de  $f$  est constitué de l'ensemble des nombres réels  $x$  pour lesquels l'expression  $f(x)$  a un sens. On pourra alors écrire

$$\begin{aligned} f &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

dès que  $I$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{D}f$ .

### 2.2 Composition des fonctions $f$ et $g$

Par définition,  $f \circ g : x \mapsto (f \circ g)(x) := f(g(x))$ .

En particulier,  $x$  est dans  $\mathcal{D}(f \circ g)$  si l'expression  $g(x)$  a un sens (autrement dit si  $x$  est dans  $\mathcal{D}g$ ) et si l'expression  $f(g(x))$  a aussi un sens (autrement dit si  $g(x)$  est dans  $\mathcal{D}f$ ).

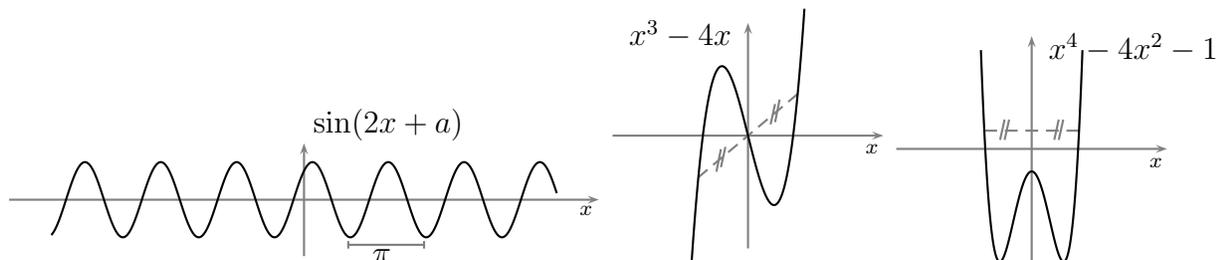
**Exemple :** Soient  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = \sqrt{x-2}$ . Alors  $f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ . De plus,  $f(x)$  n'a de sens que si  $x \neq 0$  et comme la racine carrée n'est définie que pour des nombres positifs ou nuls,  $g(x)$  n'a de sens que si  $x - 2 \geq 0$  ( $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^*$  et  $\mathcal{D}g = [2, \infty[$ ). On en déduit que  $f \circ g(x)$  a un sens si  $x \geq 2$  et  $\sqrt{x-2} \neq 0$  ( $\mathcal{D}(f \circ g) = ]2, +\infty[$ ).

### 2.3 Représentation graphique

- La fonction  $f$  est **périodique de période  $T$  ou  $T$ -périodique** si  $f(x + T) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}f$  ; il suffit alors de connaître  $f$  sur un intervalle de longueur  $T$  pour la connaître sur  $\mathcal{D}f$  entier.
- La fonction  $f$  est **impaire** si  $f(-x) = -f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}f$  ;  $(0, 0)$  est alors centre de symétrie du graphe de  $f$ .
- La fonction  $f$  est **paire** si  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}f$  ; l'axe des  $y$  est alors axe de symétrie du graphe de  $f$ .

**Exemples :**

- $f$  définie par  $f(x) = \sin(2x + a)$  est  $\pi$ -périodique.
- $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 4x$  est impaire.
- $f$  définie par  $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$  est paire.



## 2.4 Sens de variation

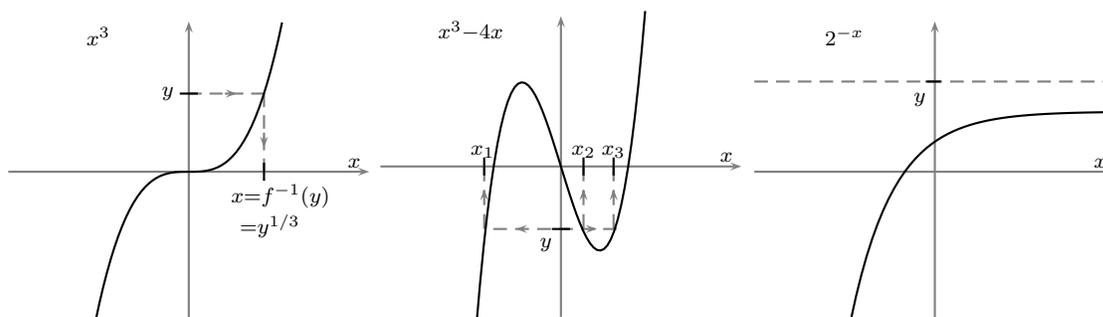
- $f$  est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur  $I$  si  
 $\forall x, y \in I, x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$  (resp.  $f(x) > f(y)$ ).
- $f$  est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur  $I$  si  
 $\forall x, y \in I, x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  (resp.  $f(x) < f(y)$ ).
- $f$  est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur  $I$  si elle est croissante sur  $I$  ou décroissante sur  $I$  (resp. strictement croissante sur  $I$  ou strictement décroissante sur  $I$ ).

## 2.5 Fonction réciproque

L'application  $f : I \rightarrow J$  est une **bijection** de  $I$  sur  $J$  si pour tout  $y$  de  $J$ , il existe un unique  $x$  dans  $I$  tel que  $f(x) = y$ . Dans ce cas, on peut définir la **fonction réciproque de  $f$** , notée  $f^{-1}$ , par  $f^{-1}(y) = x$  si  $f(x) = y$ ;  $f^{-1}$  est alors une bijection de  $J$  sur  $I$  et  $(f \circ f^{-1})(y) = y$  pour tout  $y$  de  $J$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  pour tout  $x$  de  $I$ .

**Exemples :**

- La fonction  $f(x) = x^3$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $f(x) = x^3 - 4x$  n'est pas bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (pour certaines valeurs  $y$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe plusieurs réels  $x$  tels que  $f(x) = y$ ).
- La fonction  $f(x) = 2^{-x}$  n'est pas bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (pour certaines valeurs  $y$  dans  $\mathbb{R}$ , il n'existe pas de réel  $x$  tels que  $f(x) = y$ ).



Pour une fonction  $f : I \rightarrow J$  avec  $J = f(I)$  ( $f(I) := \{f(x), x \in I\}$ ), on a le critère suivant : si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $J$ .

## 3 Deux fonctions classiques : exp et ln

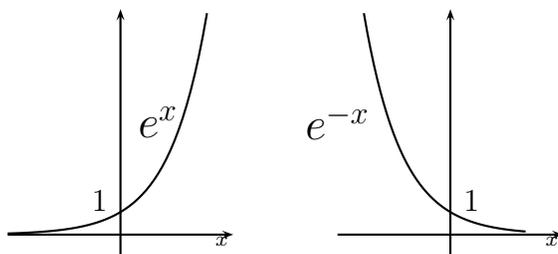
### 3.1 L'exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^x \quad \text{avec } e \approx 2,718\dots \end{aligned}$$

#### 3.1.1 Propriétés classiques

- formules usuelles :  $e^{a+b} = e^a e^b$ ;  $e^0 = 1$ ;  $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ ;  $e^{ab} = (e^a)^b$ .
- sens de variation : l'exponentielle est strictement croissante.
- limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

### 3.1.2 Graphes



## 3.2 Le Logarithme Népérien

$$\begin{aligned} \ln : ]0; +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln x \end{aligned}$$

### 3.2.1 Propriétés classiques

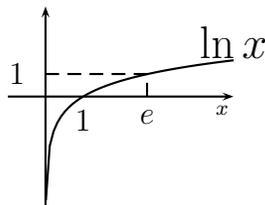
Si  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $\alpha$  réel,

- formules usuelles :  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ;  $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$ ;  $\ln 1 = 0$ ;  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ ;

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

- sens de variation :  $\ln$  est strictement croissante.
- limites :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

### 3.2.2 Graphe



## 3.3 Relations exp / ln

Les fonctions  $\ln$  et  $\exp$  sont réciproques l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ \exp(\ln x) &= x \quad \text{pour tout } x > 0. \end{aligned}$$

On peut aussi l'exprimer par

$$y = e^x \iff x = \ln y \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*.$$

**Remarque 3** Les fonctions  $\log_a$ .

En biologie, chimie ou physique, on utilise parfois des logarithmes  $\log_a$  de base  $a$  où  $a$  est un réel strictement positif (par exemple  $a = 10$ ). Ce logarithme est défini par la relation suivante :

$$y = a^x \iff x = \log_a y.$$

Bien sûr, la fonction  $\ln$  est le logarithme  $\log_e$  de base  $e$ . Il est assez simple de vérifier la relation

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

pour tout  $y > 0$ .

## 4 Fonctions : limites et continuité

### 4.1 Limites d'une fonction

Dans cette section, on ne donnera pas les définitions « mathématiques » des notions de limites mais seulement les limites usuelles et les règles de calcul. On rappelle juste que rechercher la limite d'une fonction, c'est déterminer si cette fonction s'approche d'une valeur particulière lorsque la variable s'approche d'une valeur donnée (finie ou infinie).

#### 4.1.1 Limites classiques

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{array}$$

#### 4.1.2 Comparaison des fonctions $\ln$ , $\exp$ et puissance

Pour tout  $a$  réel et  $x > 0$ , on définit les fonctions puissances  $x^a := e^{a \ln x}$ .

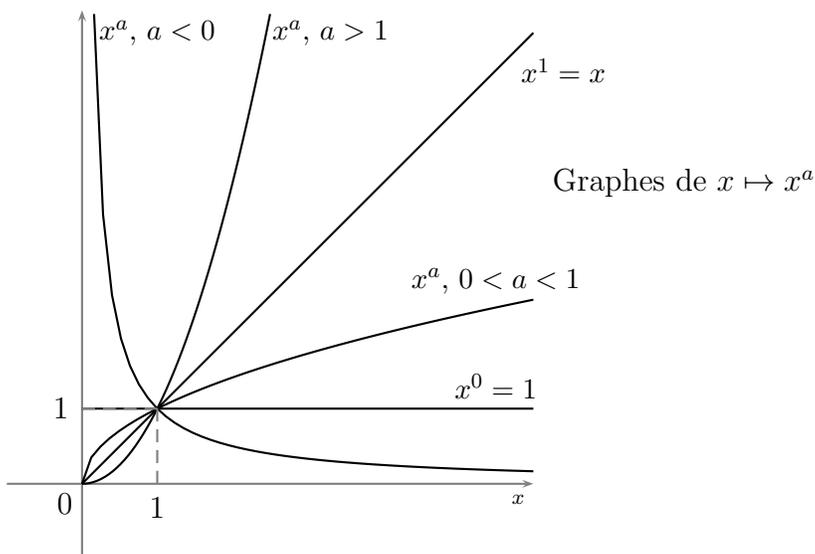
Règles générales de comparaisons :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^a x^b = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^a}{e^{ax}} = 0$$

$$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$$

$$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax} x^b = 0$$



On résume souvent cela en : « Dans le cas d'une forme indéterminée, les puissances l'emportent sur les logarithmes et l'exponentielle l'emporte sur les puissances ».

#### 4.1.3 Propriétés

**Théorème des gendarmes** Soient  $f, g$  et  $h$  des fonctions définies autour de  $x_0$  (sauf, éventuellement, en  $x_0$ ) et telles que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , pour tout  $x$  de ce voisinage ( $x \neq x_0$ ). Si  $f$  et  $g$  admettent la même limite  $l$  en  $x_0$ , alors  $l$  est aussi la limite de  $h$  en  $x_0$ .

**Opérations sur les limites** On peut résumer les différents comportements par les tableaux suivants :

|                                       |                                 |            |                    |            |
|---------------------------------------|---------------------------------|------------|--------------------|------------|
| $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $-\infty$  | $l \in \mathbb{R}$ | $+\infty$  |
|                                       | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | $-\infty$  | $l \in \mathbb{R}$ | $+\infty$  |
|                                       | $-\infty$                       | $-\infty$  | $-\infty$          | <b>IND</b> |
|                                       | $l' \in \mathbb{R}$             | $-\infty$  | $l + l'$           | $+\infty$  |
|                                       | $+\infty$                       | <b>IND</b> | $+\infty$          | $+\infty$  |

|                                    |                                 |            |           |            |           |            |
|------------------------------------|---------------------------------|------------|-----------|------------|-----------|------------|
| $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $-\infty$  | $l < 0$   | $0$        | $l > 0$   | $+\infty$  |
|                                    | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | $-\infty$  | $l < 0$   | $0$        | $l > 0$   | $+\infty$  |
|                                    | $-\infty$                       | $+\infty$  | $+\infty$ | <b>IND</b> | $-\infty$ | $-\infty$  |
|                                    | $l' < 0$                        | $+\infty$  | $ll'$     | $0$        | $ll'$     | $-\infty$  |
|                                    | $0$                             | <b>IND</b> | $0$       | $0$        | $0$       | <b>IND</b> |
|                                    | $l' > 0$                        | $-\infty$  | $ll'$     | $0$        | $ll'$     | $+\infty$  |
|                                    | $+\infty$                       | $-\infty$  | $-\infty$ | <b>IND</b> | $+\infty$ | $+\infty$  |

|  |  |                      |           |           |             |            |
|--|--|----------------------|-----------|-----------|-------------|------------|
| $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$                        | $l \in \mathbb{R}^*$ | $0^+$     | $0^-$     | $\pm\infty$ | $0$        |
|  | $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$ | $\frac{1}{l}$        | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$         | <b>IND</b> |

**Remarque 4** • **IND** signifie qu'il s'agit d'une forme indéterminée. On ne peut pas conclure directement. On doit transformer l'expression pour éliminer la forme indéterminée. Il existe d'autres formes indéterminées dont il faut se méfier, comme «  $1^\infty$  ». Par exemple, lorsque  $x$  tend vers  $\infty$ , l'expression  $(1 + \frac{1}{x})^x$  ne tend pas vers 1 mais vers  $e$ .

- On a donné les règles de calculs pour des limites en  $x_0$  réel mais elles restent valables pour des limites en  $\pm\infty$ .

## 4.2 Continuité

Soit  $f$  une fonction et  $x_0 \in \mathcal{D}f$ ; on suppose que  $\mathcal{D}f$  contient un voisinage de  $x_0$  (i.e., on suppose qu'il existe un intervalle  $]a, b[$  inclus dans  $\mathcal{D}f$  et contenant  $x_0$ ).

**Définition 1**  $f$  est continue en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Proposition 1** 1. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$ , alors  $f + g$  et  $fg$  sont aussi continues en  $x_0$ ; si, de plus,  $g(x_0) \neq 0$ , on a également  $f/g$  continue en  $x_0$ .

2. Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

**Définition 2**  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

**Remarque 5 Prolongement par continuité** : si  $f$  est une fonction non définie en  $a \in \mathbb{R}$ , mais définie « autour » de  $a$  (i.e. si  $f$  est définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$  sauf en  $a$ ) et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et est finie, on peut prolonger  $f$  par continuité en  $a$  en posant

$f(a) = \lim_{x \xrightarrow{\neq} a} f(x)$ . Parfois, on voudra distinguer  $f$  (non définie en  $a$ ) et son prolongement (dont le domaine de définition est  $\mathcal{D}f \cup \{a\}$ ).

Par exemple,  $f$  définie par  $f(x) = x \cos(\frac{1}{x})$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x)$  si  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $g(0) = 0$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ;  $g$  est le prolongement par continuité de  $f$  à  $\mathbb{R}$  tout entier.

## 5 Fonctions : dérivabilité

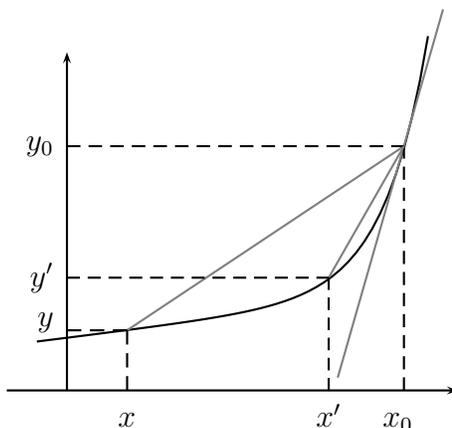
### 5.1 Définition, calcul pratique

#### 5.1.1 Définition, interprétation géométrique

Un des intérêts de la notion de dérivée est de pouvoir approcher localement le graphe d'une fonction  $f$  par une droite. Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $x \neq x_0$ , le rapport

$$t_{x,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est appelé **taux d'accroissement** de  $f$  entre  $x$  et  $x_0$ . C'est la pente de la corde entre les points  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x, f(x))$ . Plus  $x$  est proche de  $x_0$ , plus la corde approche bien la courbe.



**Définition 3** Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **dérivable en  $x_0$**  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe. On appelle alors  $f'(x_0)$  cette limite. Si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ , on dit que  $f$  est **dérivable sur  $I$**  et on note  $f' : x \mapsto f'(x)$  sa dérivée. Autrement dit,  $f$  est dérivable en  $x_0$  si l'application

$$t_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto t_{x_0}(x) = t_{x,x_0}$$

admet une limite en  $x_0$  (et cette limite est  $f'(x_0)$ ).

Ainsi  $f'(x_0)$  s'interprète naturellement comme la pente de la tangente à la courbe de  $f$  en  $x_0$ . Plus précisément, si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors la courbe représentative de  $f$  admet une tangente en  $(x_0, f(x_0))$  et l'équation de cette tangente est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

## 5.1.2 Propriétés

Le tableau suivant donne les dérivées usuelles :

|         |                         |               |       |           |            |                                       |
|---------|-------------------------|---------------|-------|-----------|------------|---------------------------------------|
| $f(x)$  | $x^a, a \in \mathbb{R}$ | $\ln(x)$      | $e^x$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$  | $\tan(x)$                             |
| $f'(x)$ | $ax^{a-1}$              | $\frac{1}{x}$ | $e^x$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ |

On peut énoncer quelques autres propriétés :

1. La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.
2. On peut avoir une inclusion stricte  $\mathcal{D}f' \subset \mathcal{D}f$  (exemple :  $f(x) = \sqrt{x}$ ).
3. **Ne pas oublier !!!** : si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$  mais la réciproque est fautive (exemple :  $|x|$  en 0).
4. On définit également  $f'_d(x_0)$  et  $f'_g(x_0)$ , les dérivées à droite et à gauche en  $x_0$ . Bien entendu,  $f'_d(x_0)$  et  $f'_g(x_0)$  peuvent exister et être différentes ; on a en fait :

$$f'(x_0) \text{ existe} \iff i) f'_d(x_0) \text{ et } f'_g(x_0) \text{ existent} \quad \text{et} \quad ii) f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

**Dans ce cas**, on a alors  $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

## 5.1.3 Dérivées et opérations

On suppose que  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables en  $x_0$ . Alors  $f + g$  et  $fg$  sont dérivables en  $x_0$  avec

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ et } (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Si, de plus, on a  $g(x_0) \neq 0$ , alors  $\left(\frac{f}{g}\right)$  est aussi dérivable en  $x_0$  avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Enfin, si, de plus,  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  avec

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0)).$$

En utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée on peut démontrer les formules suivantes :

$$(f^a)' = af' \times f^{a-1}, \quad (\exp f)' = f' \times \exp f, \quad (\ln f)' = \frac{f'}{f}.$$

De même, si  $f$  est bijective et dérivable, de dérivée non nulle, alors  $f^{-1}$  est également dérivable et on a

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

## 5.2 Résultats

### 5.2.1 Monotonie

Soit  $f$  dérivable sur  $I = ]a, b[$ . Alors :

- $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \geq 0$  sur  $I$ .
- $f$  strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \geq 0$  sur  $I$  et ne s'annule qu'en des points isolés de  $I$ .
- $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \leq 0$  sur  $I$ .
- $f$  strictement décroissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \leq 0$  sur  $I$  et ne s'annule qu'en des points isolés de  $I$ .

## 5.2.2 Extrema

**Définition 4** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ .

- $x_0$  est un **maximum local** (resp. un **minimum local**) de  $f$  s'il existe un intervalle ouvert  $J \subset I$  tel que  $f(x) \leq f(x_0)$  (resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) pour tout  $x$  de  $J$ .
- Un **extremum** désigne soit un maximum, soit un minimum.

**Théorème 1** Soit  $f : I = ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable en  $x_0 \in I$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

**Remarque 6** 1. La "réciproque" est fautive. On peut avoir  $f'(x_0) = 0$  en un point  $x_0$  où  $f$  est dérivable sans que ce point soit un extremum (exemple :  $f(x) = x^3$  et  $x_0 = 0$ ).

2. Ainsi, lorsque  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  ouvert, les extrema de  $f$  sont à chercher parmi les points critiques (là où la dérivée s'annule).

3. **Attention!!!** Ce qui précède ne vaut que pour  $]a, b[$  (intervalle ouvert); si l'on cherche les extrema d'une fonction  $f$  sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , il faut également regarder ce qui se passe aux bornes de l'intervalle (en  $a$  et en  $b$ ). Par exemple, le maximum de  $f$  définie par  $f(x) = x$  sur  $[0, 1]$  est en 1 bien que  $f'(1) = 1 \neq 0$ .

## 6 Intégration

Dans ce chapitre,  $f$  désigne une fonction (au moins) continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 6.1 Primitives

**Définition 5** Une **primitive** de  $f$  est une fonction dérivable  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $F' = f$ . On note souvent  $F = \int f$  ou bien  $F(x) = \int^x f(t)dt$ .

Les primitives de  $f$  sont définies à une constante additive près. Si  $F$  est une primitive de  $f$  et  $\lambda$  un réel, alors  $F + \lambda$  est aussi une primitive de  $f$ . Réciproquement, si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f$  alors  $F_1 - F_2$  est une constante.

Le tableau suivant donne les primitives usuelles :

|        |     |                       |               |       |           |            |
|--------|-----|-----------------------|---------------|-------|-----------|------------|
| $f(x)$ | 1   | $x^a, a \neq -1$      | $\frac{1}{x}$ | $e^x$ | $\cos(x)$ | $\sin(x)$  |
| $F(x)$ | $x$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ | $\ln x $      | $e^x$ | $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |

Comme pour la dérivation, l'opération de « primitivation » est linéaire :

**Proposition 2** Si  $F$  (resp.  $G$ ) est une primitive de  $f$  (resp.  $g$ ) et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels, alors  $\lambda F + \mu G$  est une primitive de  $\lambda f + \mu g$ .

### 6.2 Intégrales

**Définition 6** L'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est le nombre réel

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b := F(b) - F(a),$$

où  $F$  est une primitive de  $f$  (cette définition ne dépend pas du choix de la primitive  $F$ ).

**Proposition 3** •  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$

•  $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt ; \quad \int_a^a f(t) dt = 0.$

•  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$  (relation de Chasles).

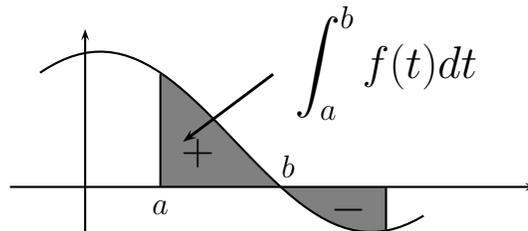
• Si  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$  dans  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0.$

• La valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$

**Proposition 4** Si  $c$  est un réel dans  $[a, b]$ , la fonction  $x \in [a, b] \mapsto \int_c^x f(t) dt \in \mathbb{R}$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $c$ .

### 6.3 Interprétation géométrique

Le graphe de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  est par exemple :



Le réel  $\int_a^b f(t) dt$  est la somme algébrique des aires de la partie du plan délimitée par les droites  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  et la courbe de  $f$  ; ces aires étant comptées positivement si  $f$  est positive et négativement si  $f$  est négative.

### 6.4 Quelques techniques de calcul

#### 6.4.1 Changement de variable

La formule donnant la dérivée d'une composée de deux fonctions (voir chapitre sur la dérivation) donne

$$\int^x f'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = f(\varphi(x)).$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \int^x e^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx &= e^{\varphi(x)} \\ \int^x \varphi(x)^\alpha \varphi'(x) dx &= \frac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{avec } \alpha \neq -1 \\ \int^x \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx &= \ln(|\varphi(x)|) \\ \int^x \sin(\varphi(x)) \varphi'(x) dx &= -\cos(\varphi(x)) \\ \int^x \cos(\varphi(x)) \varphi'(x) dx &= \sin(\varphi(x)) \end{aligned}$$

## 6.4.2 Intégration par parties

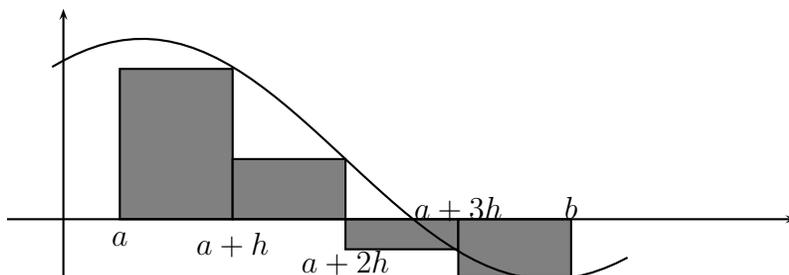
En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions, on obtient facilement

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

## 6.5 Intégration numérique

Dans certains cas, on ne sait pas calculer explicitement une primitive de la fonction, ou bien on ne dispose pas de l'expression de la fonction mais seulement de valeurs expérimentales en des points discrets, mais on souhaite quand même calculer une valeur approchée de l'intégrale de la fonction sur un intervalle  $[a, b]$  donné. Dans ce cas, on approche la fonction sur des sous-intervalles de  $[a, b]$  par une fonction constante ou une fonction affine.

### 6.5.1 Méthodes des rectangles

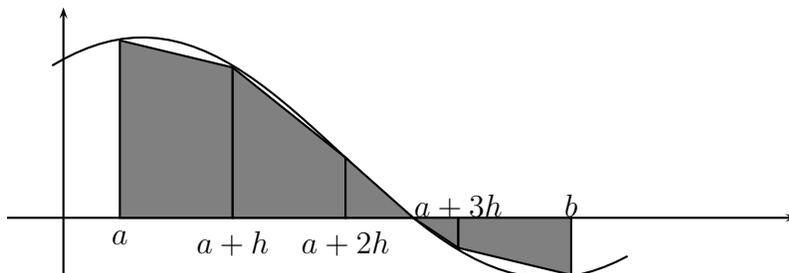


Sur chaque intervalle, l'aire à calculer est celle d'un rectangle. Dans le cas d'une subdivision régulière de l'intervalle en  $n$  morceaux, on obtient :

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{k=1}^n f(a + kh) \text{ avec } h = \frac{b - a}{n}.$$

Dans notre cas, on a choisi arbitrairement d'utiliser la valeur de la fonction à droite de la subdivision. On a des formules équivalentes en utilisant la valeur de la fonction à gauche de l'intervalle, ou au milieu de l'intervalle.

### 6.5.2 Méthodes des trapèzes



Sur chaque intervalle, l'aire à calculer est celle d'un trapèze. Dans le cas d'une subdivision régulière de l'intervalle en  $n$  morceaux, on obtient :

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{f(a + kh) + f(a + (k + 1)h)}{2} \right) \text{ avec } h = \frac{b - a}{n}.$$

## 7 Equations différentielles

Une **équation différentielle d'ordre  $k$  en la fonction  $f$**  est une équation faisant intervenir  $t$ ,  $f(t)$  et les dérivées successives de  $f$  au point  $t$ , jusqu'à la dérivée  $k$ -ième :

$$\mathcal{F}(t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(k)}(t)) = 0. \quad (1)$$

**Exemples :**

- $t^3 f''(t) + f'(t) \cos(f(t)) = e^t$ ,
- $\frac{f''(t)}{f(t)^2} = \ln t$ .

**Résoudre (1)** consiste à trouver toutes les fonctions  $f$  qui vérifient (1) sur un certain intervalle  $I$ .

### 7.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

#### 7.1.1 Définitions

Ce sont les équations différentielles du type

$$a(t)f'(t) + b(t)f(t) = g(t) \quad (2)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $g$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$ .

On suppose que la fonction  $a$  **ne s'annule pas** sur  $I$ . Sinon, on se place sur un sous-intervalle de  $I$  sur lequel la fonction  $a$  ne s'annule pas.

Si la fonction  $g$  est la fonction identiquement nulle, on dit que l'équation (2) est homogène.

Si la fonction  $g$  n'est pas la fonction identiquement nulle, on appelle **équation différentielle homogène associée à (2)** l'équation différentielle suivante :

$$a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0. \quad (3)$$

Le résultat suivant assure que l'équation (2) admet des solutions :

**Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz)** *On suppose que les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $g$  sont continues sur  $I$  et que  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ . Si  $t_0 \in I$  et  $\gamma$  est réel, il existe une unique fonction  $f$  qui vérifie (2) pour tout  $t$  dans  $I$  et telle que  $f(t_0) = \gamma$ .*

La condition  $f(t_0) = \gamma$  s'appelle une **condition initiale**.

#### 7.1.2 Méthode de résolution

La résolution de (2) se fait en deux ou trois étapes :

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée à  $E$  (3).

**Remarque 7 Important** *La fonction nulle  $N(t) = 0$  pour tout  $t$  est une solution de (3). L'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz dit alors que si  $h(t)$  est une solution de (3) telle qu'il existe  $\tau \in \mathbb{R}$  vérifiant  $h(\tau) = 0$  alors forcément on a  $h = N$ . Autrement dit, la seule solution de (3) qui puisse s'annuler est la fonction nulle (constamment égale à 0).*

Cherchons donc une solution non nulle  $f$  de (3). Elle ne s'annule pas donc on peut diviser par  $f$  :

$$\begin{aligned}
 a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0 &\Leftrightarrow a(t)f'(t) = -b(t)f(t) \\
 &\Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{b(t)}{a(t)} \\
 &\Leftrightarrow \ln |f(t)| = -\int \frac{b(t)}{a(t)} dt + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow |f(t)| = e^C e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}, \quad C \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow f(t) = K e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}, \quad K \in \mathbb{R}^*.
 \end{aligned}$$

On en déduit le résultat suivant

**Théorème 3** Les solutions de (3) sont toutes les fonctions du type  $h(t) = Ke^{\lambda(t)}$ , où  $K \in \mathbb{R}$  est une constante et  $\lambda$  est une primitive de  $-\frac{b}{a}$ .

2. On résout l'équation complète.

**Théorème 4** La solution générale de (2) est donnée par :

$$f = \text{Solution de (3)} + \text{Solution particulière de (2)},$$

c'est-à-dire que les solutions de (2) sont toutes les fonctions du type

$$f(t) = Ke^{\lambda(t)} + f_{part}(t),$$

avec  $K \in \mathbb{R}$  et  $f_{part}$  une solution particulière de (2).

La recherche de cette solution particulière  $f_{part}$  est souvent guidée par le problème concret lié à l'équation différentielle.

Sinon, une méthode permet souvent de trouver les solutions de (2) en utilisant la forme des solutions de (3). Il s'agit de la méthode dite **méthode de la variation de la constante**. Son principe est décrit ci-dessous :

on a résolu l'équation homogène (3) dont les solutions sont  $h(t) = Ke^{\lambda(t)}$  où  $K$  est une **constante** et  $\lambda$  une primitive de  $-b/a$ . On cherche alors les solutions de (2) sous la forme  $f(t) = C(t)e^{\lambda(t)}$  où maintenant  $C$  représente une **fonction** de  $t$  et non plus une constante. On a donc  $f'(t) = C'(t)e^{\lambda(t)} + \lambda'(t)C(t)e^{\lambda(t)}$ . En reportant dans (2) on voit que :

$$\begin{aligned}
 f \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow a(t)\left(C'(t)e^{\lambda(t)} + \lambda'(t)C(t)e^{\lambda(t)}\right) + b(t)C(t)e^{\lambda(t)} = g(t) \\
 &\Leftrightarrow a(t)\left(C'(t)e^{\lambda(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}C(t)e^{\lambda(t)}\right) + b(t)C(t)e^{\lambda(t)} = g(t) \\
 &\Leftrightarrow C'(t) = \frac{g(t)}{e^{\lambda(t)}a(t)}.
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer ... pour trouver la fonction  $C$ .

Les solutions de (2) seront les fonctions

$$f(t) = (C(t)) + Ke^{\lambda(t)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions : à chaque constante  $K$  correspond une solution.

**Remarque 8** *Il ne faut pas croire que cette méthode de variation de la constante soit une méthode miracle. En effet, si on essaie de résoudre avec cette méthode l'équation  $f'(t) + 2tf(t) = 1$ , on est ramené à trouver l'expression de la fonction  $K(t)$  vérifiant  $K'(t) = e^{t^2}$ , ce qui n'a rien d'évident ...*

- Si on dispose d'une condition initiale du type  $f(t_0) = \gamma$ , alors on peut déterminer la constante  $K$  et la solution devient unique.

## 7.2 Résolution numérique des équations linéaires d'ordre 1

Dans certains cas, on ne peut pas résoudre explicitement les équations différentielles (on ne sait pas calculer les primitives nécessaires). Dans ce cas, il existe des méthodes de résolution numérique.

L'une d'entre elles est la méthode d'Euler explicite. L'idée est, à partir des conditions initiales, d'approcher, à chaque pas de temps, la courbe de la solution par sa tangente. Autrement dit, si on connaît  $f(t)$ , on estime que  $f(t+\delta t) \simeq f(t) + f'(t)\delta t$ . Comme  $f$  est solution d'une équation différentielle d'ordre 1, il ne reste plus qu'à exprimer, grâce à cette équation,  $f'(t)$  en fonction de  $t$  et  $f(t)$ .

**Exemple :** Résolution numérique de l'équation différentielle  $f'(t) - 2f(t) = 4$  avec la condition initiale  $f(0) = 1$ .

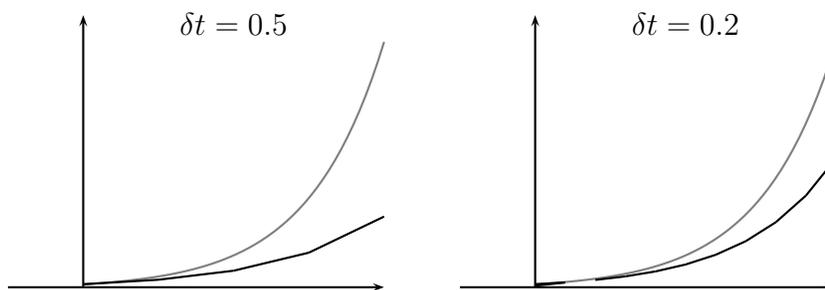
On note  $t_n = t_0 + n\delta t$  et  $y_n$  une approximation de  $f(t_n)$ .

On part de  $t_0 = 0, y_0 = f(t_0) = 1$ . D'après l'équation différentielle, on a  $f'(t) = 4 + 2f(t)$ .

On a donc les relations de récurrence  $t_n = t_{n-1} + \delta t$  et

$$\begin{aligned} y_n &\simeq f(t_n) \\ &= f(t_{n-1} + \delta t) \\ &\simeq f(t_{n-1}) + f'(t_{n-1})\delta t \\ &= f(t_{n-1}) + (4 + 2f(t_{n-1}))\delta t \\ &\simeq y_{n-1} + (4 + 2y_{n-1})\delta t \\ &= (1 + 2\delta t)y_{n-1} + 4\delta t. \end{aligned}$$

Graphiquement, cela donne



Plus le pas est petit, meilleure est l'approximation, mais cela augmente considérablement le temps de calcul. De plus, on s'éloigne toujours de plus en plus de la solution théorique car, sauf au premier pas, on ne prend pas la bonne valeur pour la dérivée. Dans notre exemple, à chaque itération, on a tendance à sous-estimer la pente de la courbe.