Séance de soutien PCSI2 numéro 10 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Tatiana Labopin-Richard

Mercredi 18 mars 2015

L'algèbre linéaire est une très grosse partie du programme de Maths. Il est donc indispensable d'avoir bien compris ce chapitre. Nous allons passer en revue les choses classiques qu'il faut savoir faire et lister les méthodes possibles pour y parvenir. Nous illustrerons nos propos par des exercices et des exemples.

Ce polycopié n'est pas un cours, mais plutôt un recueil de méthodes. Nous ne rappelons donc pas les définitions que vous avez dans votre cours, et il est possible que des notions interviennent dans une partie alors que la partie concernant directement cette notion n'arrive que plus loin. Cette séance de soutien ne sera bénéfique que si vous connaissez déjà bien votre cours.

Dans la suite, si rien n'est précisé, on notera E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E et f une application linéaire de E dans F.

1 Le concept de linéarité

La linéarité est à la base de l'algèbre linéaire (d'où son nom !). Cette notion combine les deux lois d'un espace vectoriel (l'addition interne et la multiplication par un scalaire). Elle intervient par exemple pour caractériser les applications linéaires et les sous-espaces vectoriels, pour définir la notion de familles libres ou génératrices etc...

1.1 Exemples de propriétés stables par combinaisons linéaires

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est stable par combinaison linéaire, si $\forall(x,y) \in E^2$, x et y vérifient $\mathcal{P}$ implique $\forall\lambda,\mu$ scalaires, $\lambda x + \mu y$ vérifie $\mathcal{P}$.

Voici une liste (non exhaustive !) de propriétés classiques stables par combinaisons linéaires.

0) Appartenir à un sous-espace vectoriel.
1) Etre combinaison linéaire d'une famille de vecteurs donnée.
2) Appartenir à l'image d'une application linéaire donnée.
3) Appartenir au noyau d'une application linéaire.
4) Etre un vecteur où deux applications linéaires coïncident.
5) Etre dérivable en un point donné.
6) Etre nulle sur un segment donné.
7) Le fait pour un polynôme d'admettre pour racine un scalaire donné.
8) La conjonction de telles propriétés.

Avez-vous d'autres exemples ? Etes-vous capables de démontrer que ces propriétés sont effectivement stables par combinaisons linéaires ?

1.2 A quoi cette notion peut-elle nous servir ?

A) Une propriété stable par combinaison linéaire se propage par linéarité.

Méthode : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vraie sur E, on peut montrer que les trois propriétés suivantes sont vraies

1) $\mathcal{P}$ est vraie sur U une partie non vide E.
2) $\mathcal{P}$ est stable par combinaison linéaire.
3) U engendre E.

Exercice 1 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est polynômiale de degré 2, alors pour tous réels a et b :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 2 : Chercher dans les exercices suivants où la notion de linéarité intervient (plus particulièrement dans le 46).

B) Si f est un endomorphisme de E nul sur une partie génératrice de E alors f est nulle sur E.

C) Si f et g deux endomorphismes de E coïncident sur une partie génératrice de E alors $f = g$ (conséquence directe la propriété précédente).

Exercice 3 :
Soit e un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \,/\, g \circ f = f \circ g\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2) Observer que

$$\mathcal{C} = \left\{(a_0 Id + a_1 f + \dots a_{n-1} f^{n-1} | a_0, \dots a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}.$$

3) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

D) Si $f = g$ sur des sous-espaces vectoriels de E avec F et G supplémentaires, alors $f = g$.
Exercice 4 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$Ker(f) \subset Ker(g) \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = h \circ f.$$

E) Définir entièrement une application linéaire en ne donnant son image seulement sur une base.

Exercice 5 : Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$$f(1,0,0) = (0,1),\ \ f(1,1,0) = (1,0),\ \ f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x, y, z)$.

Remarque : Attention, il n'est pas vraie dans le cas général que si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont stables par combinaisons linéaires, (non$\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) le soient.

Exercice 6 : Construire un exemple de la remarque précédente.

2 Espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

2.1 Montrer que E est un espace vectoriel

Méthode : Pour montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on peut appliquer un des points suivants
a) Revenir à la définition d'un espace vectoriel.
b) Le voir comme un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel bien connu.

La définition d'un espace vectoriel étant compliquée, on utilise le point (b) quasiment tout le temps. Il est ainsi très important de connaître par coeur la définition d'un sous-espace vectoriel mais aussi de connaître les espaces vectoriels classiques (dits de références).

2.2 Quelques espaces vectoriels classiques

Dressons une liste d'espaces vectoriels classiques à connaître.
a) Pour A un ensemble non vide, les applications de A dans E
b) Les corps des scalaires $\mathbb{K}$
c) Les ensembles de n-uplets $\mathbb{K}^n$ et E^n
d) L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$
e) L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
f) Le produit cartésien de deux espaces vectoriels (attention, pas la réunion !)
g) L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

2.3 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

Comme nous venons de le voir, nous sommes souvent ramenés à montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Méthode : Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on peut montrer une des assomptions suivantes
a) Montrer que F est l'image (image reciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire de but (de source) E.
b) Montrer que F est une somme ou une intersection de sous-espace vectoriels.
c) Montrer que c'est une partie non vide de E stable par combinaison linéaire.
d) Montrer que c'est une partie non vide de E, stable par somme et par multiplication par un scalaire.

Remarque : Attention, pour les points 3 et 4, il ne faut pas oublier de montrer que les espaces ne sont pas vides ! En pratique, on montre souvent que $0_E \in F$.

Exercice 7 : Montrer que les parties suivantes sont des espaces vectoriels.
1) $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a,b]), \mathcal{R}) | f'(a) = f'(b)\}$.
2) $G = \left\{\in \mathcal{C}^0([a,b]), \mathcal{R}) | \int_a^b f(t)dt = 0\right\}$.

Exercice 8 : Soit F un sous-espace vectoriel de E et

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}(E),\ F \subset Ker(f)\}\,.$$

Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 9 : Soit F l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f'(x) - 3f(x+2) + f(2) + f'(-1) = 0$$

pour tout réel x. Montrer que F est un espace vectoriel.

Exercice 10 : Montrer que l'ensemble F des triplets (x, y, z) de réels vérifiant

$$: \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x - y + z & = 0 \\ x - 2y & = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel

Méthode : pour montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E, on peut montrer un des points suivants

a) $0_E \notin F$.
b) F n'est pas stable par multiplication par un scalaire.
c) F n'est pas stable par addition.

Exercice 11 : Les parties suivantes sont-ils des espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x =\}$
3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
6) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 12 : Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1) $\Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{bornée}\Big\}$
2) $\Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{monotone}\Big\}$
3) $\Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{convergente}\Big\}$
4) $\Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)\text{arithmétique}\Big\}$

Exercice 13 : A quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ?

2.5 Famille de vecteurs

2.5.1 Liberté

Méthode : pour montrer qu'une famille de vecteurs est libre on peut montrer un des points suivants

a) Revenir à la définition.

b) Montrer que cette famille est une sous-famille d'une famille libre.
c) Ecrire cette famille comme l'image directe d'une famille libre par une application linéaire injective .
d) Trouver une application linéaire f telle que l'image de de notre famille par f soit libre.

Remarque : Souvent, il faut revenir à la définition. Pour la famille $(x_1, \dots x_n)$ par exemple, on prend $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ un n-uplet de scalaires tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n = 0.$$

On montre alors que forcément les λ_i sont tous nuls. Il existe pour cela plusieurs méthodes classiques (trouver une propriéthiérarchisante ou dicriminante, voir les exercices 15 et 16).

Remarque : Un couple de vecteurs (u, v) de E est libre si et seulement si u et v sont colinéaires. Attention cependant à ne pas généraliser ce résultat hâtivement : $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$ sont colinéaires deux à deux, mais la famille qu'il forme est clairement liée.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}$ trois vecteurs de E telq que la famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ soit libre. On pose

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{x}, \ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}.$$

Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Exercice 15 : Soit $\alpha_1 \dots \alpha_n$ des réels distincts.
1) Pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, on définit $f_k : x \mapsto |x - \alpha_k|$. Montrer que $(f_k)_{k \in \{1, \dots n\}}$ est libre.
2) Pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, on pose $P_k = \prod\limits_{i=1, i \neq k} (X - \alpha_i)$. Montrer que $(P_k)_{k \in \{1, \dots n\}}$ est libre.

Exercice 16 : Soit $\alpha_1 \dots \alpha_n$ des entiers distincts ordonnés par ordre croissant.
1) On considère une famille $(P_1, \dots P_n)$ de polynômes tels que pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, $deg(P_k) = \alpha_k$. Montrer que cette famille est libre.
2) Pour tout k entier, on pose $f_k : x \mapsto \exp(\alpha_k x)$. Montrer que pour une n fixé, la famille $(f_1, \dots f_n)$ est libre.

2.5.2 Montrer qu'une famille est liée

Méthode : Pour montrer qu'une famille est liée, on peut montrer un des points suivants

1) Montrer que la cardinal de la famille est strictement supérieur à la dimension de l'espace (voir partie).
2) Revenir à la définition en exhibant une combinaison linéaire non triviale des vecteurs de la famille à résultat nul.
3) Exprimer un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres.
4) Ecrire la famille comme image directe par une application linéaire d'une famile liée.

Remarque : Si une famille a "trop" de vecteurs (plus que la dimension de l'espace vectoriel ambiant), alors elle est nécessairement liée. La famille (0_E) formée d'un seul vecteur est toujours liée.

Exercice 17 : Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, former une relation liant ces vecteurs :
1) (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$.
2) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (-1, 1, -2)$.
3) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$.
4) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 18 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. les fonctions $x \mapsto \sin(x + a)$, $x \mapsto \sin(x + b)$ et $\mapsto \sin(x + c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 19 : Soient $f_1, \dots f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots f_n)$ est liée.

2.5.3 Caractère générateur

Méthode : Pour montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice, on peut montrer un des points suivants
a) Montrer que chaque vecteur d'une famille génératrice donnée est combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.
b) Revenir à la définition et montrer que $Vect(\mathcal{F}) = E$.
c) Observer que c'est une sur-famille d'une famille génératrice.

Remarque : Si une famille a "trop peu" de vecteurs (moins que la dimension de l'espace vectoriel ambiant), alors elle ne peut être génératrice, mais on peut trouver des familles avec autant de vecteurs qu'on veut qui ne sont pas génératrice pour autant.

Exercice 20 : Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$. Chercher une famille génératrice pour cette espace vectoriel.

Exercice 21 : Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ | x_1 + x_3 = 0 \text{ et, } \ x_2 + x_4 = 0\}$ et $F = Vect(u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1, -1), u_3 = (1, -1, 1, -1))$. Déterminer une famille génératrice de $E + F$.

2.5.4 Montrer qu'une famille de vecteurs est une base

Méthode : Pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base, on peut montrer un des points suivants

a) Montrer qu'elle est libre ou génératrice et que son cardinal vaut la dimension de l'espace vectoriel dans lequel on travaille.
b) Revenir à la définition et montrer qu'elle est libre et génératrice.
c) L'écrire comme concaténée de deux bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
d) L'obtenir comme image d'une base par un isomorphisme.

Remarque : Voici un cas (a2) peut $\hat{\text{t}}$re utilisé. On dispose de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E. Pour déterminer une base de $F_1 + F_2$, on peut d'abord chercher la dimension de cette somme, puis ôter un nombre suffisant de vecteurs de la concaténée de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, tout en conservant le caractère générateur.

Exercice 22 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$\epsilon_1 = e_2 + 2e_3, \epsilon_2 = e_3 - e_1, \ \epsilon_3 = e_1 + 2e_2.$$

Montrer que ϵ est une base de E.

Exercice 23 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'esnemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

Exercice 24 : Soit $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X - 1$ et $P_3 = X^2 + X$. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 25 : Pour $k \in \{0, \dots n\}$; on pose $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0, \dots P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 26 : Question c) de l'exercice 2.

Exercice 27 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0 =$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = Vect(u, v, w)$ et $G = Vect(x, y)$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$?

2.5.5 Exhiber une base

Méthode : Pour exhiber une base d'un espace vectoriel on peut appliquer un des points suivants

1) Utiliser le théorème de la base incomplète en partant d'une famille génératrice que l'on connaît.
2) Trouver des bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E puis les concaténer.

Exercice 28 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

On pose

$$\epsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \epsilon_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que la famille ϵ est libre et la compléter en une base de E.

Exercice 29 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x).$$

1) Montrer que E est une sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2) Déterminer une base de E et sa dimension.

2.6 Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires

Méthode : Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaire, on peut montrer une des points suivants

a) Revenir à la définition et montrer que $F \cap G = 0_E$ et $F + G = E$.
b) Montrer que $F \cap G = 0_E$ ou que $F + G = E$ et que $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.
c) Montrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
d) Montrer qu'en concaténant une base de F et une base de G, on obtient une base de E.

Remarque : Attention, l'expression "F et G sont supplémentaires" n'a aucun sens si on ne précise pas l'espace ambiant E.

Exercice 30 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$.

Exercice 31 : Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 32 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et (f, g) deux endomorphismes de E avec $E = Im(f) + Im(g) = Ker(f) + Ker(g)$. Montrer que $E = Im(f) \bigoplus im(g) = Ker(f) \bigoplus Ker(g)$.

Exercice 33 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P annule f, et admet 0 pour racine simple, alors $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires dans E.

2.7 Dimension

Méthode : Pour trouver la dimension d'un espace vectoriel, on peut utiliser un des points suivants :

a) Revenir à la définition de la dimension (le nombre de vecteurs dans une base, le nombre maximal de vecteurs dans une famille libre, le nombre minimal de vecteurs dans une famille génératrice).
b) Utiliser le théorème du rang.
c) Utiliser le formulaire suivant.

Formulaire :
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Nous avons

1) $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$.
2) $dim(F \times G) = dim(F) + dim(G)$.
3) $dim(F^n) = n\ dim(F)$.
4) $dim(\mathcal{L}(F, G)) = dim(F)dim(G)$.
5) Si $F \subset G$, alors $dim(F) \leq dim(G)$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $F = G$.

Exercice 34 : Soit u et v des applications linéaire de E dans F deux espaces de dimensions finies. Montrer que

$$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v).$$

Exercice 35 : Soit F un sous-espace vectoriel de E et

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}(E),\ F \subset Ker(f)\}\,.$$

Calculer la dimension de $\mathcal{N}$.

Exercice 36 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E, telq que $f \circ g = 0$ et $f + g$ inversible. Montrer que

$$rg(f) + rg(g) = dim(E).$$

Exercice 37 : Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p-périodiques. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer cette dimension.

3 Applications linéaires

3.1 Déterminer si une application est linéaire

Méthode : Pour montrer qu'une application est linéaire on peut
a) Revenir à la définition : elle respecte les applications linéaires.
b) L'écrire comme composée d'applications linéaires (de référence).

Remarque : Pour le point a), il est donc inutile de montrer que $f(0_E) = 0_F$!

Remarque : Il faut faire très attention à la nature des objets qu'on manipule (on peut manipuler des applications d'applications, il faut donc revenir à la définition calmement pour ne pas s'emmêler les pinceaux !).

Exercice 38 : Soie E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit ϕ allant de E dans E, qui à f associe $x \mapsto f(-x^2)$. Montrer que ϕ est linéaire.

Exercice 39 : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soient $\phi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par :

$$\phi(f) = f',\ \psi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes. Déterminer images et noyaux.

3.2 Calculer le rang d'une application linéaire

Méthode : Pour calculer le rang d'une application linéaire f, on peut utiliser un des points suivants :
a) Utiliser le théorème du rang.

b) Revenir à la définition et montrer que $rg(f) = dim(\Im(f))$.
c) Encadrer le rang suffisamment finement.

Remarque : Le théorème du rang lie la dimension du noyau à celle de l'image de f :

$$dim(E) = rg(f) + dim(Kef(f)).$$

Il ne prétend certainement pas que ces sous espaces vectoriels sont supplémentaires !
Exercice 40 : Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :
1) $rg(f \circ g) \min(rg(f), rg(g))$.
2) $rg(f \circ g) \geq rg(f) + rg(g) - dim(E)$.

Exercice 41 : Reprendre l'exercice 5 et déterminer le noyau et l' image de f. Quel est le rang de f ?

3.3 Prouver l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une application linéaire.

Soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.

Méthode : Pour montrer que f est injective, on peut montrer un des points suivants :
a) Vérifier que son noyau est réduit au neutre.
b) utiliser le théorème du rang pour se ramener à un calcul de rang.
c) Vérifier qu'une base donnée de E est envoyée sur une famille libre de F.

Remarque : Attention la caractérisation a) n'est valable que pour les applications linéaires !

Méthode : Pour montrer que f est surjective, on peut montrer un des points suivants :
a) Vérifier que son image contient une partie génératrice de F.
b) L'écrire comme composée d'applications surjectives.
c) Utiliser le théorème du rang pour se ramener à un calcul de noyau.

Remarque : Si F et G ont des dimensions différentes, f ne peut pas être injective.

Méthode : Pour montrer que f est bijective, on peut montrer un des points suivants :
a) Montrer que f est injective ou surjective et que la dimension de l'espace de dṕart est la même que celle de l'espace d'arrivée (en dimension finie).

b) Montrer que f admet un inverse à droite ou à gauche (en dimensions finie).
c) L'écrire comme composée d'application bijective.
d) Trouver une base de E envoyée sur F.
e) Montrer que la matrice de f dans un couple donné de bases est inversible.
f) Exhiber directement l'inverse de l'application.

Exercice 42 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Montrer que f est un automorphisme et déterminer son inverse.

Exercice 43 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\phi(e_1) = e_1 + e_2$, $\phi(e_2) = e_2 - e_2$ et $\phi(e_3) = e_1 + te_3)$ définit une application linéaire ϕ de E dans E. Ecrire le transformé de tout vecteur x. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? Surjective ?

Exercice 44 : Soient $a_0, \dots a_n$ des réels distincts et $\phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\phi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \dots P(a_n), P'(a_n)).$$

Montrer que ϕ est surjective.

Exercice 45 : Soit $\phi : \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\phi(P) = (n+1)P - XP'$.
1) Justifier que ϕ est bien définie et que c'est une application linéaire.
2) Déterminer le noyau de ϕ.
3) Montrer que ϕ est surjective.

Exercice 46 : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et ψ une application linéaire de E dans F. Montrer que ψ est un isomorphisme si et seulement si l'image par ψ de toute base de E est une base de F.

Application 1 : Pour montrer un résultat d'existence et d'unicité, on peut introduire un isomorphisme.

Par exemple, on utilise ce résultat pour montrer le théorème d'interpolation de Lagrange.

Application 2 : Montrer que deux endomorphismes commutent.

Exercice 47 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f \circ g + 2id_E = 0$. Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.