Séance de soutien PCSI2 numéro 7 : Calcul matriciel - Correction des exercices

Tatiana Labopin-Richard

21 janvier 2015

1 Somme et produit

Exercice 1 : Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(A)$ la somme des termes de A. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots. & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $JAJ = \sigma(A)J$.

Correction :$\sigma(A) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}$. Par produit, nous avons $B = AJ$ a pour terme général $b_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l}$ et donc $C = JAJ$ a pour terme général $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = \sigma(A)$.

Exercice 2 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$ et $b + c \leq a + d$.

Pour tout $n \geq 2$, note : $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$b_n + c_n = a_n + d_n.$$

Correction : Pour tout $n \geq 1$, en exploitant $M^{n+1} + M \times M^n$, on a

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= aa_n + bc_n \\
b_{n+1} &= ab_n + bd_n \\
c_{n+1} &= ca_n + dc_n \\
d_{n+1} &= cb_n + dd_n
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$a_{n+1} + d_{n+1} - (b_{n+1} + c_{n+1}) = (a-c)(a_n - b_n) + (b-d)(c_n - d_n).$$

Sachant que $a \geq c$ et $b \geq d$, il suffit d'établir que $a_n \geq b_n$ et $c_n \geq d_n$ pour conclure.

Pour $n = 1$ la proposition est vérifiée. Pour $n \geq 2$, exploitons $M^n = M^{n-1}M$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}a + b_{n-1}c \\
b_n &= a_{n-1}b + b_{n-1}d \\
c_n &= c_{n-1}a + d_{n-1}c \\
d_n &= c_{n-1}b + d_{n-1}d
\end{aligned}
$$

On a alors

$$a_n - b_n = a_{n-1}(a-b) + b_{n-1}(c-d)$$

et

$$c_n - b_n = c_{n-1}(a-b) + d_{n-1}(c-d)$$

On montre par récurrence que a_n, b_n, c_n et d_n sont positifs, ce qui merpet de conclure puisque $a - b \geq 0$ et $c - d \geq 0$.

Exercice 3 : Que peut-on dire d'une matrice qui vérifie $Tr(AA^T) = 0$?

Correction : Notons $B = A^T$. Par définition, on a donc $b_{i,j} = a_{j,i}$. Notons $C = AB$. Nous avons alors

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k}$$

et donc $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2$.

Ainsi,

$$Tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2.$$

C'est donc la somme des carrées de tous les coefficients de A. Ainsi, si cette somme est nulle, cela signifie que chacun des termes est nul et donc que la matrice A est nulle.

Exercice 3bis : Calculer les puissances nième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Correction :1) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ avec $a_{n+1} = 1 + 2a_n$ ce qui implique que $a_n = 2^n - 1$.

2) Par récurrence, on montre que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

3) Par récurrence, on montre que $A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

2 L'anneaux $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif et possèdes des diviseurs de 0 (pour $n \geq 2$)

Exercice 4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la puissance nième de A pour tout n.

Correction : Nous avons $A = I_3 + N$ avec $N = A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est niloptente d'indice 3 et elle commute avec la matrice I_3. On peut donc appliquer la binôme de Newton qui nous donne :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n+2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Soient A et B deux matrices de tailles n vérifiant $AB - BA = A$. Montrer que pout tout entier naturel non nul k,

$$A^{k+1}B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}.$$

Correction : Montrons le résultat par récurrence.

Initialisation : Lorsque $k = 1$, nous avons $AB - BA = A$ par hypothèse.
Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang k. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A(A^kB - BA^k) + ABA^k - BA^{k+1} \\ &= AkA^k + (AB - BA)A^k \\ &= kA^{k+1} + A^{k+1} \\ &= (k+1)A^{k+1} \end{aligned}$$

On retiendra la technique classique qui consiste, à la première ligne des équations à faire apparaître les termes dont on a besoin, puis à compenser en les enlevant tout de suite après.

Exercice 6 : Soit $M \in \mathbb{G}L_n\mathbb{K}$. Montrer l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = 0$ et Q n'admet pas 0 pour racine (on admettra l'existence de $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(M) = 0$).

Correction : Soit P, on écrit $P = X^rQ$ avec r entier naturel et Q n'admettant pas 0 pour racine. On a alors

$$M^rQ(M) = P(M) = 0.$$

En simplifiant par la matrice inversible M^r, on obtient $Q(M) = 0$.

Exercice 7 : Soit A symétrique inversible de taille n. Montrer que l'inverse de A est symétrique.

Correction : Nous avons par hypothèses $A^T = A$ et $AA^{-1} = I_n$. Ainsi

$$\begin{gathered} (AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n \\ (A^{-1})^TA^T = A^T(A^{-1})^T = I_n \\ (A^{-1})^TA = A(A^{-1})^T = I_n \end{gathered}$$

Donc $(A^{-1})^T = A^{-1}$ par unicité de l'inverse de A.

Exercice 8 : Démontrer le dernière ligne du tableau. Trouver un contre-exemple lorsqu'on regarde le produit de trois matrices.

Correction :

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\right) = Tr(BA).$$

Par ailleurs, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient $Tr(ABC) = 10$ et $Tr(CBA) = 14$.

Exercice 9 : Soit T une matrice triangulaire supérieure de taille n. Montrer que T commute avec sa transposée, ei et seulement si elle est diagonale.

Correction : Par récurrance sur $n \geq 1$.
Initialisation : $n = 1$ immédiat.
Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. Soit $T \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée. Nous avons

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & X^T \\ 0_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec α un scalaire, δ triangulaire supérieure, $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, $T^T T = TT^T$ implique d'une part, en identifiant les coefficients $(1,1)$ que $\alpha^2 = \alpha^2 + X^T X$. Donc $X = 0$. Et d'autre part, $S^T S = SS^T$. Par hypothèse de récurrence, nous en déduisons alors que S est diagonale. Donc T est diagonale.

Exercice 10 : Existe-il des matrices A et B telles que $AB - BA = I_n$?

Correction : Non, car $Tr(AB) = Tr(BA)$ implique $Tr(AB - BA) = 0 \neq Tr(I_n)$.

Exercice 11 : Soient $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = A$. Calculer $Tr(A^p)$ pour tout entier non nul p.

Correction :

$$\begin{aligned} Tr(A) &= Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0 \\ Tr(A^p) &= Tr(A^{p-1}(AB - BA)) \\ &= Tr(A^p B) - Tr(AP^{-1}BA) \end{aligned}$$

Or

$$Tr(A^{p-1}BA) = Tr((A^{p-1}B)A) = Tr(A(A^{p-1}B)) = Tr(A^p B)$$

et donc $Tr(A^p = 0)$.

Exercice 12 : Calculer le produit de deux matrices élémentaires.

Correction : Nous avons $E_{i,j} = (\delta_{p,i}\delta_{q,j})_{1 \leq p,q \leq n}$ et $E_{k,l} = (\delta_{p,k}\delta_{q,l})_{1 \leq p,q \leq n}$. Si $A = E_{i,j}E_{k,l} = (a_{p,q})_{p,q}$ alors

$$a_{p,q} = \sum r = 1^n (\delta_{p,i}\delta_{r,j})(\delta_{r,k}\delta_{q,l}) = \delta_{j,k}\delta_{p,i}\delta_{q,l},$$

et donc :

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

Exercice 13 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\forall B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n.$$

Correction : Si A est solution, alors $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ donc $a_{i,i} = a_{j,j}$ pour tout (i,j) et $a_{i,k} = 0$ pour tout $k \neq i$. Donc $A = \lambda I_n$. Réciproque immédiate.

Exercice 14 : Quelles sont les matrices carrées qui commutent avec toutes les matrices carrées ?

Correction : Soit M vérifiant. Alors pour $i \neq j$, $E_{i,j}M = ME_{i,j}$. l'égalité en indice (i,i) donne $m_{j,i} = 0$ et l'égalité en indice (i,j) donne $m_{j,j} = m_{i,i}$. Donc $M = \lambda I_n$.

Exercice 15 : Soit $n \geq 2$.
a) Montrer que $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \forall M \in GL_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\} = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
b) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ A = MN \Rightarrow A = NM.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Correction :
a) Soit A commutant avec toutes les matrices inversibles. Soit $i \neq j$. Pour $M = I_n + E_{i,j}$, $AM = MA$ donne $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. On retombe sur l'exercice précédent.
b) Soit B une matrice inversible. Nous avons $A = (AB^{-1})B$ ce qui implique que $A = B(AB^{-1})$ et donc que $AB = BA$. Ainsi, A commute avec toutes les matrices inversibles et on retourne à la question 1.

Exercice 16 : Soit A et B deux matrices carrées de taille n telles que pour toute matrice carrée de taille n, $Tr(AX) = Tr(BX)$. Montrer que $A = B$.

Correction : Nous avons $AE_{i,j}$ qui est la matrice avec des 0 partout sauf sur la colonne j, où peut lire la ième colonne de A. Donc, $Tr(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. Ainsi, nous avons $a_{j,i} = b_{j,i}$ pour tout (i,j) donc $A = B$.

3 Inverser une matrice

3.1 Le pivot de Gauss

Exercice 17 : Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Correction : Par le pivot de Gauss, on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 Mais il y a d'autres méthodes

Exercice 18 : Justifier l'existence et calculer l'inverse de la matrice A triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale et des -1 au dessus.

Correction :dans ce cas, il est plus facile d'écrire le système :

$$\begin{cases} x_1 - (x_2 + \cdots + x_n) = & y_1 \\ \ldots = & \ldots \\ x_{n-1} - x_n = & y_{n-1} \\ x_n = & y_n \end{cases} \tag{1}$$

ce qui se résoud en

$$\begin{cases} x_n = & y_n \\ x_{n-1} = & y_{n-1} + y_n \\ x_{n-2} = & y_{n-2} + y_{n-1} + 2y_n \\ \ldots = & \ldots \\ x_1 = & y_1 + y_2 + 2y_3 + \cdots + 2^{n-2} y_n \end{cases} \tag{2}$$

et donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \ldots & 2^{n-2} \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19 : Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Correction : Nous avons $(A+I)^3 = 0_3$. Donc $A^3+3A^2+3A+I=0$. Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -(A^2+3A+I)$.