

# Oral type Central - Sujet 3

12 juin 2014

## 1 Exercice

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle positive de taille  $n$ . Pour  $\alpha > 0$ , on pose

$$S_\alpha = \{M \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R}) / \det(M) \geq \alpha\}.$$

Le but est de montrer la formule :

$$\inf_{M \in S_\alpha} \text{Tr}(AM) = n (\alpha \det(A))^{\frac{1}{n}}.$$

- 1) Démontrer la formule dans le cas où  $A = I_n$ .
- 2) Montrer que toute matrice  $A$  symétrique réelle positive peut s'écrire  $A = P^T P$  avec  $P$  matrice carrée de taille  $n$ .
- 3) Démontrer la formule.
- 4) Le résultat est-il encore vrai pour  $\alpha = 0$  ?
- 5) Le résultat est-il encore vrai si  $A$  n'est que symétrique réelle ?