Séance de soutien PCSI2 numéro 3 : Représentations des nombres complexes

Tatiana Labopin-Richard

5 novembre 2014

Il existe plusieurs façons de représenter des nombres complexes.

Nom	Notation	Unicité
Neutre	z	oui
Algébrique	$a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}$	oui
Trigo	$r \exp(i\theta)$, $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$	de r, pas de θ
Géométrique	M	oui

Nous allons voir dans quel cas il est préférable d'utiliser telle ou telle représentation.

1 La représentation neutre

L'importance de cette représentation repose sur les propriétés suivantes, qu'il faut bien connaître

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2} \quad \boxed{Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}} \quad \boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

$$\boxed{(z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z})} \quad \boxed{(z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z = |z|)} \quad \boxed{(z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1)}.$$

Applications

Exercice 1 Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$, tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|z| = 1$, alors $|1 + z| \geq 1$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.

Exercice 3 On note D le disque unité complexe ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$. On fixe $z_0 \in D$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(z \neq \frac{-1}{\bar{z_0}}\ et\ \frac{z+z_0}{1+z\bar{z_0}} \in D\right) \Leftrightarrow z \in D.$$

2 La représentation algébrique

Les notions qui sont liées à cette représentation sont bien entendu la partie imaginaire et la partie réelle. L'avantage de cette représentation réside dans le fait qu'elle permet souvent de traiter des problèmes de nombres compexes en se ramenant à des calculs sur les nombres réels. De plus, elle se comporte très bien avec la somme (mais pas bien avec le produit). Attention toute fois à ne pas utiliser systématiquement cette représentation, qui peut mener à des calculs compliqués.

Applications classiques

1) Utiliser le fait que $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et faire de l'identification. (Voir exercices 9 et 5).

Application directe : Trouver les racines carrées de complexes. Pour résoudre l'équation $\omega^2 = z$ en ω lorsque $z = a + ib$ est connu, commencer par poser $\omega = x + iy$ puis suivre les étapes suivantes.
Etape 1) Egaler les parties réelles de l'égalité

$$\boxed{x^2 - y^2 = a.}$$

Etape 2) Egaler les modules de l'égalité

$$\boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Etape 3) En déduire x^2 et y^2 puis x et y au signe près.
Etape 4) Egaler les parties imaginaires

$$\boxed{2xy = b.}$$

pour déterminer si x et y ont le même signe.
5) Donner les valeurs possibles de ω.

Exemple : $z = -3 - 4i$.
1) $x^2 - y^2 = -3$.
2) $x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5$.
3) $x^2 = \frac{-3+5}{2} = 1$ donc $x = 1$ ou -1 et $y^2 = 4$ donc $y = 2$ ou -2.
4) $2xy = -4$ donc x et y sont de signes différentes.
Dans cet exemple, les solutions sont donc $1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

2) Considérer le complexe z comme une inconnue et trouver les zéros de trinômes.

Remarque 1 : On notera que nous savons, dans le cas général seulement trouver les racines des polynôme de degré 2. Ainsi, dès lors que vous devez chercher les racines d'un polynômes de degré supérieur, soit il y a des racines évidentes, soit on vous donne une indication pour trouver des racines et se ramener à du degré 2 (voir *Exercice 5*).

Remarque 2 : Les formules pour trouver les racines d'un trinômes nécessitent de savoir trouver les racines carrées d'un complexe (on a besoin de $\sqrt{\Delta}$). Nous utilisons alors la méthode du point précédent !

Exercice 5
1) Résoudre l'équation $(1+i)z^2 - 4iz + 26 - 2i = 0$
2) Résoudre l'équation $(7-6i)z^2 - 2(7-6i)z - 85 = 0$
3) Résoudre l'équation $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$, sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
4) Résoudre l'équation $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$.

Quelques exercices en plus
Exercice 4 Refaire l'exercice 2 avec la forme algébrique.

Exercice 6 Trouver des nombres a, b, c tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, z^2\left(a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z+\frac{1}{z}\right) + c\right) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

En déduire la forme algébrique de $\exp(\frac{2i\pi}{5})$.

3 La représentation trigonométrique

On appelle aussi cette représentation, la représentation exponentielle. C'est la représentation la plus courante. Elle a l'avantage de très bien se comporter avec les produits (car $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$) et facilite les calculs trigonométriques. En revanche, cette représentation se comporte mal lorsque l'on veut sommer des complexes, et elle n'existe pas pour le complexe 0.

Remarque : Pour passer de la représentation algébrique à la représentation trigo, il faut se rappeler que

$$\boxed{\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)} \quad \boxed{r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}} \quad \boxed{\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

On pensera aussi à décomposer le problème en petits sous-problème en séparant les numérateurs, dénominateurs et puissances par exemple, puisque que la forme exponentielle se comporte bien avec le produit et le quotient.

Exercice 7 Mettre sous forme trigo le nombre complexe

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3}.$$

Applications classiques :

1) Linéariser les fonctions en cos et sin (on parle de fonctions circulaires). Les deux outils pour cela sont les formules de Moivre et d'Euler qu'il faut bien connaître. La linéarisation de telles fonctions peut permettre de résoudre des équations en cos et sin.

   Exercice 8 Linéariser la fonction

   $$\phi : x \mapsto \sin(x)^3 \cos(x).$$

   Exercice 9 Résoudre l'équation

   $$\cos(3x) - 2\cos(2x) = 0.$$

2) Rechercher des ensembles de la forme de l'*exercice 10*, où la puissance n nous donne l'intuition qu'il sera plus simple de raisonner avec la forme trigonométrique.
   Exercice 10 Déterminer l'ensemble

   $$\{n \in \mathbb{N}, \left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3}\right)^n \in \mathbb{R}^+\}.$$

3) Chercher les racines $n$ième d'un complexe. Pour cela, nous avons besoin des racines $n$ième de l'unité.

   Rappel sur les racines $n$ième de l'unité
   Pour n un entier supérieur à 1, les racines $n$ième de l'unité (dont l'ensemble est souvent noté $\mathbb{U}_n$) sont les complexes $\rho_{n,k}$ vérifiant

   $$\boxed{\rho_{n,k}^n = 1.}$$

   Ces complexes sont au nombre de n et nous les connaissons explicitement :

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{\rho_{n,k},\ k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}\} = \{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ k \in [0, n-1]\}}$$

D'autres résultats sont connus et souvent utilisés. Par exemple, la somme de ces n complexes est nulle et leur produit vaut $(-1)^{n-1}$ (retrouvez-le !).

Revenons à la recherche des racines $n$ième d'un complexe. Nous cherchons à résoudre l'équation

$$z^n = v$$

d'inconnue z.

0) Mettre v sous forme trigonométrique : $v = r\exp(i\theta)$.
1) Rechercher d'une solution particulière en s'aidant de la forme trigonométrique de z : $z_0 = \sqrt[n]{r}\exp\left(i\frac{\theta}{n}\right)$.
2) Rechercher toutes les solutions en utilisant les racines $n$ième de l'unité. Comme

$$z^n = v \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \ \Leftrightarrow\ z = \mathbb{U}_n z_0$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S} = \{z_0\rho_{n,k},\ k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}\}}.$$

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.

4 La représentation géométrique

Cette représentation est liée à la notion d'affixe et sert à résoudre des problèmes de géométrie euclidienne.

Faisons un récapitulatif des propriétés géométriques importantes qui servent dans les exercices.

Distances et angles orientés

Soit A, B, C et d quatre points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a alors

$$\boxed{|z_B - z_A| = AB} \quad \boxed{arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})\ (2\pi)} \quad \boxed{arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ (2\pi)}$$

Points alignés et droites perpendiculaires
Si les points A, B et C sont deux à deux disctints, alors

1) A, B, et C sont alignés si et seulement si

$$\boxed{arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0\ (2\pi)\ \Leftrightarrow\ \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}}$$

2) Les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si et seulement si

$$\boxed{arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)\ \Leftrightarrow\ \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in i\mathbb{R}}$$

Transformations du plan Soient M, M', B et Ω d'affixes respectives z, z', b et ω. Soit k un réel non nul.

1) La relation $\boxed{z' = z + b}$ traduit que le point M' est l'image du point M par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
2) La relation $\boxed{z' - \omega = k(z - \omega)}$ traduit que M' est l'image de M par l'**homothétie** de centre Ω et de rapport k.
3) La relation $\boxed{z' - \omega = \exp(i\theta)(z - \omega)}$ traduit que le point M' est l'image de M par la **rotation** de centre Ω et d'angle θ.

Applications

Exercice 12 Que dire du quadrilatère $ABCD$, lorsque les affixes respectives a, b, c et d vérifient $a + c = b + d$ et $a + ib = c + id$?

Exercice 13 Reprendre l'exercice 2 d'un point de vu géométrique.

Exercice 14 Déterminer le lieu des points M qui sont alignés avec le point I (d'affixe i) et M' d'affixe iz. En déduire le lieu des M' correspondant.

Exercice 15 Quelle est l'image du cercle unité par $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?