Oral type CCP

12 juin 2014

1 Exercice 1 (8 points)

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Démontrer que dans $\mathcal{L}(E)$, la famille $\{Id, f, \ldots, f^{n^2}\}$ est liée. Déduisez-en que f admet un polynôme annulateur non identiquement nul.
2) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propore de f. Démontrer que si P est un polynôme annulateur de f alors $P(\lambda) = 0$.

2 Exercice 2 (12 points)

Soit ϕ définie sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $\phi(x) = x$ et $\phi(\frac{-\pi}{2}) = \phi(\frac{\pi}{2}) = 0$.
1) Représenter la fonction f π-périodique définie par $\phi(x) = f(x)$ sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $f(x)$ pour $x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
2) Déterminer les coefficients de Fourier de f.
3) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$.