Séance de soutien PCSI2 numéro 4 : Résolution des EDL1 et EDL2

Tatiana Labopin-Richard

19 novembre 2014

Pour résoudre une équation différentielle linéaire, il faut :
1) Reconnaître le type d'équation et élaborer un plan d'étude.
2) Se lancer dans les calculs.

1 Définir un plan d'étude

Nous allons étudier deux types d'équations différentielles lors de cette séance. Les EDL1 qui sont de la forme :

$$y'(x) + a(x)y(x) = \delta(x)$$

avec a et δ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Et les EDL2 qui sont de la forme :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta(x)$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}$ (qui sera ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et δ une fonction continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

La méthode pour résoudre ce type d'équation sera toujours la même.

Méthode :
1) Résolution de l'équation homogène.
2) Recherche d'une solution particulière.
3) Expression de la solution générale par somme de 1) et de 2).

Détaillons un peu ces étapes.

2 Résolution de l'équation homogène

2.1 Ordre 1

Dans le cadre des EDL1, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto \lambda \exp(-A(x)), \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où A est une primitive de la fonction continue a.

Remarques :
1) On verra plus tard que cet ensemble a une structure très particulière. Il s'agit en effet d'un espace vectoriel.
2) La difficulté est donc ici de trouver une primitive de a.

Exemple - Exercice 1 : Déterminer la solution générale de l'équation

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Attention : Il faut simplifier au maximum les expressions en ln et exp mais il ne faut pas écrire de bêtises ! On rappelle que

$$\exp(-\ln(x)) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

2.2 Ordre 2

Pour trouver l'ensemble des solutions d'une EDL2, il faut résoudre l'équation caractéristique

$$\mathcal{C} : az^2 + bz + c = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont alors de la forme :
1) $x \mapsto \lambda_1 \exp(r_1 x) + \lambda_2 \exp(r_2 x)$ si l'équation a deux solutions distinctes r_1 et r_2.
2) $x \mapsto \lambda_1 \exp(rx) + \lambda_2 x \exp(rx)$ si l'équation n'a qu'une solution double r.
3) $x \mapsto \lambda_1 \cos(\omega x)\exp(\rho x) + \lambda_2 \sin(\omega x)\exp(\rho x)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation admet deux solutions différentes : $r = \rho + i\omega$ et son conjugué.

Exemple-Exercice 2 : Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Attention : Il ne faut pas se tromper pour le cas 2. Les solutions ne peuvent être de la forme $x \mapsto \lambda \exp(rx)$ uniquement. On comprendra mieux pourquoi lorsque nous verrons les espaces vectoriels et leur dimension. Mais en attendant, on peut se souvenir que une EDL2 a une solution utilisant toujours 2 paramètres.

3 Recherche d'une solution particulière

Il existe plusieurs méthodes classiques pour trouver des solutions particulières.

3.1 Solution évidente

Il faut toujours commencer la recherche par les solutions évidentes. On vérifie si une fonction simple (même une constante) n'est pas trivialement solution.

3.2 Utiliser la linéarité

Le concept de linéarité signifie que lorsque deux fonctions sont solutions de l'équation alors toute combinaison linéaire de ces fonctions est encore solution.

3.2.1 Principe de superposition

Cette propriété est à la base du principe de superposition, qui permet de découper une gros problème en plusieurs petits problèmes : si nous considérons l'équation (δ) : $(\delta_1) + (\delta_2)$ et que nous connaissons f_1 et f_2 des solutions respectives de (δ_1) et (δ_2) alors en faisant la somme $f_1 + f_2$ nous construisons une solution de (δ).

Exemple - Exercice 3 : Résoudre l'équation $y' + y = \exp(x) + \cos(x)$.

3.2.2 Passage d'une solution complexe à une solution réelle

La linéarité permet aussi de trouver des solutions réelles à partir de solutions complexes. En effet, si nous sommes dans le cadre suivant :

- Ordre 1 et a est à valeurs réelles.
- Ordre 2 et $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.

Alors si f est solution de l'équation différentielle, $Re(f)$ et $Im(f)$ sont solutions respectivement de l'équation différentielle où l'on remplace le second membre par la partie réelle de celui-ci et par la partie imaginaire.

Attention - Exercice 4 : Attention toute fois de bien vérifier le cadre pour ne pas écrire de bétises !

1) Trouver une solution particulière de

$$y'' + y' + y = \exp(ix).$$

En déduire des solutions particulières de $y'' + y' + y = \cos(x)$ et $y'' + y' + y = \sin(x)$.

2) Vérifier que $\phi : x \mapsto \exp(ix)$ est une solution particulière de

$$y'' - iy' + y = \exp(ix).$$

La fonction $Re(\phi)$ est-elle solution de

$$y'' - iy' + y = \cos(x)?$$

Pourquoi ?

3.3 Second membre à forme particulière

3.3.1 Second membre polynÃťmial-exponentielle

On se place dans la cadre suivant : on étudie des EDL1 et EDL2 à coefficients constants, (donc de la forme $y'(x) + ay(x) = \delta(x)$ pour l'ordre 1). On suppose que le second membre est de la forme $Q(x)\exp(\alpha x)$ avec Q un polynÃťme non nul de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Méthode :
On considère les équations caractéristiques $\mathcal{C}$ valant $X + a = 0$ pour l'ordre 1 et $aX^2 + bX + c = 0$ en ordre 2.

1) Si α n'est pas solution de $\mathcal{C}$ alors l'équation différentielle admet une solution de la forme $x \mapsto P(x)\exp(\alpha x)$ avec P un polynÃťme du même degré que Q.
2) Si α est l'une des deux solutions de $\mathcal{C}$ alors une solution particulière est de la forme $x \mapsto xP(x)\exp(\alpha x)$ avec P de même degré que Q.
3) Si α est l'unique solution de $\mathcal{C}$, une solution particulière est $x \mapsto P(x)\exp(\alpha x)$ où $P' = Q$ en ordre 1 ou $P'' = Q$ en ordre 2.

Exemple - Exercice 5 : Trouver une solution particulière de $y'' - 4y' + y = (x^2 + x)\exp(2x) + x\exp(x)$.

3.3.2 Second membre en $\cos$ et $\sin$

Lorsque le second membre est en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\alpha x)$ on peut rechercher une solution particulière en $A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ en trouver A et B par identification.

Exemple-Exercice 6 : Résoudre $y' + y = \cos(x)$.

3.4 Méthode de variation de la constante

Seul le cadre EDL1 est au programme pour cette méthode.

Méthode : Pour trouver une solution particulière de $y'+a(x)y = \delta(x)$, on peut chercher sous la forme $x \mapsto C(x)h(x)$ où h est solution de l'équation homogène.

Lorsqu'on a le choix, il est conseillé de préférer les autres méthodes, qui donnent souvent des calculs moins lourds.

Exemple - Exercice 7 : Résoudre $(1+x^2)y'-y = (1+x^2)\exp(-\arctan(1/x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 Autres exercices pour s'entraîner

Exercice 8 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) - 2\int_0^x \exp(x-t)f(t)dt.$$

Exercice 9 : Résoudre les EDL suivantes :
1) $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1,1]$.
2) $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3) $y'' + 2y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4) $y'' - 3y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5) $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6) $y'' + y = 2\cos(x)^2$ sur $\mathbb{R}$.
7) $(1+\exp(x))y' + \exp(x)y = (1+\exp(x))$ sur $\mathbb{R}$.
8) $\sin(x)^3 y' = 2\cos(x)y$ sur $]0,\pi[$.