Séance de soutien PCSI2 numéro 8 : Fonctions réelles : limites et continuité - Correction des exercices

Tatiana Labopin-Richard

28 janvier 2015

1 Problèmes de limites

Exercice 1 : Trouver les limites suivantes en identifiant une des méthodes précédentes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) + \frac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} x^2\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

e) $\lim\limits_{x \to 0} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x - \sin(x))$.

g) $\lim\limits_{x \to +0} x\sin(x)$.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(\exp(x))}{x}$.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\cos(\exp(x))}{x^2+1}$.

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$.

k) $\lim\limits_{x \to O^+} x^x$.

l) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$.

m) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

n) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$.

o) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction :

a) $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme la limite vaut $+\infty$.
b) $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$ et notre limite vaut donc 1.
c) $\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$ donc $1 - x \leq x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que la limite est 1.
d) En 0^+, on a $|x^2\lfloor \frac{1}{x} \rfloor| \leq \frac{x^2}{x}$ via $0 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$ et donc la limite vaut 0. En O^-, on a $|x^2\lfloor \frac{1}{x} \rfloor| \leq x^2(1 - \frac{1}{x})$ via $\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 0$. La limite est donc aussi 0.
e) $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \geq \frac{1}{x} - 1$ qui tend donc vers $+\infty$.
f) $\exp(x - \sin(x)) \geq \exp(x - 1)$ donc la limite est ecnore $+\infty$.
g) La fonction $f : x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ est le produit de l'indentité de limite nulle en 0 et de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ bornée. Donc la limite de notre produit vaut 0.
h) La fonction sin est bornée et la fonction inverse tend vers 0, la limite est donc encore une fois nulle.
i) $\left|\frac{x\cos(\exp(x))}{x^2+1}\right| \leq \frac{x}{x^2+1}$ qui tend vers 0.
j) $\frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\ln(x)}{x}+1}$ qui tend vers 1.
k) $x^x = \exp(x\ln(x)) = \exp(X)$ avec $X = x\ln(x)$ qui tend vers 0. Donc la limite vaut 1.
l) $\ln(x)\ln(\ln(x)) = X\ln(X)$ avec $X = \ln(x)$ qui tend vers 0. Donc la limite vaut 0.
m) $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x}\ln(1 + x)) = \exp(X)$ avec $X = \frac{\ln(1+x)}{x}$ qui tend vers 1. Donc la limite vaut e.
n) C'est la dérivée de la fonction exp en 0, c'est à dire 1.
o) C'est la dérivée de la fonction $\ln(1 + x)$ en 0, c'est à dire 1.

Exercice 2 : Etudier les problèmes suivants en utilisant une des méthodes précédentes :
a) Montrer que si $f = g + h$ avec g qui admet une limite en 0 mais pas h, alors f n'admet pas de limite en 0.
b) Montrer que $h_1 : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2$ et $h_2 : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2$ n'admettent pas de limite en 0.
c) Montrer que $f : x \mapsto x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2$ n'admet pas de limite en 0.
d) $h_1 + h_2$ admet-elle une limite en 0 ?
e) Montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

Correction :
a) Par l'absurder, $h = f - g$ devrait avoir une limite.
b) Pour tout entier naturel non nul, $h_1(\frac{1}{2n\pi}) = 0$ et $h_1(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}) = 1$. Or les deux suites $(\frac{1}{2n\pi})$ et $(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}})$ tendent vers 0. Comme $h_2 = 1 - h_1$ on conclut avec la question précédente.
c) $f = id + h_1$. id admet une limite en 0 contrairement à h_1 donc f n'admet

pas de limite en 0.

d) $h_1 + h_2 = 1$ donc la limite vaut 1.

e) Les deux suite $(2n\pi)$ et $(2n\pi + \frac{pi}{2})$ permettent de conclure.

Exercice 3 : Ajuster a pour la fonction suivante soit continue :

$$f\colon x \longmapsto \begin{cases} a\exp(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction :$f(0) = a$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ il faut donc prendre $a = 1$.

Exercice 4 : Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de f pour $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Correction : Par opérations, f est continue sur chaque $I_k =]k, k+1[$ avec k entier relatif. Il reste donc à étudier la continuer en $a \in \mathbb{Z}$. Pour $x \to a^+$, $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \to a = f(a)$ car $\lfloor a \rfloor \to a$ lorsque a est entier. Lorsque a tend vers a^-, $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \to a - 1 + 1 = a = f(a)$ car $\lfloor x \rfloor \to a - 1$. Par continuité à droite et à gauche, f est continue en a et donc sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a \notin \mathbb{Z}$, au voisinage de a, $f(x) = \lfloor a \rfloor + (x - \lfloor a \rfloor)^2$ et donc f est continue en a. Lorsque $a \in \mathbb{Z}$, on a si $x \to a^+$, $f(x) \to a = f(a)$ et si $x \to a^-$, $f(x) = a - 1 + (a - (a-1))^2 = a = f(a)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f\colon x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est totalement discontinue.

Correction : Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (u_n) de nombres rationnels et une suite (v_n) de nombres irrationnels tels que $u_n \to a$ et $v_n \to a$. On a alors $f(u_n) = 1 \to 1$ et $f(v_n) = 0 \to 0$. Ainsi, f est discontinue en a.

Exercice 6 : Etudier la continuité de f définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.

Correction : La suite (u_n) avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$ converge vers 0 donc la borne supérieure existe dans $\mathbb{R}$. De plus, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$.

Pour $n \geq \lfloor x \rfloor$, $n + 1 \geq x$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. Pour $n < \lfloor x \rfloor$, $n + 1 \leq x$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$. Par suite,

$$f(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}$$

et f est clairement continue sur tout $a \in \mathbb{R}^+$ privé de $\mathbb{N}$ et continue à droite sur $\mathbb{N}$. Il nous reste donc à étudier la continuité à gauche sur les entiers. Lorsque $x \to a^-$, on a

$$f(x) = \frac{x^{a-1}}{(a-1)!} \to \frac{a^{a-1}}{(a-1)!} = \frac{a^a}{a!} = f(a).$$

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 7 : Montrer qu'un polynôme unitaire de degré 3 possède au moins une racine réelle.

Correction :$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. f est continue car polynômiale. Nous avons de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$ donc la fonction prend une valeur négative et une valeur positive. Donc elle s'annule.

Exercice 8 : Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(a) \leq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Correction : On introduit la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - g(x)$. ϕ est continue par somme de deux fonctions continues. De plus, on a $\phi(a) \leq 0$ et $\phi(b) \geq 0$ donc ϕ s'annule en un point x qui vérifie $f(x) = g(x)$.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$ montrer que f s'annule.

Correction : Comme $\lim\limits_{-\infty} f = -1$, f prend des valeurs stirctement négatives. Comme $\lim\limits_{+\infty} f = 1$, f prend des valeurs strictement potitives. Donc f s'annule.

Exercice 10 : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Correction : Posons $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = f(x) - x$. Un point fixe de f est une valeur d'annulation de ϕ. Comme ϕ est continue et vérifie $\phi(0) = f(0) \geq 0$ et $\phi(1) = f(1) - 1 \leq 0$, le TVI s'applique et nous avons l'existence d'un point fixe.

Exercice 11 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

a) Montrer que si $f([a,b]) \subset [a,b]$ alors f admet un point fixe.
b) Montrer que si $[a,b] \subset f([a,b])$ alors f admet un point fixe.

Correction : Comme précédemment, on pose $\phi(x) = f(x) - x$, ϕ est continue, notre objectif et de montrer qu'elle s'annule. Pour le premier cas, $f(a) \in [a,b]$ et donc $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ et $\phi(b) \leq 0$ donc on applique le TVI (c'est exactement la même chose que l'exercice précédent. Dans le deuxième cas, si $[a,b] \subset f([a,b])$ alors il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = a$. $\phi(\alpha) = a - \alpha \leq 0$. En introduisant de même β tel que $f(\beta) = b$, on peut conclure parce que $\phi(\beta) \geq 0$.

Exercice 12 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction : Unicité : Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. g est strictement décroissante et injective donc ne peut s'annule qu'au plus une fois.

Existence : Par l'absurde, puisque g est continue, si elle ne s'annule pas, alors elle est strictement positive ou strictement négative. Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$ alors $f(x) > x$ et donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ceci est absurde car $\lim\limits_{+\infty} f = \inf\limits_{\mathbb{R}} f$ (puisque f est décroissante). On raisonne de même si $g(x)$ est négative.

Exercice 13 : Montrer que les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Correction : Par l'absurde, si f n'est pas constante, alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Soit y non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le TVI implique qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc f n'est pas à valeurs entières.

2.2 Image d'un segment

Exercice 14 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) > 0.$$

Montrer que $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) > 0$.

Correction :f est continue sur $[a,b]$, elle admet donc un minimum en un certain $c \in [a,b]$:

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = f(c) > 0.$$

Exercice 15 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que f converge en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Correction : Puisque f converge en $+\infty$, f est bornée au voisinage de $+\infty$: $\exists M \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall x \in [A; +\infty[, \text{ et } |f(x)| \leq M.$$

De surcroît, f est bronée par un certain M' sur $[0, A]$ car continue sur un segment. Donc f est bornée par $\max(M, M')$ sur $\mathbb{R}^+$.

Faire un dessin pour bien comprendre ce qu'il se passe dans cet exercice.

Exercice 16 : Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Correction : Soit $T > 0$ une période de f. Sur $[0, T]$, f est bornée par un certain M car f est continuesur ce segment. $\forall x \in \mathbb{R},\ x - nT \in [0, T]$ pour $n = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$ donc

$$|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M.$$

Donc f est bornée par M sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ont des composées bornées.

Correction : Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $|f(x)| \leq M$. On a alors pour tout réel x, $|f(g(x))| \leq M$ donc $f \circ g$ est bornée.

Puisque g est continue sur le segment $[-M, M]$ elle y est bornée par un certain M'. Ainsi, pour tout réel x, $|g(f(x))| \leq M'$ car $f(x) \in [-M, M]$ donc $g \circ f$ est bornée.

Exercice 18 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f = \lim_{x \to -\infty} f = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Pour $M = f(0) + 1$.

Puisque $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \leq A,\ f(x) \leq M\ \forall x \geq B,\ f(x) \geq M.$$

on a $A \leq 0 \leq B$ car $f(0) < M$. Sur $[A, B]$, f admet un minimum en un point $a \in [A, B]$, f admet un minimum en un point $a \in [A, B]$ car continue sur un segment.

On a $f(a) \leq f(0)$ car $0 \in [A, B]$ donc $f(a) \leq M$. Puis $\forall x \in [A, B],\ f(x) \geq f(a)$ et $\forall x \in]-\infty; A[\cup [B; +\infty[,\ f(x) \geq M \geq f(a)$.

Donc f admet un minimum absolu en a.

Encore une fois, il est conseillé de faire un dessin pour bien comprendre ce que l'on fait ici : on se restreind sur un segment pour avoir un minimum puis on gére les soucis aux bords.

Exercice 19 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que chaque $y \in \mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f. Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ possédant exactement un antécédent.

Correction : Soit y une valeur prise par f. Si celle-ci n'a qu'un antécédent, c'est terminé. Sinon, soit $a < b$ les deux seuls antécédents de y. f est continue sur $[a, b]$ donc y admet un minimum en x et un maximum en d, l'un au moins n'étant pas une extrémité de $[a, b]$. Supposons que ce soit c.

Si $f(c)$ possède c' comme autre antécédent alors :

Si $c' \in [a', b']$ alors f ne peut être constante entre c et c' et une valeur strictement comprise entre $f(c) = f(c')$ et $\max\limits_{[c,c']} f$ possède au moins 3 antécédents. C'est impossible.

Si $c' \neq [a, b]$ alors une valeur sctrictement intermédiaire à y et $f(c)$ possède au moins 3 antécédents. c'est impossible.

Ainsi, il n'y a pas de c' autre antécédent de $f(c)$.

Exercice 20 : Appliquer ce théorème à $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + \ln(x)$.

Correction :f est continue et strictement croissante ($f(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$). Ses limites en 0^+ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. le téhorème de la bijection monotone permet donc d'affirmer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $]\lim\limits_{0} f; \lim\limits_{+\infty} f[= \mathbb{R}$. De plus, son application réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante et de limite 0^+ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

a) Montrer que f réalise une bjiection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.

b) Déterminer f^{-1}.

Correction :a) Sur $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$. Donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[0; 1[$.

Sur $]-\infty; 0[$, $f(x) = -1 + \frac{1}{1-x}$ continue et strictement croissante. $\lim\limits_{0} f = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} = 1$. Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1; 0[$. Nous avons donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.

b) Pour $y \in]0, 1[$, $x = f^{-1}(y) \in [0, +\infty[$ et $y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$. Pour $y \in]-1, 0[$, $x = f^{-1}(y) \in [-\infty, 0[$ et $y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$. Finalement, nous avons

$$\forall y \in]-1;1[,\ f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Exercice 22 : Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continue vérifiant $f \circ f = id$. Déterminer f.

Correction :f est bijective et continue, strictement monotone. Elle ne eput pas être décroissante car alors elle ne serait pas surjective sur $[0,+\infty[$, elle est docn strictement croissante.

Si $\exists x \in [0,1]$, tel que $f(x) < x$, alors par stricte croissance, $f(f(x)) < f(x)$ et donc $f(f(x)) < x$ ce qui contredit $f \circ f = id$. De même, $f(x) > x$ est impossible. Donc $f = id$.