Séance de soutien PCSI2 numéro 10 : Espaces vectoriels et applications linéaires. Correction des exercices.

Tatiana Labopin-Richard

Mercredi 18 mars 2015

Exercice 1 : Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est polynômiale de degré 2, alors pour tous réels a et b :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Correction :

Si f est constante égale à 1, alors la propriété est clairement vérifiée. De même si $f = id$. De plus, si f est la fonction carrée, alors, pour tous réels a et b :

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

donc la propriété reste vraie. Comme cette propriété est sable par combinaison linéaire (par linéarité de la dérivation), on en déduit que toute fonction polynômiale de degré deux vérifie cette propriété.

Exercice 3 : Soit e un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \,/\, g \circ f = f \circ g\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2) Observer que

$$\mathcal{C} = \left\{(a_0 Id + a_1 f + \dots a_{n-1} f^{n-1} | a_0, \dots a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}.$$

3) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

Correction :

1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(E)$, $0 \in \mathcal{C}$. Soient λ et μ deux élément s de $\mathbb{K}$ et g et h deux éléments de $\mathcal{C}$. On a

$$f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(\circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$$

donc $\lambda g + \mu h \in \mathcal{C}$.

b) Soit $g = a_0 + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$. On a $g \circ f = a_0 f + a_1 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^n = f \circ g$ donc $g \in \mathcal{C}$. Ainsi,

$$\left\{a_0 Id + a_1 f + \ldots a_{n-1} f^{n-1} \,|\, a_0, \ldots a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\} \subset \mathcal{C}.$$

Inversement, soit $g \in \mathcal{C}$. Puisque $(x_0, f(x_0), \ldots f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, il existe $a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $g(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \ldots a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$. Introduisons alors $h = a_0 Id + a_1 f + \ldots a_{n-1} f^{n-1}$. Nous avons g et h deux éléments de $\mathcal{C}$ et $g(x_0) = h(x_0)$ donc

$$g(f(x_0)) = f(g(x_0)) = f(h(x_0)) = h(f(x_0))$$

et de manière plus générale

$$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k(h(x_0)) = h(f^k(x_0))$$

Ainsi, g et h prennent mêmes valeurs sur la base $(x_0, f(x_0), \ldots f^{n-1}(x_0)))$ donc $g = h$. Ainsi nous avons l'inclusion dans l'autre sens et donc l'égalité.

c) On a $\mathcal{C} = Vect(Id, f, f^2, \ldots f^{n-1})$.

De plus, si $a_0 Id + a_1 f + \ldots a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$. Or, la famille $x_0, \ldots f^{n-1}(x_0))$ est libre donc $a_0 = a_1 = \ldots a_{n-1} = 0$. La famille $(Id, f, \ldots f^{n-1})$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{C}$, c'est donc une base et a dimension de $\mathcal{C}$ est de n.

Exercice 4 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$. montrer que

$$Ker(f) \subset Ker(g) \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = h \circ f.$$

Correction :

Le sens indirect est immédiat. Montrons le sens direct. Supposons que $ker(f) \subset ker(g)$. Soit H un supplémentaire de $ker(f)$ dans E. f réalise un isomorphisme de H vers $Im(f)$ noté $f_{|Im(f)}$. Soient K un supplémentaire de $Im(f)$ dans E et $h \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$h_{|Im(f)} = g \circ f^{-1}_{|Im(f)}$$

et

$$h_{|K} = 0.$$

Pour tout $x \in H$,

$$(h \circ f)(x) = h(f_{|H}(x)) = g(f_{|H}^{-1}(f_{|H}(x))) = g(x)$$

Les applications g et $h \circ f$ coÃŕncidant sur des cous-espaces vectoriels supplémentaires, elles sont égales.

Exercice 7 : Montrer que les parties suivantes sont des espaces vectoriels.
1) $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a,b]), \mathcal{R}) | f'(a) = f'(b)\}$.
2) $G = \left\{\in \mathcal{C}^0([a,b]), \mathcal{R}) | \int_a^b f(t)dt = 0\right\}$.

Correction :
1) $F \subset \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ et $0 \in F$.
Soient λ et μ deux réels et f et g deux éléments de F. La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) = \lambda f'(b) + \mu g'(b) = (\lambda f + \mu g)'(b)$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.
b) $G \subset \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ et $0 \in G$. Soient λ et μ deux réels et f et g deux éléments de g. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt)\lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$.

Exercice 8 : Soit F un sous-espace vectoriel de E et

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}(E),\ F \subset Ker(f)\}.$$

Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Correction :
On peut montrer à la main que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$: $\mathcal{N}$ n'est pas vide car comprend l'endomorphisme nul de E. Et pour tout scalaire λ et μ, tous éléments f et g de $\mathcal{N}$, et tout vecteur x de F :

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = 0_E.$$

On peut aussi prouver ce fait en remarquant que l'application

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow & \quad \mathcal{L}(E,F) \\ f \mapsto & \quad f_{|F}\end{aligned} \tag{1}$$

et linéaire, donc son noyau $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 9 : Soit F l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f'(x) - 3f(x+2) + f(2) + f'(-1) = 0$$

pour tout réel x. Montrer que F est un espace vectoriel.

Correction :
La dérivation de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ est linéaire, ainsi que la composition à droite par $x \mapsto x+2$, et toute évaluation donc

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \rightarrow & \quad \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto & \quad (x \mapsto f'(x) - 3f(x+2) + 2f(2) + f'(-1))\end{aligned} \tag{2}$$

est linéaire et son noyau E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1$.

Exercice 10 : Montrer que l'ensemble F des triplets (x,y,z) de réels vérifiant :

$$\begin{aligned} x+y+z = & \quad 0 \\ 2x - y + z = & \quad 0 \\ x - 2y = & \quad 0 \end{aligned} \tag{3}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction :
On peut bien entendu vérifier à la main que le vecteur nul est dans l'ensemble et que cet ensemble est stable par combinaison linéaire. Mais, de manière plus élégante, on peut aussi voir F comme intersection de trois noyaux de formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^3$ (la première étant $(x,y,z) \mapsto x+y+z$), c'est à dire de trois hyperplans de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 : Les parties suivantes sont-ils des espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq y\}$
2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x =\}$
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 0\}$
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 1\}$
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 0\}$

Correction :

1) non : pas stable par multiplication par un scalaire : $(0,1)$ appartient mais pas $-(0,1)$.
2) non : pas stable par addition : $(1,0)+(0,1)$.
3) oui.
4) non : ne passe pas par $(0,0)$.
5) non : pas stable par addition : $(1,1)+(1,-1)$.
6) oui (c'est l'espace nul !).

Exercice 12 : Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1) $\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{bornée}\right\}$
2) $\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{monotone}\right\}$
3) $\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{convergente}\right\}$
4) $\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{arithmétique}\right\}$

Correction :

1) oui
2) non : pas stable par addition : $u_n=n^2$ et $v_n=-9n+20$.
3) oui
4) oui

Exercice 13 : A quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ?

Correction :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $F\subset G$ ou $G\subset F$ alors $F\cup G$ vaut F ou G et est évidemment un sous-espace vectoriel de E.

Inversement, supposons que $F\cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E et $F\not\subseteq G$. Il existe $x\in F$ tel que $x\neq G$. Pour tout $y\in G$, $x+y\in F\cup G$ par stabilité par somme. Si $x+y\in G$, alors $x=(x+y)-y\in G$, ce qui est exclu. Donc $x+y\in F$ et alors $y=(x+y)-x\in F$. Ainsi, $G\subset F$.

Ainsi pour que $F\cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E, il faut et il suffit $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{x},\overrightarrow{z}$ trois vecteurs de E telq que la famille $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$ soit libre. On pose

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z},\overrightarrow{v}=\overrightarrow{z}+\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{w}=\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}.$$

Montrer que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

Correction :
Supposons que

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

On aurait alors

$$(\beta+\gamma)\overrightarrow{x} + (\alpha+\gamma)\overrightarrow{y} + (\beta+\alpha)\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}.$$

La famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ étant libre, nous avons $\beta+\gamma = 0$, $\alpha+\gamma = 0$ et $\alpha+\beta = 0$ et donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc libre.

Exercice 15 : Soit $\alpha_1 \dots \alpha_n$ des réels distincts.
1) Pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, on définit $f_k : x \mapsto |x - \alpha_k|$. Montrer que $(f_k)_{k\in\{1,\dots n\}}$ est libre.
2) Pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, on pose $P_k = \prod_{i=1, i\neq k} (X - \alpha_i)$. Montrer que $(P_k)_{k\in\{1,\dots n\}}$ est libre.

Correction :
1) Pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, la propriété "être dérivable en α_k" est vraie pour tous les f_i pour $i \neq k$ mais fausse pour f_k. On dit que cette propriété est discriminante pour k. Ainsi, soient $(a_1, \dots a_n)$ des scalaires tels que

$$a_1 f_1 + \dots a_n f_n = 0.$$

Nous avons alors pour k fixé, si a_k est différent de 0,

$$f_k = \frac{a_1 f_a + \dots a_{k-1} f_{k-1} + a_{k+1} f_{k+1} + \dots a_n f_n}{a_k}$$

ce qui est absurde puisque la fonction de gauche n'est pas dérivable en α_k alors que celle de droite l'est. Ainsi, on peut montrer que pour tout k, $a_k = 0$.
2) De la même manière, la propriété "admettre α_k comme racine" est discriminante pour P_k et donc la famille est libre.

Exercice 16 : Soit $\alpha_1 \dots \alpha_n$ des entiers distincts ordonnés par ordre croissant.
1) On considère une famille $(P_1, \dots P_n)$ de polynÃťmes tels que pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, $deg(P_k) = \alpha_k$. Montrer que cette famille est libre.
2) Pour tout k entier, on pose $f_k : x \mapsto \exp(\alpha_k x)$. Montrer que pour une n fixé, la famille $(f_1, \dots f_n)$ est libre.

Correction :
1) Pour tout $k \in \{1, \dots n-1\}$, on introduit la propriété $\mathcal{P}_k$: "être de degré au plus α_k". On dit que les propriétés $(\mathcal{P}_1, \dots \mathcal{P}_{n-1})$ hiérarchisent l'ensemble

$(P_1, \dots P_{n-1})$, parce que $(P_1, \dots P_k)$ vérifient $\mathcal{P}_k$, et $(P_{k+1}, \dots P_n)$ ne vérifient pas $\mathcal{P}_k$. Soit ainsi,$a_1, \dots a_n$ des scalaires non tous nuls tels que

$$a_1 P_1 + \dots a_n P_n = 0.$$

Notons i l'indice maximal des a_k non nuls.
Nous avons

$$P_i = \frac{a_{i+1} P_{i+1} + \dots a_n P_n}{-a_i}$$

et le terme de gauche vérifie la propriété $\mathcal{P}_i$ alors que le terme de droite non. Ainsi, nous arrivons à une absurdité. Il n'existe donc pas de tels scalaire non tous nuls vérifiant l'équation précédente et la famille est libre.

2) Pour tout k, on pose les propriétés $\mathcal{P}_k$: " être dominée au voisinage de $+\infty$ par f_k". L'ensemble $(\mathcal{P}_1, \dots \mathcal{P}_n)$ hiérarchise l'ensemble des fonctions que nous considérons. La famille est donc libre.

Exercice 17 : Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, former une relation liant ces vecteurs :

1) (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$.
2) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (-1, 1, -2)$.
3) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$.
4) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$.

Correction :

1) oui
2) oui
3) non $x_3 = x_2 - x_1$
4) non $x_3 = -x_1$

Exercice 18 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. les fonctions $x \mapsto \sin(x + a)$, $x \mapsto \sin(x + b)$ et $\mapsto \sin(x + c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Correction Non car les ces trois fonctions sont combinaisons linéaires des deux fonctiosn suivantes :

$$x \mapsto \sin(x),\ x \mapsto \cos(x).$$

Exercice 19 : Soient $f_1, \dots f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0.$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots f_n)$ est liée.

Correction : Soit ϕ une forme linéaire ne s'annulant pas en x. Celle-ci n'est pas combinaison linéaire des $(f_1, \dots f_n)$. Cette famille n'est donc pas génératrice et par suite elle est liée car formée de $n = dimE^*$ éléments de E^*.

Exercice 20 : Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$. Chercher une famille génératrice pour cette espace vectoriel.

Correction : Le vecteur $(1, 1, 1)$ forme une famille génératrice de E. (Il suffit pour le remarquer de transformer le système définissant E en le système $x = y = z$.

Exercice 21 : Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \; | x_1 + x_3 = 0 \text{ et, } \; x_2 + x_4 = 0\}$ et $F = Vect(u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1, -1), u_3 = (1, -1, 1, -1))$. Déterminer une famille génératrice de $E + F$.

Correction :
Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$. Nous avons

$$\begin{aligned} x_1 = & \quad -x_3 \\ x_2 = & \quad -x_4 \end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi, on peut prendre $u_4 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_5 = (0, -1, 0, 1)$ deux vecteurs non proportionnels qui forment donc une base de E (qui est donc de dimension 2).

Pour F, il est clair que $u_1 + u_2 = 2u_3$ donc la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. Ainsi,

$$F = Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect(u_1, u_2)$$

et les vecteurs u_1, u_2 n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre F, c'est donc une base de F dont la dimension est donc 2.

Ainsi, une famille génératrice de $E + F$ est donc (u_1, u_2, u_4, u_5). En effet, soit $x \in E + F$, $\exists u \in F$ et $v \in E$ tels que $x = u + v$. Mais $\exists a_1, a_2, a_3, a_4$ tels que $u = a_1u_1 + a_2u_2$ et $v = a_3u_4 + a_4u_5$ d'où le résultat.

Exercice 22 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$\epsilon_1 = e_2 + 2e_3, \epsilon_2 = e_3 - e_1, \; \epsilon_3 = e_1 + 2e_2.$$

Montrer que ϵ est une base de E.

Correction :
On montrer que la nouvelle famille est libre. En supposant que $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 + \lambda_3\epsilon_3 = 0$, on trouve que $(\lambda_3 - \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)e_2 + (2\lambda_2 + \lambda_2)e_3 = 0$. Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est une base, c'est une famille libre. Nous avons donc $\lambda_3 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$ et $2\lambda_2 + \lambda_2 = 0$ d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille est libre. Nous

avons une famille libre de même cardinal que la base initiale, il s'agit donc aussi d'une base.

Exercice 23 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

Correction :
En posant $\phi : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, nous avons facilement que l'ensemble considéré est un espace vectoriel puisque que c'est le noyau de ϕ qui est linéaire. Le théorème du rang nous donne alors que la dimension de ce noyau vaudra 3 puisque ϕ est surjective (le rél a a pour antécédent $(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4})$ par exemple). Nous devons donc chercher trois vecteurs de l'ensemble et vérifier qu'ils forment une famille libre. Le lecteur vérifiera que $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ rÃĺpond au problème.

Exercice 24 : Soit $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X - 1$ et $P_3 = X^2 + X$. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Correction :
Supposons $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. Par égalité de coefficients de polynômes, on a $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_3 = 0$. Soit, après résolution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre, et formée de $3 = dim \mathbb{K}_2[X]$ éléments. La famille est donc aussi génératrice : c'est une base !

Exercice 25 : Pour $k \in \{0, \ldots n\}$; on pose $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0, \ldots P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction :
On remarque que $deg(P_k) = k$, donc $P_k \in \mathbb{K}_n[X]$. Supposons que $\lambda_0 P_0 + \ldots \lambda_n P_n = 0$. Si $\lambda_n \neq 0$, alors $deg(\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n) = n$ car $deg(\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1}) \leq n - 1$ et $deg(\lambda_n P_n) = n$, ce qui est exclu puisque le polynÃťme doit être nul. Donc $\lambda_n = 0$. On réitère pour montrer que tous les λ sont nuls. La famille est donc libre et contient $n + 1 = dim \mathbb{K}_n[X]$ éléments, c'est donc une base.

Remarque : On peut rédiger la partie liberté de la même manière qu'à l'exercice 13.

Exercice 27 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0 =$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = Vect(u, v, w)$ et $G = Vect(x, y)$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$?

Correction :
(u, v, w) forme une famille libre donc une base de F. Ainsi, la dimension de F

vaut 3. (x, y) forment une famille libre docn une base de G. Ainsi, la dimension de G vaut 2. $(u, v, w, x,)$ forme une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, $F+G = E$ et donc la dimension de $F + G$ vaut 4. Enfin, nous avons

$$dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G) - dim(F + G) = 1.$$

Exercice 28 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

On pose

$$\epsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \epsilon_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que la famille ϵ est libre et la compléter en une base de E.

Correction :

Les vecteurs ϵ_1 et ϵ_2 ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre. Pour $\epsilon_3 = e_2$ (ou encore $\epsilon_3 = e_3$, mais pas $\epsilon_3 = e_1$), on montre que la famille (ϵ) est libre et donc une base de E.

Exercice 29 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x).$$

1) Montrer que E est une sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2) Déterminer une base de E et sa dimension.

Correction :

1) $E = Vect(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_0(x) = \cos(x)$, $f_1(x) = x\cos(x)$ et $f_2(x) = x^2\cos(x)$. E est donc un sous-espace vectoriel et (f_0, f_1, f_2) en est une famille génératrice.
2) Supposons $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_3 = 0$.
   On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha+\beta x\gamma x^2)\cos(x) = 0$. Pour $x = 2n\pi$, on obteint $\alpha+2n\pi\beta+4n^2\pi^2\gamma = 0$ pour tout n. Si $\gamma \neq 0$, alors $\alpha+2n\pi\beta+4n^2\pi^2\gamma \to \infty$. C'est exclu. Donc $\gamma = 0$. On a alors $\alpha + 2n\pi\beta = 0$ pour tout n. Pour $n = 0$, puis $n = 1$, on obtient alors $\alpha = \beta = 0$. Finalement, (f_0, f_1, f_2) est une famille libre. C'est donc une base de E qui est donc de dimension 3.

Exercice 30 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions paires. Montrer que $E = P \bigoplus I$.

Correction :

Analyse : Soit f une fonction réelle. Soit g une fonction paire et h une fonction impaire telles que

$$f = g + h.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} f(-x) &= g(x) - h(x) \\ f(x) &= g(x) + h(x) \end{aligned} \tag{5}$$

En sommant ces deux équations, nous trouvons donc que l'unique possibilité est de prendre

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) &= f(x) - g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

Nous venons donc de montrer que si une telle décomposition existe, alors elle est celle-ci (unicité !).

Synthèse : Posons

$$\begin{aligned} g(x) = &\quad \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = &\quad \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

Nous avons alors $h \in I$, $g \in P$ et $f = g + h$. Ainsi, nous avons montrer que

$$\forall f,\ \exists!(g, h) \in P \times I,\ |f = g + h$$

et donc que $E = I \bigoplus P$.

Exercice 31 : Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction :

F est inclus dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ et 0 est un élément de F. La stabilité par multiplication par un scalaire et addition est claire (linéarité de la somme et de la dérivée).

De même pour G, il n'y a pas de difficultés.

Soit $h \in F \cup G$. Comme $h \in F$, $h(0) = b = 0$ et $h'(0) = a = 0$ donc $h(x) = 0$. L'intersection est donc le singleton nul.

Soit h une fonction $\mathcal{C}^1$. Pososns $a = h'(0) \in \mathbb{R}$ et $b = h(0)$, $g : x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$. Clairement, nous avons $g \in G$ et $h = f + g$. De plus, $f(0) = h(0) - b$ et $f'(0) = h'(0) - a = 0$. Donc $f \in F$. Ainsi,

$F + G = \mathcal{C}^1$.
D'où le résultat.

Remarque : Pour trouver la bonne décomposition, il faut faire une raisonnement par analyse. Nous avons h. Nous voulons l'écrire $h = f + g$ avec $g(x) = ax + b$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Ainsi, $h(0) = 0 + a$ et $h'(0) = 0 + b$. Nous devons donc forcément prendre $a = h(0)$ et $b = h'(0)$, ce qui nous donne g ! Il reste en réalité seulement à vérifier alors que $f = h - g$ vérifie les bonnes propriétés.

Exercice 32 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et (f, g) deux endomorphismes de E avec $E = Im(f) + Im(g) = Ker(f) + Ker(g)$. Montrer que $E = Im(f) \bigoplus im(g) = Ker(f) \bigoplus Ker(g)$.

Correction :
Il s'agit d'abord de montrer que $Im(f) \cap Im(g) = Ker(f) \cup Ker(g) = \{0_E\}$. Par hypothèse,

$$\begin{aligned} dim(E) &= rg(f) + rg(g) - dim(Im(f) \cap Im(g)) \\ &= dim(Ker(f)) + dim(Ker(g)) - dim(Ker(f) \cup Ker(g)) \end{aligned} \tag{8}$$

d'où en sommant

$$\begin{aligned} 2dim(E) = {} & rg(f) + dim(Ker(f)) + rg(g) + dim(Ker(g)) \\ & - dim(Im(f) \cup Im(g)) - dim(Ker(f) \cup Ker(g)) \end{aligned} \tag{9}$$

Le téhorème du rang appliqué à f et à g donne alors

$$dim(Im(f) \cup Im(g)) + dim(Ker(f) \cup Ker(g)) = 0.$$

d'où le résultat.

Exercice 33 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P annule f, et admet 0 pour racine simple, alors $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires dans E.

Correction :
Notons $P = \sum\limits_{k \geq 1} a_k X^k$ (on rappelle que $P(0) = 0$). Le polynôme P admettant 0 pour racine simple, $a_1 \neq 0$.

Soit $y \in Im(f) \cap Ker(f)$. Soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De $P(f)(x) = 0_E$, on déduit que $a_1 y = 0_E$, donc que $y = 0_E$. Ainsi $Im(f) \cap Ker(f) = 0$.

Pour tout $x \in E$, $\sum\limits_{k \geq 1} a_k f^{k-1}(x) \in Ker(f)$, et ${}_{k \geq 2} a_k f^{k-1}(x) \in Im(f)$, et on peut donc écrire

$$s = \frac{1}{a_1}\left(\sum_{k\geq 1} a_k f^{k-1}(x) - \sum_{k\geq 2} a_k f^{k-1}(x)\right) \in Ker(f) + Im(f).$$

Finalement, $Im(f)$ et $Kerf(f)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 34 : Soit u et v des applications linéaires de E dans F deux espaces de dimensions finies. Montrer que

$$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v).$$

Correction :

Cet exercice est très classique, il faut savoir le faire ! Clairement, nous avons,

$$Im(u+v) \subset Im(u) + Im(v).$$

En prenant les dimensions, nous avons

$$rg(u+v) \leq dim(Im(u)+Im(v)) = rg(u)+rg(v)-dim(Im(u)\cup Im(v)) \leq rg(u)+rg(v).$$

En appliquant cette première inégalité à $u+v$ et $-v$, on obtient

$$rg(u) \leq rg(u+v) + rg(-v).$$

Comme $rg(-v) = rg(v)$ (et même $Im(-v) = Im(v)$), il vient $rg(u) - rg(v) \leq rg(u+v)$. En appliquant la première inégalité à $u+v$ et $-u$, on trouve

$$rg(v) - rg(u) \leq rg(u+v).$$

Finalement, nous avons montré que

$$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v).$$

Exercice 35 : Soit F un sous-espace vectoriel de E et

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}(E),\ F \subset Ker(f)\}.$$

Calculer la dimension de $\mathcal{N}$.

Correction :

Revenons à l'exercice 7. L'application ϕ est surjective. En effet, soit G un supplémentaire de F dans E et $h \in \mathcal{L}(E, F)$. L'élément de $\mathcal{L}(E)$ coincidant avec h sur F et nul sur G a pour image h par ϕ. Le théorème de rang appliqué à ϕ permet alors d'affirmer que :

$$dim(\mathcal{N}) = dim(\mathcal{L}(E)) - dim(\mathcal{L}(E, F)),$$

soit

$$dim(\mathcal{N}) = dim(E)(dim(E) - dim(F)).$$

Exercice 36 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E, telq que $f \circ g = 0$ et $f + g$ inversible. Montrer que

$$rg(f) + rg(g) = dim(E).$$

Correction :

D'après l'exercice 34, nous avons

$rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g)$, or $rg(f + g) = dim(E)$ puisque $f + g$ est inversible. Ainsi

$$dim(E) \leq rg(f) + rg(g).$$

Pour l'inégalité en sens inverse, on part de la relation $f \circ g = 0$, qui donne $Im(g) \subset Ker(f)$. En particulier, $rg(g) \leq dim(Ker(f))$. Or $dim(Ker(f)) = dim(E) - rg(f)$ d'après le téhorème du rang. Ainsi,

$$rg(f) + rg(g) \leq dim(E).$$

Nous avons démontré l'égalité.

Exercice 37 : Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p'périodiques. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer cette dimension.

Correction :

On vérifie aisément que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{K}}$. Pour tout $0 \leq i \leq p - 1$, on note e_i la suite définie par

$$e_i(n) =: \begin{cases} 1 & \text{si } n = i\ [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que les suites $e_0, \ldots e_{p-1}$ sont linéairement indépendantes et on a

$$\forall u \in E,\ u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$$

La famille $(e_0, \dots e_{p-1})$ est donc une base de e et par suite $dim(E) = p$.

Exercice 38 : Soie E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit ϕ allant de E dans E, qui à f associe $x \mapsto f(-x^2)$. Montrer que ϕ est linéaire.

Correction :
Il sufit de remarquer que ϕ est la composition à gauche (linéaire!) par $g : x \mapsto -x^2$. Attention, en revanche, la composition à droite par ϕ n'est pas linéaire!

Exercice 39 : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soient $\phi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par :

$$\phi(f) = f', \ \psi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes. Déterminer images et noyaux.

Correction :
1) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$,

$$\phi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f' + \mu g' = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \lambda f(t)\mu g(t)dt = \lambda \int_0^x f(t)dt + \mu \int_0^x g(t)dt$$

Remarque : Lorsque ces notions sont devenues évidentes pour vous, une phrase de justification du genre "ϕ et ψ sont linéaires par linéarité de l'intégrale et de la dérivation" sera suffisante.

De plus $\phi : E \mapsto E$ ainsi que ψ donc nous avons bien deux endomorphismes de E.

2) On a

$$\forall f \in E, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (\psi \circ \phi)(f)(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0).$$

3) $\phi \circ \psi$ est bijective donc ϕ est surjective et ψ injective. ϕ est surjective donc $Im(\phi) = E$. $Ker(\phi)$ est formée des fonctions constantes. ϕ est injective donc $Ker(\psi) = \{0\}$. $Im(\psi)$ est l'espace des fonctions de E qui s'annulent en 0.

Exercice 40 : Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :
1) $rg(f \circ g) \min(rg(f), rg(g))$.
2) $rg(f \circ g) \geq rg(f) + rg(g) - dim(E)$.

Correction :

1) $Im(f \circ g) \subset Im(f)$ donc $rg(f \circ g) \leq rg(f)$.
$Im(f \circ g) = f(Im(g)) = Im(f)_{|Im(g)}$.
Puisque la dimension d'une image est toujours inférieure à la dimension de l'espace de départ, nous avons

$$rg(f \circ g) \leq rg(g).$$

2) $rg(f \circ g) = dim(f(Im(g)))$. Par le théorème du rang appliqué $f_{|Im(g)}$,

$$dim(f(Im(g)) + dim(Ker(f_{|Im(g)})) = dim(Im(g))$$

donc

$$rg(f \circ g) = rg(g) - dim(Ker(f_{|Im(g)})).$$

Or $Ker(f_{|Im(g)}) \subset Ker(f)$ donc $dim(Ker(f_{|Im(g)})) \leq dim(E) - rg(f)$, puis

$$rg(f \circ g) \geq rg(f) + rg(g) - dim(E).$$

Exercice 42 : Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0),\ f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer son noyau et son image.

Correction :
Posons $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$. Il est immédiat d'observer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E. Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image des vecteurs d'une base, par suite, f existe et est unique.

$$(x, y, z) = (x - y)e_1 + (y - z)e_2 + ze_3$$

donc

$$f(x, y, z) = (x - y)f(e_1) + (y - z)f(e_2) + zf(e_3) = (y, x - y, z).$$

Ainsi,
$Ker(f) = Vect(u))$ avec $u = (1, 0, -1)$.
Par le théorème du rang, $dim(Im(f)) = 2$ et donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 41 et 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est un automorphisme et déterminer son inverse.

Correction :

Le fait que nous ayons affaire à un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ est laissé au lecteur.

Montrons que cet endomorphisme est un automorphisme en exhibant directement son inverse.

Comme

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{aligned} \tag{10}$$

est équivalent à

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + y'}{2} \\ y &= \frac{x' - y'}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

nous avons que chaque (x', y') de $\mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent par f qui est $(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2})$. Ainsi, f est bijective.

Exercice 43 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\phi(e_1) = e_1 + e_2$, $\phi(e_2) = e_2 - e_2$ et $\phi(e_3) = e_1 + te_3)$ définit une application linéaire ϕ de E dans E. Ecrire le transformé de tout vecteur x. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? Surjective ?

Correction :

1) Comment est définie ϕ à partir de la définition des éléments de la base ?
   Pour $x \in E$, x s'écrit dans la base : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ et

$$\phi(x) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

   soit

$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$

   Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire !

2) On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in Ker(\phi)$. Nous avons

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0.$$

   Mais comme (e_1, e_2, e_3) est une base, on trouve en résolvant le petit système (avec $t \neq 0$) que tous les α_i sont nuls. Donc x est nul et ϕ est injective. Mais attention , lorsque $t = 0$ le système a des solutions non triviales (par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -2$).

3) Pour la surjectivité : nous allons appliquer la formule du rang.

$$dim(Ker\phi) + rg(\phi) = dim(E).$$

Si $t \neq 0$, ϕ est injective et donc $rg(\phi) = 3$ et ϕ est surjective. Si $t = 0$, ϕ n'est pas injective donc pas surjective.

Exercice 44 : Soient $a_0, \ldots a_n$ des réels distincts et $\phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\phi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \ldots P(a_n), P'(a_n)).$$

Montrer que ϕ est surjective.

Correction :

ϕ est clairement linéaire et si $P \in Ker(\phi)$ alors P a plus de racines que son degré, donc $P = 0$. Ainsi, ϕ est injective et puisque $dim(\mathbb{R}_{2n+1}[X] = dim\mathbb{R}^{2n+1}$, ϕ est un isomorphisme.

Exercice 45 : Soit $\phi : \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\phi(P) = (n+1)P - XP'$.
1) Justifier que ϕ est bien définie et que c'est une application linéaire.
2) Déterminer le noyau de ϕ.
3) Montrer que ϕ est surjective.

Correction :
1) L'application est bien définie car si on appelle a_0 le coefficient dominant de P, $\phi(P)(X) = (n+1)a_0X^{n+1} - a_0(n+1)X^{n+1} + R(X)$ avec $R(X)$ de degré au plus n. Ainsi, $\phi(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. La linéarité vient de la linéarité de la somme et de la dérivation.
2) Nous avons $Ker(\phi) = \{P \in \mathbb{K}_{n+1}[X],\ \phi(P) = 0\}$ mais

$$\phi(P) = 0 \ \Leftrightarrow\ P'X - (n+1)P = 0.$$

Cette équation différentielle ayant pour solutions $\{x \mapsto Kx^{n+1}\}$, on trouver que le noyau est de dimension 1 et que le vecteur X^{n+1} en forme une base.
3) Le théorème du rang permet de conclure que ϕ est surjective puisque

$$dim(Im(\phi)) = dim(K_{n+1}[X]) - dim(Ker(\phi)) = n+2-1 = n+1 = dim(K_n[X]).$$

Exercice 46 : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et ψ une application linéaire de E dans F. montrer que ψ est un isomorphisme si et seulement si l'image par ψ de toute base de E est une base de F.

Correction :

Montrons d'abord que si ψ est un isomorphiqme, l'image de toute base de E est une base de F. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots e_n)$ une base de E et nommons $\mathcal{B}' = (\psi(e_1), \ldots \psi(e_n))$.

a) La famille $\mathcal{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \dots \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_1\psi(e_1) + \dots \lambda_n\psi(e_n)) = 0.$$

Nous avons alors $\psi(e_1\lambda_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$, donc, comme ψ est injective, $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

b) Montrons que $\mathcal{B}'$est génératrice. Soit $y \in F$. Comme ψ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \psi(x)$. Comme $\mathcal{B}$ est génératrice, on peut trouver $\lambda_1, \dots \lambda_n$ des réels tels que $x = \lambda_1 e_1 \dots \lambda_n e_n$. Ainsi,

$$y = \lambda_1\psi(e_1) + \dots \lambda_n\psi(e_n)$$

Montrons maintenant que si l'image par ψ de toute base est une base, alors ψ est bijective. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\psi(e_1), \dots \phi(e_n))$ la base associée.

a) $Im(\psi)$ contient $\mathcal{B}'$ qui est génératrice de F donc ψ est surjective.

b) Soit $x \in Ker(\psi)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, il existe des réels $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

Alors comme $x \in Ker(\psi)$,

$$\psi(x) = 0 = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n\psi(e_n).$$

Puisque $\mathcal{B}'$ est libre, tous les λ_i sont nuls et donc x est nul. Donc ψ est injective.

Exercice 47 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f \circ g + 2id_E = 0$. Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Correction :

E étant de dimension finie, on déduit de la relation de l'énoncé que f est inversible d'inverse $f - g + 2id_E$. En effet,

$$f^2 - f \circ g + 2f = id_E = f \circ (f - g + 2id_E)$$

donne que f est inversible à droite et donc inversible (dimension finie). Donc en particulier f est aussi inversible à gauche avec la même inverse :

$$(f - g + 2id_E) \circ f = id_E$$

En égalisant les deux équations, on trouve

$$f \circ g = g \circ f.$$