Séance de soutien PCSI2 numéro 11 : probabilités conditionnelles

Tatiana Labopin-Richard

Mercredi 13 mai 2015

Lors de cette séance, nous allons travailler sur les théorèmes importants au programme concernant les probabilités conditionnelles.

1 Rappels de cours

Ω désigne un ensemble fini et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Soit B un évènement de Ω vérifiant $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout évènement A de Ω, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :*

$$\frac{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 1.2 *Si Ω est muni d'une probabilité uniforme, la probabilité de A sachant B se comprend comme la proportion du nombre d'éléments de A à l'intérieur de B. Si Ω est muni d'une probabilité quelconque, l'idée est semblable : la probabilité de A sachant B mesure la proportion de chance d'obtenir la réalisation de A lorsqu'on sait B réalisé.*

Exemples : On lance un dé équilibré. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On considère les événements $A =$ on obtient 6 et $B =$ le tirage est pair . On a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}, \ P(A|\bar{B}) = \frac{0}{1/3} = 0.$$

On a toujours $\mathbb{P}(B|B) = 1$.

Théorème 1.3 *Si B est un évènement de Ω vérifiant $\mathbb{P}(B) > 0$ alors l'application $P_B : \mathbb{P}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}^+$ définie par $P_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ définit une probabilité sur Ω.*

Remarque 1.4 *Cela nous permet d'utiliser toutes les propriétés connues sur les probabilités classiques aux probabilités conditionnelles.*

Erreur courante : Attention cependant à ne pas raisonner trop vite. La formule du passage au complémentaire doit se faire correctement. Nous avons $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}|B)$ mais pas $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A|\bar{B})$.

1.2 Formule des probabilités composées

Théorème 1.5 *Soit A,B deux évènements de Ω avec $\mathbb{P}(B) > 0$. On a*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B).$$

Corollaire 1.6 *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements de Ω avec $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. On a*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exemple : Considérons une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?

On note A_i l'évènement : la i-ème boule tirée est blanche. Clairement

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Le calcul direct de $\mathbb{P}(A_2)$ est moins évident car on ne connaÃőt pas la composition précise de l'urne lors du deuxième tirage. Cependant, le calcul de $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ est facile :

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

De même

$$\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Par probabilités composées, on obtient alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$$

.

1.3 Formule des probabilités totales

Théorème 1.7 *Si* $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *est un système complet d'évènements de l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$ *de probabilités non nulles alors pour tout évènement* B *de* Ω

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Exemple : On tire successivement trois boules dans une urne contenant 6 boules blanches et 4 boules noires. Déterminons la probabilité de l'évènement B : la troisième boule tirée est blanche.

On considère le système complet d'évènements A_0 : les deux premiers tirages comporte 0 boule blanche, A_1 : les deux premiers tirages comporte 1 boule blanche, A_2 : les deux premiers tirages comporte 2 boules blanches. Notons aussi B_i l'évènement : la boule du i-ème tirage est blanche, de sorte que $B_3 = B$.

Par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\mathbb{P}(A_2).$$

Puisque l'on connaÃőt la composition de l'urne lorsque l'évènement A_k est réalisé

$$\mathbb{P}(B|A_0) = \frac{6}{8},\ \mathbb{P}(B|A_1) = \frac{5}{8}\ \mathit{et}\ \mathbb{P}(B|A_2) = \frac{1}{2}.$$

Puisque $A_0 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$, par probabilités composées

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(\bar{B}_2|\bar{B}_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}.$$

Puisque $A_1 = (B_1 \cap \bar{B}_2) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2)$ avec $B_1 \cap \bar{B}_2$ et $\bar{B}_1 \cap B_2$ incompatibles,

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1 \cap \bar{B}_2) + \mathbb{P}(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9}.$$

Enfin $A_2 = B_1 \cap B_2$ donc

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}.$$

Finalement $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{5}$.

Ce résultat pouvait être attendu car, par raison de symétrie, la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche est la même que celle que la première tirée soit blanche...

1.4 Formule de Bayes

Théorème 1.8 (Formule de Bayes) *Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles alors*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Corollaire 1.9 *Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles alors pour tout évènement B de probabilité non nulle*

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Remarque : La formule de Bayes est utile pour les raisonnements rétroactifs. Si on sait mesurer la conséquence B d'un évènement A et que l'on sait l'évènement B réalisé, la formule de Bayes permet de savoir si l'évènement A l'a été. Voir méthode 4.

Exemple :

Une urne contient deux dés. L'un est équilibré et l'autre donne systématiquement un 6. On choisit un dé dans l'urne et on le lance. On suppose que le dé lancé donne un 6, déterminons la probabilité que le dé soit équilibré.

Notons A l'évènement : le dé choisi est équilibré. On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 0.5$. Notons B l'évènement : le dé lancé donne un 6. On veut mesurer $\mathbb{P}(A|B)$.

Par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

avec

$$\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

et

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{1}{12} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

Ainsi $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{7}$.

2 Méthodes classiques

Méthode 1 : Pour résoudre un exercice faisant intervenir des probabilités conditionnelles, il est souvent utile de donner un nom aux événements considérés dans l'énoncé et d'écrire les probabilités données par l'énoncé.

Exercice 1 Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boites sont abÃőmées. Le gérant estime que :

- 60% des boites abÃőmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
- 98% des boites non abÃőmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : la boite est abimée et par D l'événement : la boite achetée contient au moins une disquette défectueuse.

1) Donner les probabilités $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\bar{A})$, $\mathbb{P}(D|A)$, $\mathbb{P}(D|\bar{A})$, $\mathbb{P}(\bar{D}|A)$ et $\mathbb{P}(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D.
2) Le client constate qu'un des CD-ROM achetés est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée.

Méthode 2 : On peut chercher la probabilité de l'intersection d'événements en utilisant la formule des probabilités composées.

Exercice 2 On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Méthode 3 : Si on cherche la probabilité d'un certain événement, et que l'on connait la probabilité de cet événement lorsque d'autres événements sont réalisés, on peut utiliser la formule des probabilités totales.

Exercice 3
Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes $R1$, $R2$ et $R3$: les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe $R1$, 50% pour la classe $R2$, et 30% pour la classe $R3$. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

2) Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Méthode 4 : Lorsque l'on connait $\mathbb{P}(A|B)$ et que l'on souhaite calculer $\mathbb{P}(B|A)$, on utilise la formule de Bayes.

Exercice 4
Les individus d'une population ont la probabilité 2/100 de présenter une anomalie génétique déterminée. Un test détecte cette anomalie et s'avère positif chez 95% des malades, mais aussi faussement positif dans 1% de la population saine. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Déterminons la probabilité qu'il soit malade.

3 Exercices en vrac pour s'entraîner

Exercice 5 : Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète lâĂŹexpérience à lâĂŹenvie. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.

Exercice 6 : Une succession dâĂŹindividus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu A_K transmet à l'individu A_{k+1} l'information qu'il a reçu avec probabilité p ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres. Calculer la probabilité p_n que l'individu A_n reçoive l'information que A_1 avait transmis au départ. Si $0 < p < 1$, quelle est la limite de $p_,$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 7 : Dans une population, une personne sur 10 000 souffre dâĂŹune pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez $0,1\%$ des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité dâĂŹêtre malade ? QuâĂŹen conclure ?

Exercice 8 : Une pochette contient deux dés. LâĂŹun est parfaitement équilibré, mais le second donne un 6 une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

1) On obtient un six . Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?

2) Au contraire, on a obtenu un cinq. Même question.

Exercice 9 : Dans une tombola, 1000 billets sont mis en vente, et deux billets sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ d'avoir un billet gagnant.

Exercice 10 : Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrÃťle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrÃťle. Quelle est la probabilité

1) qu'il y ait une erreur de contrÃťle ?
2) qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 11 : Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?