Séance de soutien PCSI2 numéro 9 : Dérivabilité - Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et inégalité de Taylor Young

Tatiana Labopin-Richard

Mercredi 25 février 2014

Nous allons étudier trois théorèmes fondamentaux du programme concernant la dérivabilité et voir comment et quand les appliquer sur des exemples classiques.

1 Le théorème de Rolle

Theorem 1.1 *Soit une fonction* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose que*

H1) f *est continue sur le segment* $[a, b]$.

H2) f *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$.

H3) $f(a) = f(b)$

Alors il existe un réel c *dans* $]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

On peut penser à ce théorème lorsqu' ...

1) on a les hypothèses exactes dans l'énoncé (ces hypothèses peuvent même souvent indiquer si on doit appliquer le théorème plusieurs fois successivement) !
2) on cherche à montrer que des fonctions dérivées ont des zéros.
3) on cherche à montrer qu'une fonction ne prend pas la même valeur en deux points différents (c'est juste la contraposée du théorème).
4) on cherche à démontrer une égalité faisant intervenir la fonction f en des valeurs précises. C'est le cas le plus difficile d'application mais surtout le plus joli ! Il faut alors construire sa propre fonction, qui, lorsqu'on la dérivera en un point particulier et qu'on l'égalisera à 0, nous donnera l'égalité voulue.

Exercices d'applications :

Exercice 0 : Proposer une illustration graphique de ce théorème.

Exercice 1 : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, n fois dérivable. Montrer que si f s'annule $(n+1)$ fois alors sa dérivée n-ième s'annule au moins une fois.

Exercice 2 : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Soient a, b et c trois points distincts de I. Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d).$$

Exercice 3 : Soit $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que la limite de f en l'infini soit nulle. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4 : Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(a) = f'(a), \; f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = f''(c).$$

Exercice 5 : Règle de l'Hôpital Soient f et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \; g'(x) \neq 0.$$

1) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2 Le théorème des accroissements finis

Theorem 2.1 *Soit une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que :*
H1) f est continue sur le segment $[a, b]$.
H2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

Remarque géométrique : L'égalité $f'(c) = (f(b) - f(a))(b - a)$ signifie que la tangente en c à f est parallèle à la droite joignant les points d'abscisses a et b de f (faire un dessin !).

Un corollaire classique de ce théorème est l'inégalité suivante, appelée inégalité des accroissements finis.

Theorem 2.2 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et M un réel. On suppose que*
H1) f est continue sur le segment $[a, b]$.

H2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.
H3) $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$.
Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Remarque : Cela implique directement qu'une fonction à dérivée bornée est lipschitzienne. Et donc, par le théoréme de Heine, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle est lipschitzienne.

On peut penser à ces théorèmes lorsqu' ...

1) on a les hypothèses exactes dans l'énoncé !
2) on doit calculer une limite que l'on peut mettre sous la forme $f(a_n) - f(b_n)$ (c'est souvent à nous de trouver f, a_n et b_n).
3) on doit montrer une égalité dont le terme de gauche peut se mettre sous la forme $f(a) - f(b)$ (il faut aussi trouver f, a et b).
4) on est, en général, face à un problème faisant intervenir un certain taux $f(x + h) - f(x)$.

Exercices d'applications :

Exercice 6 : Déterminer la limite, lorsque x tend vers l'infini de

$$(x + 1) \exp\left(\frac{1}{x + 1}\right) - x \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 7 : Montrer que lorsque n tend vers l'infini

$$\sqrt[n+1]{n + 1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{-\ln(n)}{n^2}.$$

Exercice 8 : Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1 + x} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire, pour tout k entier naturel différent de 0 et 1, la limite lorsque n tend vers l'infini de $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

Exercice 9 : Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

a) Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est höldérienne d'exposant 1.

b) Démontrer que les fonctions höldériennes d'exposant strictement supérieur à 1 sont contantes.
c) On considère la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ définie sur $]0,1]$. montrer que la fonction n'est pas hölderienne d'exposant 1.
d) Vérifier cependant que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0,1[$.

3 Inégalité de taylor-Young

Theorem 3.1 *Soit I un intervalle réel et a un élément de I. Soit f une fonction réelle définie sur I et dérivable en a n fois. Alors pour tout x dans I, nous avons*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

avec $R_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, c'est à dire que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Lors de cette séance, nous allons travailler sur une seule application de cette formule : obtenir des développements limités. Ces derniers permettent par exemple de lever des formes indéterminées lorsqu'on cherche des limites, ou de trouver des équivalents de sommes.

Exercice 10 : En utilisant la formule de Taylor-Young, donner les dl à l'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.

Exercice 11 : Déterminer les limites en 0 des expressions suivantes :
1) $\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$
2) $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$
3) $\frac{2\cos(x)-2}{x^2}$

Exercice 12 Déterminer un équivalent en $+\infty$ de

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}.$$

Exercice 4 Soit f une fonction réelle deux fois dérivable. Etudier la limite, lorsque h tend vers 0 de l'expression

$$\frac{f(a+h) - f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Exercice 13 : Déterminer le limite en $+\infty$ de

$$(x+3)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 14 : Pour aller plus loin

Soit $f : x \mapsto [(x^2-1)^n]^{(n)}$.

1) Montrer que f est une fonction polynômiale de degré n.

2) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

3) Montrer que f possède exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.