Borne Inférieure, borne supérieure - Correction des exercices

Tatiana Labopin-Richard

1 Exercices :

1.1 Exercice 1 :

Ecrire la partie précédente pour la borne inférieure au lieu de la borne sup.

1.2 Correction de l'Exercice 1 :

Voir cours.

1.3 Exercice 2 :

Déterminer les bornes supérieure et inférieure (si elles existent) de $A = \{(u_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ si n est impair.

1.4 Correction de l'exercice 2 :

- $(u_{2k})_{2k}$ tend vers l'infini donc A n'a pas de borne supérieure.
- Tous les termes sont positifs et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0 donc $\inf(A) = 0$.

1.5 Exercice 3 :

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Vrai ou Faux ?
1) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2) $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
3) $A \subset B \Rightarrow \inf(A) \leq \inf(B)$.
4) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
5) $\sup(-A) = -\inf(A)$.
6) $\sup(A) + \inf(B) \leq \sup(A + B)$.

1.6 Correction de l'Exercice 3 :

1) Pour montrer l'égalité, on va montrer les ingéalités dans les deux sens.
Soit $(a, b) \in A \times B$.

$$a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$$

donc $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$. Comme $\sup(A + B)$ est le plus petit des majorants,

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$

Soit $(a, b) \in A \times B$.

$$a + b \leq \sup(A + B)$$

donc

$$a \leq \sup(A + B) - b$$

donc $\sup(A + B) - b$ est un majorant de A donc

$$\sup(A) \leq \sup(A + B) - b.$$

Mais alors

$$b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$$

et donc $\sup(A + B) - \sup(A)$ est un majorant de B donc

$$\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A).$$

C'est donc vrai.

2) $A \subset B$. Soit $(a, b) \in A \times B$.

$$a \leq b \Rightarrow \sup(A) \leq b$$

et comme $b \leq \sup(B)$, il vient

$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

C'est donc vrai.

3) C'est faux, comme le montre le contre-exemple $A = [0, 1]$ et $B = [-2, 4]$.

4) Montrons à nouveau les inégalités dans les deux sens.
$A \cup B \subset A$ donc $\sup(A \cup B) \leq \sup(A)$. De même, on montre que $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$ et donc

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B)).$$

Soit $a \in A$, on a alors $a \in A \cup B$. Donc $a \leq \sup(A \cup B)$. Donc $\sup(A \cup B)$ est un majorant de a. Donc $\sup(A) \leq \sup(A \cup B)$. De la même manière on montre que $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$ et donc

$$\max(\sup(A), \sup(B)) \leq \sup(A \cup B)$$

et c'est donc vrai.

5) Soit $a \in A$.

$$\sup(A) \geq a \geq \inf(A) \;\Rightarrow\; -\sup(A) \leq -a \leq -\inf(A).$$

Donc $-\inf(A)$ est un majorant de $-A$ et donc

$$\sup(-A) \leq -\inf(A).$$

Par ailleurs,

$$-a \geq \sup(-A) \Rightarrow a \geq -\sup(-A).$$

Donc $-\sup(-A)$ est un minorant de A et

$$\inf(A) \geq -\sup(-A) \Rightarrow -\inf(A) \leq \sup(-A).$$

C'est donc vrai.

6) $a + b \leq \sup(A + B)$. Donc

$$a \leq \sup(A+B) - b \leq \sup(A+B) + \sup(-B) = \sup(A+B) - \inf(B).$$

Donc

$$\sup(A) \leq \sup(A+B) - \inf(B)$$

et c'est vrai.

1.7 Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

1.8 Correction de l'Exercice 4 :

La fonction f_n est dérivable avec

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = nx^{n-1} - (n+1)x^n.$$

On en déduite qye f_n est croissante de sur $[0, x_n]$ et décroissante sur $[x_n, 1]$ avec $x_n = \frac{n}{n+1}$. Donc

$$M_n = \underset{x\in[0,1]}{f_n(x)} = f_n(x_n) = (1 - \frac{1}{n+1})^n \frac{1}{n+1}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.