Séance de soutien PCSI2 numéro 4 : Résolution des EDL1 et EDL2 - Corrections

Tatiana Labopin-Richard

19 novembre 2014

Exemple - Exercice 1 : Déterminer la solution générale de l'équation

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Correction : On a $a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ donc $A(x) = \ln(1+x^2)$ d'où $\exp(-A(x)) = \frac{1}{1+x^2}$ et

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{C}{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple-Exercice 2 : Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Correction : L'équation caractéristique est $z^2 - 4z + 4 = 0$. La solution double est $z_0 = 2$, les solutions sont donc

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)\exp(2x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exemple - Exercice 3 : Résoudre l'équation $y' + y = \exp(x) + \cos(x)$.

Correction : Les solutions de l'équation homogène sont $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{\lambda \exp(-x), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Pour la solution particulière on utilise le principe de superposition. Le terme en exponentielle se traite avec le second membre polynômiale-exponentielle et donne une colustion particulière en $s_1(x) = \frac{1}{2}\exp(x)$ et celui en cos donne $s_2(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$ grâce à la méthode du second membre circulaire. Finalement nous obtenons

$$\mathcal{S} = \{\lambda \exp(-x) + \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Attention - Exercice 4 : Attention toute fois de bien vérifier le cadre pour ne pas écrire de bétises !

1) Trouver une solution particulière de
$$y'' + y' + y = \exp(ix).$$
En déduire des solutions particulières de $y'' + y' + y = \cos(x)$ et $y'' + y' + y = \sin(x)$.

2) Vérifier que $\phi : x \mapsto \exp(ix)$ est une solution particulière de
$$y'' - iy' + y = \exp(ix).$$
La fonction $Re(\phi)$ est-elle solution de
$$y'' - iy' + y = \cos(x)?$$
Pourquoi ?

Correction :

1) On vérifie que $x \mapsto -i\exp(ix)$ est solution. Commes les coefficients de l'équation sont réels, les solutions particulières demandées sont les parties réelle et imaginaire de la précédente solution, à savoir $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto -\cos(x)$.
2) On vérifie que ça ne marche pas. Cela est dû au fait que les coeff de l'équation ne sont pas réels.

Exemple - Exercice 5 : Trouver une solution particulière de $y'' - 4y' + y = (x^2 + x)\exp(2x) + x\exp(x)$.

Correction :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda_1 \exp(2x) + \lambda_2 x \exp(2x) + \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6}\right)\exp(2x) + (x+2)\exp(x), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exemple - Exercice 7 : Résoudre $(1+x^2)y' - y = (1+x^2)\exp(-\arctan(1/x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto (\lambda + x\exp(-\frac{\pi}{2}))\exp(\arctan(x)), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 8 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) - 2\int_0^x \exp(x-t)f(t)dt.$$

Correction : On raisonne par analyse synthèse. L'analyse nous donne : $f(0) = 0$, f dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_0^x \exp(-t)f(t)dt = \frac{1}{2}\exp(-x)(\sin(x) - f(x)).$$

Si on dérive par rapport à x, on trouver que f doit vérifier l'équation

$$y' + y = -\sin(x) + \cos(x).$$

On trouve alors, en résolvant et avec la condition initiale que

$$f(x) = \cos(x) - \exp(-x).$$

La partie synthèse sert à vérifier que ce f est bien solution.

Exercice 9 : Résoudre les EDL suivantes :

1) $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1,1]$. Solution : $y(x) = 1 + C\exp(\arccos(x))$ ou $y(x) = 1 + C'\exp(-\arcsin(x))$.
2) $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Solution : $y(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.
3) $y'' + 2y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Solution : $y(x) = (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))\exp(-x)$.
4) $y'' - 3y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Solution : $y(x) = \lambda\exp(x) + \mu\exp(2x)$.
5) $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$. Solution : $y(x) = \frac{-2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))$
6) $y'' + y = 2\cos(x)^2$ sur $\mathbb{R}$. Solution : $1 - \frac{1}{3}\cos(2x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$. (penser au principe de superposition et à $2\cos(x)^2 = \cos(2x) + 1$.
7) $(1+\exp(x))y' + \exp(x)y = (1+\exp(x))$ sur $\mathbb{R}$. Solution : $y(x) = \frac{C+x+\exp(x)}{1+\exp(x)}$
8) $\sin(x)^3y' = 2\cos(x)y$ sur $]0,\pi[$. Solution : $y(x) = C\exp(-\frac{1}{\sin(x)^2})$.