Séance de soutien PCSI2 numéro 11 : probabilités conditionnelles-Corrections

Mercredi 13 mai 2015

Exercice 1 :
1) L'énoncé donne directement $\mathbb{P}(A) = 0.05$ d'où $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0.95$, $\mathbb{P}(D|A) = 0.6$ et $\mathbb{P}(\bar{D}|\bar{A}) = 0.98$.
On en déduit :

$$\mathbb{P}(\bar{D}|A) = 1 - \mathbb{P}(D|A) = 0.4$$

$$\mathbb{P}(D|\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D}|\bar{A}) = 0.02.$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(D|\bar{A}) = \frac{49}{1000}.$$

2) On obtient ensuite $\mathbb{P}(A|D)$ grâce à la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{30}{49}.$$

Exercice 2 : On note B_i (resp. N_i) l'événement : la ième boule tirée est blanche (resp. noire). On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$, ce que l'on va faire en utilisant la formule des probabilités composées.

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(N_3|B_1 \cap B_2).$$

Et chacune des ces probabilités est facile à calculer puisque $\mathbb{P}(B_1) = \frac{4}{7}$, $\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{3}{6}$ (il reste 6 boules dont trois blanches) et $\mathbb{P}(N_3|B_1 \cap B_2) = \frac{3}{5}$. Finalement on obtient $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{6}{35}$.

Exercice 3 :

1) On note A : avoir un accident dans l'année. Commes les trois classes R_1, R_2 et R_3 réalisent une partition de la population, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(A|R_2)\mathbb{P}(R_2) + \mathbb{P}(A|A_3)\mathbb{P}(R_3) \\ &= 0,05 \times 0,2 + 0,15 \times 0,5 + 0,3 \times 0,3 \\ &= 0.175\end{aligned} \tag{1}$$

2) On cherche la probabilité d'être dans R_1 sachant qu'on n'a pas eu d'accident, c'est à dire la probabilité de $\mathbb{P}(R_1|\bar{A})$. La formule de Bayes donne :

$$\mathbb{P}(R_1|\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A}|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(\bar{A})}.$$

La probabilité $\mathbb{P}(\bar{A})$ se calcule par la formule $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, tandis que lénoncé donne $\mathbb{P}(\bar{A}|R_1) = 0.95$. On obtient finalement

$$\mathbb{P}(R_1|\bar{A}) = \frac{0.95 \times 0.2}{1 - \mathbb{P}(A)} = 0.23.$$

Exercice 4 : Notons M l'évènement : l'individu testé est malade et T l'évènement : le test est positif. On veut $\mathbb{P}(M|T)$ et on sait que $\mathbb{P}(M) = 2/100$, $\mathbb{P}(T|M) = 0,95$ et $\mathbb{P}(T|\bar{M}) = 0,01$.

Par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})},$$

ce qui donne $\mathbb{P}(M|T) = \frac{2}{3}$.

Exercice 5 : Au premier tirage, la probabilité que la boule tirée soit blanche est $\frac{b}{b+r}$. Au deuxième tirage, il faut tenir compte du résultat du précédent tirage. La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche sachant que la première l'était est $\frac{b+d}{b+r+d}$. Si la première était rouge, on obitnet $\frac{b}{b+r+d}$. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage est donc

$$\frac{b+d}{b+r+d} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+d} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que la probabilité que la boule soit blanche lors du nième tirage vaut toujours $\frac{b}{b+r}$.

Supposons cette propriété acquise jusqu'au rang n et étudions le résultat du $(n+1)$ième tirage en fonction du résultat du premier tirage. Si, une boule blanche est tirée au départ, le $(n+1)$ième tirage peut se comprendre comme le nième tirage à partir d'une urne composée de $b+d$ boules blanches et r boules rouges (on peut donc appliquer la formule de récurrence avec ces paramètres !). On raisonne de même si la boule initialement tirée est rouge. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(n+1)$ième tirage est

$$\frac{b}{b+r}\frac{b+d}{b+r+d}+\frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r+d}=\frac{b}{b+r}.$$

La récurrence est établie.

Exercice 6 : On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$. Supposons p_n connu. Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n).$$

La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p.$$

Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique à pour terme général

$$p_n = \frac{1+(2p-1)^{n-1}}{2}.$$

Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \to \frac{1}{2}$.

Exercice 7 : Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et Tcelui constitué des individus rendant le test positif. On a grâce à l'énoncer

$$\mathbb{P}(M) = 10^{-4},\ \mathbb{P}(T|M) = 0.99,\ \mathbb{P}(T|\bar{M}) = 10^{-3}.$$

Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(M\cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} = 9\%.$$

La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif !

Exercice 8 : La première question a été traité dans le cours. La seconde question se traite de la même manière. On note B : on a obtenu 5. Par des calculs analogues aux précédents, on obtient

$$\mathbb{P}(D|B) = \frac{1/6 \times 1/2}{1/12 + 1/2 \times 1/10} = \frac{5}{8}.$$

Exercice 9 : Notons n le nombre de billets achetés. On cherche la probabilité p_n de l'événement : au moins un des billets achetés est gagant. C'est la probabilité de l'événement complémentaire : aucun des billets achetés n'est gagnant que l'on va calculer. Il y a $\binom{1000}{n}$ choix possibles d'achats de billets et $\binom{998}{n}$ choix qui amènent à aucun billet gagnant. On a donc

$$p_n = 1 - \frac{\binom{998}{n}}{\binom{1000}{n}} = 1 - \frac{(1000-n)(999-n)}{1000 \times 999}.$$

On en déduit que

$$p_n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(1000-n)(999-n)}{1000 \times 999} \leq \frac{1}{2}$$

Nous devons donc résoudre

$$n^2 - 1999n + 500 \times 999 \leq 0.$$

L'étude de ce polynôme montre que l'une des racines est comprise entre 292 et 293 et l'autre supérieure à 1000. Le polynôme est négatif entre ces deux racines, il faut donc acheter au moins 293 billets.

Exercice 10 :

1) On note A l'événement : la pièce est acceptée par le contrôle et B : la pièce est bonne. On note aussi E : il y a une erreur de contrôle. Il se décompose en $A \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap B$. Ces deux événements sont incompatibles, on a donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B).$$

Maintenant, $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})$. Or $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0.05$ et $\mathbb{P}(A|\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B}) = 0.02$. De même, on a $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A}|B)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1\mathbb{P}(A6B) = 0.04$. On obtient finalement

$$\mathbb{P}(E) = 0.95 \times 0.04 + 0.05 \times 0.02.$$

2) Dans cette question, on chercher $\mathbb{P}(\bar{B}|A)$ alors que l'on connait les probabilités conditionnelles sachant B. Ceci nous invite à utiliser la formule de Bayes.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{B}|A) &= \frac{\mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A|\bar{B})}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)+\mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A|\bar{B})} \\
&= \frac{0.05\times 0.02}{0.95\times 0.96+0.05\times 0.02} = \frac{1}{913}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Exercice 11 : Soit x la proportion de tricheur dans la population. On note respectivement$P$, F, H, T les événements : le joueur obtient pile, le joueur obtient face, le joueur est honnête, le joueur est un tricheur. Il est raisonnable de convenir que $\mathbb{P}(P|H) = 0.5$ et $\mathbb{P}(F|H) = 0.5$. On suppose aussi que $\mathbb{P}(P|T) = 1$ (le tricheur fait exactement ce qu'il veut). On cherche donc $\mathbb{P}(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$
\mathbb{P}(T|P) = \frac{\mathbb{P}(P|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P|T)\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(P|H)\mathbb{P}(H)} = \frac{x}{x+0.5(1-x)} = \frac{2x}{x+1}.
$$

Le résultat est plus ou moins réconfortant suivant la proportion de tricheurs x dans la population !