Oraux blanc BCPST2

10 juin 2015

1 Sujet 7

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ecrire une fonction informatique de paramètre n, qui renvoie A^n.
b) Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n I_3.$$

c) En déduire A^n pour tout n. Comparer le résultat pour différents n avec la question a).
d) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
e) Retrouver à nouveau la réponse à la question c).
f) La formule est-elle toujours vraie lorsque $n \in \mathbb{Z}$?

Rappels : En Python, on entre un matrice avec la commande array. Par exemple, pour entrer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, on utilise le code

```
array([1, 2, 3], [4, 5, 6])
```

De plus, pour multiplier deux matrices A et B, on utilise la fonction dot(A, B) et non A*B qui sert à faire le produit des matrices coefficient par coefficient.

2 Sujet 8

On considère les suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = & u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = & 3u_n - 2v_n - w_n \ (1) \\ w_{n+1} = & -v_n + w_n \end{cases}$$

1) Ecrire un programme informatique permettant, lorsque l'on donne n, d'obtenir u_n, v_n et w_n. Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement asymptotique de ces suites (vous pouvez tracer des courbes pour illustrer vos propos) ?
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = (u_n, v_n, w_n)^T$ (vecteur colonne). Déterminer une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$

3) En déduire une expression de X_n en fonction de A et de n.
4) Diagonaliser A.
5) Donner l'expression des termes généraux des suites en fonction de n.

3 Sujet 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$.

1) Ecrire un programme informatique permettant d'obtenir la valeur de ces deux suites, lorsque l'on entre n en paramètre. Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement asymptotique de ces suites (vous pouvez tracer u_n en fonction de n pour illustrer vos propos) ?
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone et convergente.
3) Montrer que : $\forall x \geq 0,\ \arctan(x) \leq x$. En déduire que : $\forall n \geq 1,\ u_n \geq v_n$.
4) A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que

$$\forall k \geq 1,\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \geq \frac{\sqrt{k}}{k+1}.$$

En déduire que :

$$\forall n \geq 1,\ u_n - v_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(1+k)^2}$$

puis qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n - v_n \leq \frac{C}{n}.$$

5) La suite (v_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

4 Sujet 10

Soient (u_n) une suite de réels positifs et (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n}{u_n+1}$.

1) Choisissez deux suites (u_n), une dont la série converge et l'autre dont la série diverge et étudier informatiquement la convergence de la série des v_n sur ces exemples.
2) Montrer (théoriquement maintenant) que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge aussi.
3) Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
4) Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n}{n! - 3^n}$.

5 Sujet 11

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi géométriques de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = p(1-p)^n.$$

1) Ecrire une programme permettant de simuler la loi de X et de Y lorsqu'on se donne p. Comment pourrait-on estimer la variance et l'espérance de ces lois, grÃćce à votre programme ?
2) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
3) On note T la variable aléatoire égale à $X - Y$ si $X > Y$ et à 0 sinon. Déterminer la loi de T.
4) Les variables aléatoires T et Z sont-elles indépendantes ?

6 Sujet 12

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge lorsque les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent. On pose alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p. On note $V = \min(X, Y)$ et $W = X - Y$.

1) Ecrire un programme permettant de simuler la loi de X, celle de Z puis celle de W. Comment estimer les espérances des ces lois grÃćce à votre programme ?
2) Déterminer la loi du couple (V, W). En déduire les lois de V et de W.
3) Montrer que V et W sont indépendantes.
4) Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi satisfiasanr :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = n) \neq 0.$$

Les variables V et W sont définies comme précédemment. Montrer que si V et W sont indépendantes, alors X et Y suivent une loi géomatréique dont on précisera les paramètres.