Séance de soutien PCSI2 numéro 7 : Calcul matriciel

Tatiana Labopin-Richard

21 janvier 2015

Lors de cette séance, nous allons revoir comment on peut calculer avec des matrices. Dans toute la suite on notera A et B des matrices dont les coefficients seront $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

1 Somme et produit

On peut sommer deux matrices de même taille en sommant les coefficients :

$$(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},\ \forall (i,j)$$

Pour multiplier deux matrices, elles doivent avoir des tailles compatibles (par exemple $p \times n$ et $n \times q$), c'est à dire que A doit avoir le même nombre de colonnes que B a de lignes. Dans ce cas (le produit sera de taille $p \times q$) :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Quelques remarques utiles : On notant $L_i(C)$ la ième colonne de la matrice C et $C_j(C)$ sa jème colonne, on a : toute relation de liaison sur les lignes de A (resp. sur les colonnes de B) induit la même relation de liaison sur les lignes (resp. les colonnes) de AB. En particulier :

1)
- Si $L_i(A) = 0$, alors $L_i(AB) = 0$.
- Si $C_i(B) = 0$ alors $C_i(AB) = 0$.
- Si $L_i(A) = L_j(A)$ alors $L_i(AB) = L_j(AB)$.
- Si $C_i(B) = C_j(B)$ alors $C_i(AB) = C_j(AB)$.

2) Si $L_i(A) = (\lambda_1, \dots \lambda_p)$ alors $L_i(AB) = \lambda_1 L_1(B) + \dots \lambda_p L_p(B)$.

3) Si $C_i(B) = (\mu_1, \dots \mu_p)^T$ alors $C_i - AB) = \mu_1 C_1(A) + \dots + \mu_n C_p(A)$.

4) Les lignes (resp. les colonnes) de AB sont des combinaisons linéaires de celles de B (resp. de A).

Exercice 1 : Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(A)$ la somme des termes de A. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots. & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $JAJ = \sigma(A)J$.

Exercice 2 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$ et $b + c \leq a + d$.

Pour tout $n \geq 2$, note : $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$b_n + c_n = a_n + d_n.$$

Exercice 3 : Que peut-on dire d'une matrice qui vérifie $Tr(AA^T) = 0$?

Deux méthodes auxquelles il faut penser quand on veut calculer la puissance nième d'une matrice

1) Trouver une formule de récurrence. (Voir exercice 3bis)
2) Utiliser le binôme de Newton (voir exercice 4)

Exercice 3bis : Calculer les puissances nième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2 L'anneaux $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif et possèdes des diviseurs de 0 (pour $n \geq 2$)

Attention, $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ n'est **PAS COMMUTATIF**. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mise en garde 1 : Du coup, pour appliquer le binôme de Newton (**méthode à retenir pour calculer des puissances**), on doit d'abord vérifier que les matrices commutent !

Exercice 4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la puissance nième de A pour tout n.

Mise en garde 2 : Il ne faut pas faire de simplifications trop rapides !

Exercice 5 : Soient A et B deux matrices de tailles n vérifiant $AB - BA = A$. Montrer que pout tout entier naturel non nul k,

$$A^{k+1}B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}.$$

Mise en garde 3 : Il y a des diviseurs de 0 dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

Il faut donc faire attention aux simplications trop rapides :

$$AC = BC \text{ et } C \neq 0 \not\Rightarrow A = B.$$

Exercice 6 : Soit $M \in \mathbb{G}L_n\mathbb{K}$. Montrer l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = 0$ et Q n'admet pas 0 pour racine (on admettra l'existence de $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(M) = 0$).

3 Quelques applications qui se comportent bien avec le produit matriciel :

Application	Formule	Condition de validité
Inverse	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	A et B sont inversibles carrées de taille n
Transposition	$(AB)^T = B^T A^T$	Les tailles sont compatibles.
Trace	$Tr(AB) = Tr(BA)$	Les matrices sont carrés de taille n

Exercice 7 : Soit A symétrique inversible de taille n. Montrer que l'inverse de A est symétrique.

Exercice 8 : Démontrer le dernière ligne du tableau. Trouver un contre-exemple lorsqu'on regarde le produit de trois matrices.

Exercice 9 : Soit T une matrice triangulaire supérieure de taille n. Montrer que T commute avec sa transposée, ei et seuelment si elle est diagonale.

Exercice 10 : Existe-il des matrices A et B telles que $AB - BA = I_n$?

Exercice 11 : Soient $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = A$. Calculer $Tr(A^p)$ pour tout entier non nul p.

3.1 Les matrices élémentaires

On appelle matrice élémentaire d'indice (k, l) de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (où $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq p$), la matrice notée $E_{k,l}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne k et de la colonne l.

Remarque : Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice élémentaire $E_{k,l}$ est $\delta_{i,k}\delta_{j,l}$ où δ désigne de symbole de kronecker.

Théorème : La famille regroupant toutes les matrices élémentaires de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en forme une base. On l'appelle la base canonique.

Remarque : Ces matrices sont donc très utiles pour faire des raisonnements analyse-synthèse lorsqu'on est face à des exercices du genre : trouver les matrices telles que pour toute matrice M, on a .... (voir exercices suivants).

Exercice 12 : Calculer le produit de deux matrices élémentaires.

Exercice 13 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\forall B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n.$$

Exercice 14 : Quelles sont les matrices carrées qui commutent avec toutes les matrices carrées ?

Exercice 15 : Soit $n \geq 2$.
a) Montrer que $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \forall M \in GL_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\} = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
b) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ A = MN \Rightarrow A = NM.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Exercice 16 : Soit A et B deux matrices carrées de taille n telles que pour toute matrice carrée de taille n, $Tr(AX) = Tr(BX)$. Montrer que $A = B$.

4 Inverser une matrice

4.1 Le pivot de Gauss

La première chose que l'on apprend pour calculer l'inverse d'une matrice, c'est d'appliquer le **pivot de Gauss**. L'idée de cette méthode est la suivante : en opérant uniquement sur les lignes (ou uniquement sur les colonnes), on peut transformer la matrice à inverser en une matrice triangulaire supérieure puis en l'identité. En faisant les mêmes opérations sur la matrice identité, on tombe sur la matrice inverse que nous cherchions.

Pourquoi Ãğa marche ? La première chose à comprendre, c'est que les opérations élémentaires que nous faisons sur les lignes (permuter deux lignes, multiplier une ligne par un scalaire ou donner à une ligne une combinaison linéaire d'elle-même et d'une autre ligne) sont équivalente à multiplier notre matrice initiale par des matrices bien particulières à gauche (à droite si on a choisi les colonnes). Par exemple :

- Echanger la ligne 1 et la ligne 2 d'une matrice A de taille 3, c'est multiplier à gauche notre matrice par la matrice de permutation $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Multiplier la ligne 3 par 5, c'est multiplier par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
- Donner à la ligne 3 elle même plus 5 fois la ligne 2, c'est multiplier par $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Essayez sur des matrices pour vous en persuader et comprendre comment Ãğa marche.

Le pivot de Gauss est alors naturel à comprendre. En faisant toutes les opérations nous n'écrivons en fait rien d'autre que :

$$AD_1T_1T_2 \dots D_6T_9 = I_n$$

et il apparaÃőt alors clairement que $A^1 = D_1T_1T_2 \dots D_6T_9$, ce que nous calculons en faisant les mêmes opérations à partir de la matrice I_n !

Exercice 17 : Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.2 Mais il y a d'autres méthodes

Comme ne venons de le voir, dès que la matrice considérée est inversible, le pivot de gauss permet de trouver son inverse ; mais les calculs peuvent être longs et difficiles. Il est donc conseillé de regarder un peu la matrice à inverser avant de se lancer dans les calculs. Voici quelques techniques qui peuvent marcher dans des cas particuliers, sans faire trop de calculs.

Méthode : pour inverser une matrice on peut aussi :
1) Passer par un système qui est plus simple à résoudre (voir exercice 18).
2) Trouver un polynôme annulateur (voir exercice 19).

Exercice 18 : Justifier l'existence et calculer l'inverse de la matrice A triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale et des -1 au dessus.

Exercice 19 : Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$