Dérivabilité - Théorèmes de Rolle, théorème des accroissements finis et inégalité de Taylor Young-Correction des exercices

Tatiana Labopin-Richard

26 février 2015

1 Le théorème de Rolle

Exercice 1 : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, n fois dérivable. Montrer que si f s'annule $(n+1)$ fois alors sa dérivée n-ième s'annule au moins une fois.

Correction : Les hypothèses de l'exercice suggèrent directement qu'il va falloir appliquer le théorème de Rolle n fois de suite.

Commençons par un résultat intermédiaire. Supposons qu'une fonction dérivable $f : I \mapsto \mathbb{R}$ s'annule aux points $a_0 < a_1 < \dots a_n$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$ car f est continue sur $[a_{i-1}, a_i]$ et dérivable sur $]a_{i-1}, a_i[$ et vérifie $f(a_{i-1}) = f(a_i) = 0$. Ainsi, $\exists b_i \in]a_{i-1}, a_i[$ tel que $f'(b_i) = 0$. Puisque les $b_1, \dots, b_n$ vérifient $a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < a_{n-1} < b_n < a_n$, ces éléments sont deux à deux distincts. Ainsi, nous venons de démontrer que si une fonction dérivable f s'annule $(n+1)$ fois, sa dérivée s'annule n fois.

Par suite, si f est n fois dérivable et s'annule $(n+1)$ fois, sa dérivée s'annule au moins n fois, sa dérivée seconde s'annule au moins $(n-1)$ fois et plus généralement, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ s'annule $(n+1-k)$ fois. En particulier, $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 2 : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Soient a, b et c trois points distincts de I. Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d).$$

Correction :

Réflexion au brouillon :

Nous sommes dans le cas où il faut construire une bonne fonction. C'est une application de l'exercice précédent pour $n = 2$. Nous cherchons donc à exhiber une fonction g qui vérifiera d'une part $g''(d) = 0$ implique l'inégalité voulue et d'autre part $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. Voyons comment arriver à la construction d'une telle fonction. Nous noterons

$$R = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

dans la suite.

Comme $g''(d) = 0$ implique notre égalité, on peut chercher une fonction g telle que

$$g''(d) = R - \frac{1}{2}f''(d)$$

soit comme R ne dépend pas de d, une fonction g vérifiant

$$g''(x) = R - \frac{1}{2}f''(x)$$

mais pour appliquer le résultat de l'exercice précédent, il faut aussi que

$$g(a) = g(b) = g(c) = 0.$$

On remarque de plus, que nous pouvons en fait trouver un g qui vérifie l'équation multipliée par n'importe quelle constante C :

$$g''(x) = RC - \frac{1}{2}f''(x)C$$

puisque lorsqu'on annulera $g''(d)$ on annulera les constantes.

Une première idée consiste à essayer de primitiver la fonction g de la manière la plus simple possible. f'' se primitive facilement en f et puis devant R, il nous faut un polynôme de degré 2 à coefficient dominant $\frac{1}{2}$. Pour simplifier les choses, on peut prendre le poynômes $(x-a)(x-b)$ qui s'annule en a et en b, ce qui rendra plus facile à gérer les conditions $g(a) = g(b) = 0$. Recherchons donc une fonction de la forme

$$g(x) = -\frac{1}{2}f(x) + \frac{R(x-a)(x-b)}{2} + h(x)$$

où la fonction h est à ajuster pour avoir $g(a) = g(b) = g(c) = 0$ et ne doit pas intervenir dans la dérivée seconde de g.

Pour vérifier la condition $g(a) = g(b) = 0$, on peut penser à tout multiplier par $2(b-a)$ (voir la remarque sur les constantes), ce qui permet de trouver h. Nous recherchons donc finalement une fonction g vérifiant

$$g(x) = (b-a)f(x) + (a-x)f(b) + (x-b)f(a) + R(b-a)(b-x)(a-x)$$

Reste à vérifier que $g(c) = 0$, ce qui est bien le cas, vu la valeur de R.
Preuve propre :
Considérons la fonction

$$g : x \mapsto (b-a)f(x) + (a-x)f(b) + (x-b)f(a) + R(b-a)(b-x)(a-x)$$

La fonction g est régulière, elle s'annule en a, en b et en c, donc, par le théorème de Rolle (et le résultat de l'exercice précédent), $\exists d \in I$, tel que $f''(d) = 0$. Ceci résout l'exercice.

Exercice 3 : Soit $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que la limite de f en l'infini soit nulle. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction :
Réflexion au brouillon : Dans cet exercice, on sent bien qu'il faudrait appliquer le théorème de Rolle. Mais nous n'avons pas les bonnes hypothèses ! Il nous faut donc construire un segment sur lequel on peut appliquer le théorème. Dans ce genre d'exercice, il peut être intéressant de faire un dessin. Pour trouver les bornes du théorème, il suffit de dérouler les hypothèses (on sent par exemple bien que la limite finie en l'infini nous permettra de régler le problème de la borne de droite).
Preuve au propre : Remarquons d'abord que lorsque f est constante, la propriété est immédiate. Si ce n'est pas la cas, il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$. Posons alors $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$ qui est une valeur intermédiaire à $f(0)$ et $f(x_0)$. Par le TVI, il existe $a \in]0, x_0[$ tel que $f(a) = y$. Nous avons notre borne de gauche.
Puisque la limite de f en l'infini est $f(0)$, y est valeur intermédiaire à $f(x_0)$ et uen valeur $f(x_1)$ avec x_1 suffisamment grand. Par le TVI, il existe donc $b \in]x_0, x_1[$ tel que $f(b) = y$. Nous avons notre borne de droite.
On peut conclure en appliquant le théorème de Rolle sur $[a, b]$.

Exercice 4 : Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(a) = f'(a),\ f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = f''(c).$$

Correction :

Réflexion au brouillon : A nouveau, il va falloir trouver une bonne fonction. Il nous faut une fonction telle que la dérivée fera apparaître $f(x) - f''(x)$. Nous n'avons pas accès à une primitive de f, mais nous connaissons une fonction qui ne change pas lorsqu'on la dérive : la fonction exponentielle ! Cherchons alors la fonction à poser. Nous voulons une fonction g telle que $g'(c) = 0$ implique $f(c) = f''(c)$. On recherche donc quelque chose de la forme

$$g''(x) = f(x) - f''(x).$$

Comme on ne peut pas primitiver f mais que l'on sait que la dérivé $\exp(x)f(x)$ sera intervenir du $f(x)$, on va se servir de cette astuce. Attention ce pendant, la dérivée d'un produit faisant apparaître une somme, il va falloir compenser le terme en trop.

$$(\exp(x)f(x))' = \exp(x)f(x) + \exp(x)f'(x)$$

Il va donc falloir soustraire $\exp(x)f(x) + \exp(x)f'(x)$ qui est justement la deuxième partie de la dérivée de $\exp(x)f'(x)$, dont la première partie sera en $f''(x)$ que l'on cherche aussi à obtenir. (On notera que les hypothèses $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$ nous soufflait de prendre une fonction faisant intervenir la différence de f et de f').

Preuve au propre : On introduit la fonction $\phi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\exp(x)$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. elle vérifie de plus $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Le théorème de Rolle nous dit donc qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. Mais

$$\phi'(x) = (f(x) - f''(x))\exp(x).$$

Ainsi,
$\phi'(c) = 0$ implique $f(c) = f''(c)$.

Exercice 5 : Règle de l'Hôpital Soient f et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. on suppose que

$$\forall x \in [a, b],\ g'(x) \neq 0.$$

1) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Correction :

1) C'est la contraposée du théorème de Rolle. Si $g(a) = g(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle et contredire l'hypothèse :

$$\forall x \in [a,b],\ g'(x) \neq 0.$$

2) Soit la fonction

$$h : x \mapsto g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus

$$h(a) = g(a)f(b) - g(b)f(a) = h(b)$$

Le théorème permet donc de conclure.

2 Le théorème des accroissements finis

Exercice 6 : Déterminer la limite, lorsque x tend vers l'infini de

$$(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Correction : Il faut appliquer le TAF à la fonction $t \mapsto t\exp\left(\frac{1}{t}\right)$ (qui vérifie les bonnes hypothèses de régularité) entre x et $x+1$. Cela donne l'existence d'un $c_x \in]x, x+1[$ (qui, attention, dépend de x, comme son nom l'indique) tel que

$$\begin{aligned}(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\exp\left(\frac{1}{c_x}\right)(x+1-x) \\ &= \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\exp\left(\frac{1}{c_x}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

Lorsque x tend vers l'infini, c_x tend aussi vers l'infini, car $c_x \geq x$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\exp\left(\frac{1}{c_x}\right)\right] = 1.$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1.$$

Exercice 7 : Montrer que lorsque n tend vers l'infini

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{-\ln(n)}{n^2}.$$

Correction :
Rappelons que par définition (pour $(v_n)_n$ une suite non nulle)

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 1.$$

On applique le TAF à la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ entre n et $n+1$ (où elle est assez régulière), ce qui donne l'existence d'un réel $c_n \in]n, n+1[$ tel que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1-\ln(c_n)}{c_n^2} c_n^{\frac{1}{c_n}} \tag{2}$$

Comme $c_n \sim n$ (grâce à l'encadrement et au théorème des gendarmes) lorsque n tend vers l'infini, nous avons $\ln(c_n) \sim \ln(n)$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{c_n}} = \exp\left(\frac{1}{c_n}\ln(c_n)\right) = 1$.
Ainsi,

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{-\ln(n)}{n^2}.$$

Exercice 8 : Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire, pour tout k entier naturel différent de 0 et 1, la limite lorsque n tend vers l'infini de $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

Correction :
Nous commençons par appliquer le TAF à la fonction $x \mapsto \ln(x)$ entre x et $x+1$. Il existe donc $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}.$$

l'encardement de c_x permet d'affirmer que

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x}$$

d'où l'encadrement voulu.

Par la suite, on peut sommer

$$\sum_{p=n+1}^{kn} (\ln(p+1) - \ln(p)) \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} (\ln(p) - \ln(p-1)) \tag{3}$$

d'où par téléscopage

$$\ln\left(\frac{kn+1}{n+1}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \quad \leq \ln(k) \tag{4}$$

le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \ln(k).$$

Exercice 9 : Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$$

a) Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est höldérienne d'exposant 1.
b) Démontrer que les fonctions höldériennes d'exposant strictement supérieur à 1 sont contantes.
c) On considère la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ définie sur $]0,1]$. montrer que la fonction n'est pas hölderienne d'exposant 1.
d) Vérifier cependant que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0,1[$.

Correction :

a) f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc bornée. En introduisant M la borne supérieure $|f'|$ sur ce segment, l'IAF donne

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

b) Soit f une telle fonction. Pour $x \in I$; on a

$$\left|\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)\right| \leq M|h|^{\alpha-1} \to 0.$$

La fonction f est donc dérivable et sa dérivée est nulle. Donc f est constante.

c) Par l'absurde, si f est 1-hölderienne,$\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (x,y) \in]0,1],\ |f(y) - f(x)| \leq M|x-y|.$$

Pour $y = 2x$, on obtient alors

$$\forall x \in]0,\frac{1}{2}],\ |x\ln(x) + 2x\ln(2)| \leq Mx.$$

puis

$$\forall x \in]0,\frac{1}{2}],\ |\ln(x) + 2\ln(2)| \leq M.$$

Lorsque x tend vers 0^+, on obtient une absurdité.

d) Soit $\alpha \in]0,1[$ et x et y deux réel positifs. Quitte à échanger, on peut supposer que $x < y$. On peut alors écrire

$$y\ln(y) - x\ln(x) = (y-x)\ln(y) + x\ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right).$$

On, on sait que pour tout u strictement positif, $\ln(1+u) \leq u$. Donc

$$|y\ln(y) - x\ln(x)| \leq (y-x)(|\ln(y)|+1)$$

puis,

$$\frac{|y\ln(y) - x\ln(x)|}{|y-x|^\alpha} = (y-x)(1+\ln|y|)$$

Puisque, $0 < y - x \leq y$ et $(1-\alpha) \geq 0$, on obtient encore

$$\frac{|y\ln(y) - x\ln(x)|}{|y-x|^\alpha} = y^{1-\alpha}(1+\ln|y|).$$

Considérons $y \mapsto y^{1-\alpha}(1+\ln|y|)$. cette fonction est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 car $1-\alpha > 0$. cette fonction est donc bornée et on peut introduire $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall y \in]0,1]$, $y^{1-\alpha}(1+\ln|y|) \leq M$. On obtient alors

$$\forall y \in]0,1],\ |f(y) - f(x)| \leq M|y-x|^\alpha.$$

Exercice 10 : En utilisant la formule de Taylor-Young, donner les dl à l'ordre 3 en zéro des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.

Correction :

1) Pour $f(x) = \ln(1+x)$, on a

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1) + x\frac{1}{1+0} + \frac{x^2}{2!}\frac{-1}{(1+0)^2} + \frac{x^3}{3!}\frac{2}{(1+0)^3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned} \tag{5}$$

2) Pour $f(x) = \cos(x)$, on

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(0) - x\sin(0) - \frac{x^2}{2!}\cos(0) + \frac{x^3}{3!}\sin(0) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned} \tag{6}$$

3) Pour $f(x) = \sin(x)$, on a

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + x\cos(0) - \frac{x^2}{2!}\sin(0) - \frac{x^3}{3!}\cos(0) + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned} \tag{7}$$

Exercice 11 : Déterminer les limites en 0 des expressions suivantes :
1) $\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$
2) $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$
3) $\frac{2\cos(x)-2}{x^2}$

Correction :
1)

$$\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) - h}{h^2} = \frac{-1}{2} + o(1)$$

2)

$$\frac{\sin(x)-x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = \frac{-x^3}{6} + o(x)$$

2)

$$\frac{2\cos(x)-2}{x^2} = \frac{2(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 2}{x^2} = -1 + o(1)$$

Exercice 12 Déterminer un équivalent en $+\infty$ de

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}.$$

Correction :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} &= \exp\left(-x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) \\ &= \exp\left(-x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-x + \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &= \exp(-x)\sqrt{e}\exp(o(1)) \\ &\sim \exp(-x)\sqrt{e}\end{aligned} \tag{8}$$

Exercice 13 Soit f une fonction réelle deux fois dérivable. Etudier la limite, lorsque h tend vers 0 de l'expression

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

Correction :
La formule de Taylor Young donne

$$f(a+t = f(a)+tf'(a)+\frac{t^2}{2}f''(a)+o(t^2)$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a-h)-2f(a)}{h^2} &= \frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)-2f(a)+o(h^2)}{h^2}\\ &= f''(a)+o(1)\end{aligned} \tag{9}$$

La limite recherchée est donc $f''(a)$.

Exercice 14 : Déterminer le limite en $+\infty$ de

$$(x+3)^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Correction : Attention, on est en $+\infty$ il faut se ramener à 0 !

$$\begin{aligned}(x+3)^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\\ &= \sqrt{x}\left(1+\frac{3}{2x}-1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \frac{\sqrt{x}}{x}+o\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

La limite est donc nulle.
Exercice 15 : Pour aller plus loin
Soit $f : x \mapsto [(x^2-1)^n]^{(n)}$.
1) Montrer que f est une fonction polynômiale de degré n.
2) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
3) Montrer que f possède exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.

Correction :
1) $(X^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ donc sa dérivée $n$ième est de degré n.

2) La fonction $g : x \mapsto (x^2-1)^n$ vérifie $f = g^{(n)}$. Autour de 1, on a

$$g(x) = (1+x)^n(x-1)^n = 2^n(x-1)^n + o((x-1)^n).$$

Par la formule de Taylor-Young, on a aussi

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + o((x-1)^n).$$

Donc $f(1) = g^{(n)}(1) = 2^n n!$ (on parle d'unicité du développement limité). De manière similaire, on a $f(-1) = (-1)^{2n}2^n n!$.

3) 1 et -1 sont racines de multiplicité n de g et donc 1 et -1 sont racines de g, g', ..., $g^{(n-1)}$. En appliquant le théorème de Rolle (voir le premier exercice), on peut montrer que $g', g'', \dots, g^{(n)} = f$ admettent respectivement $1, 2, \dots, n$ racines dans $]-1,1[$. Puisque f est de degré n, celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.