Séance de soutien PCSI2 numéro 6 : Corrections des exercices de dénombrement

Tatiana Labopin-Richard

7 janvier 2015

Exercice 1 :

1a) cela revient à tirer les 3 jetons simultanément. Un tel tirage est contitué de deux jetons pairs pris parmi 4 : $\binom{4}{2}$ choix et d'un jeton impair pris parmi 5 : $\binom{5}{1}$ choix. Le nombre total de tirages est donc

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 30.$$

1b) Dans une telle situation, le premier tirage est celui d'un jeton pair parmi 4. Il reste alors 8 jetons. Le deuxième tirage est celui d'un jeton parmi 8. Il reste 7 jetons. Le troisième tirage est celui d'un jeton parmi 7. On obtient finalement un nombre de tirages total égal à

$$\binom{4}{1}\binom{8}{1}\binom{7}{1} = 4 \times 8 \times 7 = 224.$$

2a) Nous raisonnons maintenant avec remise. il y a trois façons de placer deux pairs et un impair car $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$. Pour chaque tirage d'un jeton pair, il y a 4 valeurs possibles et pour le tirage du jeton impair, il y en a 5. Notre nombre de tirages est donc

$$3 \times 4 \times 4 \times 5 = 240.$$

2b) Le premier tirage est celui d'un jeton pair parmi 4. le deuxième et le troisième sont ceux d'un jeton parmi 9. On obtient donc

$$4 \times 9 \times 9 = 180.$$

Exercice 2 :

Le nombre de façons de placer les deux lettres "C" est $\binom{6}{2}$. le nombre de façons de placer ensuite les deux "T" est $\binom{4}{2}$. Il y a ensuite deux façons de ranger les lettres "L" et "R". Le nombre d'anagrammes est donc

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = 180.$$

Exercice 3 :

1) Une telle main est constituée d'un roi parmi 4 et de 4 non roi parmi 28. Le nombre de telles mains est donc

$$\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 81900.$$

2) le contraire de "au moins un roi" est "aucun roi". Le nombre de mains avec aucun roi est $\binom{28}{5}$. Le nombre total de mains est $\binom{32}{5}$. Le nombre de mains est donc

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096.$$

3) On distingue deux types de mains contenant un roi et trois piques. Les mains qui contiennent le roi de pique et les autres. Une main du premier type est constituée du roi de pique et de deux piques différents du roi, donc pris parmi 7 et de deux cartes n'étant ni des rois, ni des piques, donc pric parmi 21. Ainsi, le nombre de telles mains est

$$\binom{1}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2} = 4410.$$

Le même raisonnement pour le deuxième type conduit à

$$\binom{3}{1} \times \binom{7}{3} \times \binom{21}{1} = 2205.$$

Exercice 4 :

Une telle application est entièrement déterminée par son image, qui est une partie formée de n éléments de F. Il y a $\binom{p}{n}$ parties à n éléments dans F et donc autant d'applications strictement croissantes.

Exercice 5 :

1) Il y en a autant que de parties de E privé de A, c'est à dire 2^{n-p}.

2) Il y en a autant que de parties de E privé de A à $m-p$ éléments, c'est à dire $\binom{n-p}{m-p}$.
3) Une fois X à m éléments contenant A déterminé, il y a 2^{n-m} choix de Y possibles et donc le nombre de couples vaut

$$\sum_{m=p}^{n} \binom{m-p}{n-p} 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} 2^{n-p-k} = 3^{n-p}.$$