Séance de soutien PCSI2 numéro 8 : Fonctions réelles : limites et continuité

Tatiana Labopin-Richard

28 janvier 2015

Lors de cette séance, nous allons étudier les fonctions réelles. On parlera de limite et puis plus particulièrement de continuité. Dans la suite, on notera f une fonction allant d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et a un élement de I.

1 Problèmes de limites

Pour commencer, voici un petit recueil de méthodes classiques auxquelles il faut penser.

Méthode : Pour montrer l'existence et calculer la limite l de f en a, on peut :
1) Transformer l'expression et utiliser les opérations algébriques sur les limites.
2) Utiliser le principe des gendarmes (théorème d'encadrement).
3) Utiliser les théorèmes de comparaison.
4) Si a est à l'extrémité de I, lorsque f est croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée), on peut déduire que la limite est $+\infty$ (resp. $-\infty$).
5) Idem à l'extrémité gauche.
6) Lorsque f est le produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée au voisinnage de a, on peut déduire que $l = 0$.
7) Utiliser la notion de nombre dérivé (taux d'accroissement).
8) utiliser les propriÃĺtÃĺs de croissances comparÃĺes.

Exercice 1 : Trouver les limites suivantes en identifiant une des méthodes précédentes.
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) + \frac{1}{x}$.
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
c) $\lim\limits_{x\to 0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\lfloor \frac{1}{x}\rfloor$.
e) $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor \frac{1}{x}\rfloor$.
f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x-\sin(x))$.
g) $\lim\limits_{x\to +0} x\sin(x)$.
h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin(\exp(x))}{x}$.
i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\cos(\exp(x))}{x^2+1}$.
j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$.
k) $\lim\limits_{x\to O^+} x^x$.
l) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$.
m) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$.
o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Méthode : Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a, on peut :

1) Contredire l'unicité de la limite en trouvant deux suites (u_n) et (v_n) de points de I tendant vers a, telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne tendent pas vers la même limite.
2) Trouver une suite (u_n) de points de I tendant vers a telle que $(f(u_n))$ n'admette pas de limite.
3) Utiliser les opérations algébriques.

Exercice 2 : Etudier les problèmes suivants en utilisant une des méthodes précédentes :

a) Montrer que si $f = g + h$ avec g qui admet une limite en 0 mais pas h, alors f n'admet pas de limite en 0.
b) Montrer que $h_1 : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2$ et $h_2 : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2$ n'admettent pas de limite en 0.
c) Montrer que $f : x \mapsto x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2$ n'admet pas de limite en 0.
d) $h_1 + h_2$ admet-elle une limite en 0 ?
e) Montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

Enfin, on peut utiliser toutes ces méthodes pour étudier la continuité des fonctions réelles puisque par dÃľfinition : f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exercice 3 : Ajuster a pour la fonction suivante soit continue :

$$f\colon x \longmapsto \begin{cases} a\exp(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4 : Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de f pour $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f\colon x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est totalement discontinue.

Exercice 6 : Etudier la continuité de f définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.

2 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leq b$. Si f est continue alors f prend toutes les valeurs intermédiaires comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Pouvez-vous faire un dessin pour illustrer ce théorème ?

Remarque : On ne sait rien sur l'unicité : si $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$ mais il existe peut-être aussi $x' \in [a,b]$ tel que $y = f(x')$.

Corollaire : Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ prend une valeur prositive et une valeur négative alors f s'annule.

Exercice 7 : Montrer qu'un polynôme unitaire de degré 3 possède au moins une racine réelle.

Exercice 8 : Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(a) \leq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$ montrer que f s'annule.

Exercice 10 : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 11 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

a) Montrer que si $f([a,b]) \subset [a,b]$ alors f admet un point fixe.
b) Montrer que si $[a,b] \subset f([a,b])$ alors f admet un point fixe.

Exercice 12 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 13 : Montrer que les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

2.2 Image d'un segment

Théorème : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est contiue alors f admet un minimum et un maximum. On dit que f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi :

$$\exists (c,d) \in [a,b]^2,\ \forall x \in [a,b], f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Remarque : On peut donc écrire $\inf\limits_{[a,b]} f = \min\limits_{[a,b]}$ et $\sup\limits_{[a,b]} f = \max\limits_{[a,b]}$.

Corollaire : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. plus précisemment :

$$f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f ; \max_{[a,b]} f\right].$$

Attention : Cette propriété n'est vraie que pour les segments ! Dessiner un contre-exemple.

Exercice 14 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) > 0.$$

Montrer que $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) > 0$.

Exercice 15 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que f converge en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 16 : Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 17 : Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ont des composées bornées.

Exercice 18 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to-\infty} f = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 19 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que chaque $y \in \mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f. Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ possédant exactement un antécédent.

2.3 Théorème de la bijection :

ThÃľorÃĺme : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue strcitement croissante, alors :

1) $f(I)$ est un intervalle de même type que I et dont les exétrémités sont les limites de f aux extrémités de I.
2) f réalisé une bijection de I vers $f(I)$.
3) Son application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, de même monotonie que f et les limites de f^{-1} aux extrémités de $f(I)$ sont les extrémités de I.

Corollaire : Par passage à l'oppposé, on peut énoncer un résultat semblable pour f continue et strictement décroissante sur un intervalle I.

Exercice 20 : Appliquer ce théorème à $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + \ln(x)$.

Propriété : Si $f : I \to J$ est une bijection continue alors f est strictement monotone et f^{-1} continue.

Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

a) Montrer que f réalise une bjiection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.
b) Déterminer f^{-1}.

Exercice 22 : Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue vérifiant $f \circ f = id$. Déterminer f.

3 Conclusion :

Créez un petit mémo sur ce chapitre avec les thórème principaux et les méthodes qui vous semblent importantes ou pas encore naturelles. Donner quelques exemples que vous avez retenu de cas d'applications de ces théorèmes. Discutez-en ensuite avec votre voisin et complétez vos mémo si ses remarques vous semblent pertinentes.