Suites et raisonnements avec des ϵ - Correction des exercices

Tatiana Labopin-Richard

Exercice 1 : Montrer que toute suite convergente est bornée.

Correction : Soit (u_n) une suite qui converge vers l. Cela signifie que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \ / \ n \geq N \ \Rightarrow \ |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Pour $\epsilon = 1$ (c'est une valeur arbitraire !), il existe donc N tel que pour $n \geq N$, $|u_n - l| \leq 1$. Donc à partir de ce rang, $|u_n| \leq 1 + |l|$.

L'ensemble $\{|u_n|, n \in \{0, N\}\}$ étant fini, il est majoré par un M_0. Le réel

$$M = \max(1 + l, M_0)$$

est alors un majorant de $\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$ et donc la suite est bornée.

Exercice 2 : Montrer qu'une suite de nombres entiers relatifs convergente est stationnaire.

Correction : Soit (u_n) une telle suite et l sa limite. On applique l'assertion de la convergence en l avec $\epsilon = \frac{1}{3}$. Il existe alors un rang à partir duquel

$$|u_n - l| \leq \frac{1}{3}.$$

Pour n et m au-delà de ce rang, nous avons donc

$$|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1.$$

Comme u_n et u_m sont des entiers, $u_n = u_m$ et la suite est stationnaire.

Remarque : La contrainte que nous avions sur ϵ était ici $2\epsilon < 1$.

Exercices 3 : Soit (u_n) une suite convergente, de limite l. Montrer que la suite de terme général $v_n = \sup(\{u_k, k \geq n\})$ converge aussi vers l.

Correction : Observons d'abord que (v_n) est bien définie. (u_n) est bornée donc la borne supérieure existe.

Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \epsilon$. Au delà de ce rang, nous avons donc $l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon$.

Ainsi, $l + \epsilon$ est un majorant de u_n donc $v_n \leq l + \epsilon$. Nous avons donc, à partir de ce rang N,

$$l - \epsilon \leq v_n \leq l + \epsilon.$$

Donc $|v_n - l| \leq \epsilon$.

Donc la suite (v_n) converge vers l.

Exercice 4 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers l et l' avec $l < l'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

Correction : Posons $m = \frac{l+l'}{2}$. On a $u_n \to l < m$. Pour $\epsilon = m - l > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$, $|u_n - l| < \epsilon$ et donc $u_n < m$.

De manière symétrique, il existe un rang n_1 au delà duquel $v_n > m$. Et donc, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$u_n < m < v_n.$$

Exercice 5 : Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0.$$

Déterminer la limite de (u_n).

Correction : Comme $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to 0 < \frac{1}{2}$, il existe un rang à partir duquel $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2}$, c'est à dire

$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$$

et donc par récurrence,

$$\forall n \geq N, \ |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}}|u_N|.$$

et par comparaison, (u_n) tend vers 0.

Exercice 6 : Soit K un réel strictement supérieur à 1 et (ϵ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \epsilon_n}{K}.$$

La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?

Correction : Soit $\epsilon > 0$. Comme (ϵ_n) converge vers 0, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $0 \leq \epsilon_n \leq \epsilon$. Donc $\forall n \geq N,\ 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n+\epsilon}{K}$. On en déduit :

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{K^2} + \frac{\epsilon}{K^2} + \frac{\epsilon}{K}$$

et par récurrence,

$$\forall p,\ 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\epsilon}{K^i}.$$

La suite (u_n) est majorée par 1 et on peut écrire :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\epsilon}{K}\frac{1-(1/K)^p}{1-(1/K)} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\epsilon}{K-1}.$$

Pour p assez grand, $\frac{1}{K^p} \leq \epsilon$ donc

$$0 \leq u_{n+p} \leq \epsilon + \frac{\epsilon}{K-1} = \lambda\epsilon$$

ce qui permet de conclure.