Pourquoi l'exercice 2 du DS1 n'était pas difficile ?

Tatiana Labopin-Richard

2 mars 2015

Lors de cette séance, nous allons résoudre l'exercice 2 du DS 1. Nous allons profiter de cette occasion pour étudier comment on doit construire un raisonnement, pourquoi les idées doivent s'enchaîner de cette manière, qu'est-ce qui dans l'énoncé, nous pousse à faire telle ou telle chose.

Exercice : Soit E un ensemble non vide et f une application de E vers E. On note $f \circ f = f^2$ et $f \circ f \circ f = f^3$. On suppose que

$$f^3 = f.$$

1) Montrer que si f est injective, alors $f^2 = id_E$. Que pouvons-nous alors dire de f ?
2) Montrer que si f est surjective, alors $f^2 = id_E$.

Résolution de la question 1 au brouillon

Lorsque l'on cherche à résoudre un exercice, il est très important de prendre de la hauteur sur ce qu'on fait. Je conseille de faire d'abord le point sur les choses essentielles en se posant les questions suivantes.

1) Quelles sont mes hypothèses ? Que signifient-elles exactement en termes mathématiques (il peut y avoir plusieurs caractérisations différentes, dans ce cas, je vous conseille de toutes les noter pour les avoir sous les yeux) ?
2) Qu'est-ce que je cherche à démontrer ? Que cela signifie-t-il exactement en termes mathématiques ?

Répondons à ces questions dans notre cas.

1) Nous avons deux hypothèses.

   H1) $f^3 = f$. Cela signifie que

$$\forall x \in E,\ f^3(x) = f \circ f \circ f(x) = f(f(f(x))) = f(x).$$

   H2) f est injective. Cela signifie que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y).$$

2) Nous cherchons à démontrer que $f^2 = f$, c'est à dire que

$$\forall x \in E,\ f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = x.$$

Il faut maintenant construire le raisonnement. Pour cela, on regarde ce qu'on cherche à démontrer. Ici, nous avons affaire à une propriété de la forme $\forall x, \ \ldots$. Nous allons donc poser un $x \in E$ quelconque et dérouler nos hypothèses pour en arriver à la conclusion (à savoir que $f^2(x) = x$). Le départ logique du raisonnement est donc :

Soit $x \in E$.

$$f^2(x) = f \circ f(x) =?$$

A ce stade là, aucune hypothèse ne semble pouvoir s'appliquer directement. Il nous faut donc réfléchir un peu. N'ayant qu'un seul point x, il paraît compliqué d'utiliser H2. Nous allons donc plutôt essayer d'appliquer H1. Pour cela, nous considérons plutôt f^3 que f^2 dans un premier temps. (Pour aller plus loin, on peut même déjà voir que c'est la bonne voie pour pouvoir utiliser H1 dans la suite, car une hypothèse d'injectivité permet de passer d'une information sur $f(X)$ à une information sur X et donc nous permettra de revenir à f^2 alors qu'on travaillait avec f^3). Par H2, nous avons donc

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x)$$

et nous sommes maintenant exactement dans le cas d'application de l'hypothèse H1. La précédente équation implique

$$f^2(x) = x.$$

Nous venons donc de montrer que $\forall x \in E,\ f^2(x) = x$.

Résolution de la question 2 au brouillon
Répondons aux questions dans ce cas.
1) Nous avons deux hypothèses.

H1) $f^3 = f$. Cela signifie que

$$\forall x \in E,\ f^3(x) = f \circ f \circ f(x) = f(f(f(x))) = f(x).$$

H2) f est surjective. Cela signifie que

$$\forall y \in E,\ \exists x \in E \ /\ f(x) = y.$$

2) Nous cherchons à démontrer que $f^2 = f$, c'est à dire que

$$\forall x \in E,\ f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = x.$$

Nous partons de la même manière que précédemment. Cette fois-ci, il est facile d'utiliser directement l'hypothèse H2, puisque nous avons un élément x. D'après H2 il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. Partons donc de la partie gauche de l'égalité que nous voulons démontrer

$$f^2(x) = f^3(z)$$

Nous tombons directement dans le cadre d'application de la seule hypothèse que nous n'avons pas encore utilisée : H1 ! Utilisons-là.

$$f^2(x) = f^3(z) = f(z) = x$$

Nous venons de démontrer que $\forall x \in E,\ f^2(x) = x$.

Il ne reste plus qu'à reporter cela au propre, en n'écrivant que les points importants !

Rédaction :

1) Soit $x \in E$.

L'hypothèse H1 nous permet de dire que

$$f^3(x) = f(x).$$

Par injectivité de la fonction f (hypothèse H2), nous en déduisons que

$$f^2(x) = x.$$

Nous venons donc de montrer que

$$\forall x \in E,\ f^2(x) = x$$

ce qui est équivalent à $f^2 = id$.

2) Soit $x \in E$. Comme f est surjective (hypothèse H2), il existe z un élément de E, tel que $x = f(z)$. L'hypothèse H1, nous permet alors de constater que

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(f(f(z))) = f^3(z) = f(z) = x.$$

Comme précédemment, nous venons donc d'établir que $f^2 = id$.

Conclusion :

Lorsque nous sommes face à un exercice qui semble difficile, on essaie de construire un raisonnement en utilisant les étapes suivantes :

1) Lire correctement l'énoncé. Repérer les hypothèses et bien comprendre le résultat à montrer. Attention à la nature des objets qu'on manipule.

2) Isoler les hypothèses. Les écrire sous formes mathématiques et faire un petit point sur ce qu'on sait sur ces notions.
3) Ecrire proprement et mathématiquement le résultat que l'on souhaite démontrer. Commencer la preuve en posant les objets nécessaires.
4) Chercher les hypothèses qui peuvent s'appliquer et dérouler le raisonnement en les utilisant une par une.
5) Vérifier que toutes les hypothèses ont été utilisées. Relire les calculs.
6) Mettre le raisonnement au propre (la forme la plus propre n'est pas forcément dans l'ordre où l'on a eu les idées !).