Oral blanc BCPST2-Sujet 1

26 mai 2015

1 Sujet 1

Une urne contient trois boules indiscernables et numérotées 1, 2 et 3. On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de l'urne, avec, à chaque fois, remise de la boule obtenue avant le tirage suivant. Soit X le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour obtenir la première fois trois fois de suite le même numéro. On note p_n la probabilité de l'événement $[X = n]$ et c_n la probabilité de l'événement $[X \leq n]$.

Les questions 1 et 2 traite de l'étude informatique du problème. Des rappels sur le logiciel Python sont disponibles à la fin du sujet. Les questions suivantes sont indépendates des deux premières et concernent l'étude théorique de l'exercice.

1) Proposer une représentation informatique de l'urne et une fonction permettant de simuler une expérience comme celle décrite (pour 100 tirages) ci-dessus et retournant la liste Z des boules tirées à chaque étape et la valeur de X pour cette expérience.
2) Toujours informatiquement, effectuer cette série de 100 tirages un grand nombre de fois et relever la valeur de X pour chacune des séries. Pourriez-vous, grâce à ses simulation, donner une estimation de l'espérance de X ?
3) a) Que valent p_1 et p_2 ? Calculer p_3 et p_4.
   b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.
4) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+3} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 (1 - c_n)$.
   b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27} p_n = 0$.
5) a) Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = p_{n+2} - \frac{2}{3} p_{n+1} - \frac{2}{9} p_n$. Calculer u_2. En ddéuire que la suite (u_n) est la suite nulle.
   b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} \right)$.

c) Montrer que la série de terme général p_n est convergente et calculer $\sum_{n=2}^{\infty} p_n$. Que signifie le résultat obtenu ?

d) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Rappels :
La fonction randint(start, stop) renvoie un nombre entier aléatoire entre start et stop.

2 Sujet 2

On considère deux lois de probabilités :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_\lambda(k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \text{ et } \delta_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{si k=0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour p un réel fixé dans $]0,1[$, on pose : $P^p = (1-p)P_\lambda + p\delta_0$.

Les deux premières questions traitent le problème informatiquement. Des rappels sur le logiciel Python sont disponibles à la fin du sujet. La suite est indépendante et concerne la partie théorique de l'exercice.

1) Ecrire une fonction informatique permettant de simuler la loi P^0 (lorsque l'on entre λ).
2) En simulant un grand nombre de fois cette loi, en proposer une estimation de la moyenne et de la variance. Cela est-il cohérent avec les résultats que vous connaissez ?
3) Montrer que la loi P^p est une loi de probabilité. Calculer l'espérance et la varaiance d'une variable de loi P^p (si elles existent).
4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi P^p. On pose $Y_n = Card\{k \in \{1,\dots n\}, X_k = 0\}$. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
5) Soit $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. déterminer son espérance et sa variance (si elles existent).
6) Déterminer la covariance de Y_n et Z_n.

Rappels :
Pour simuler une loi de Poisson de paramètre l en Python, on peut utiliser la commande suivante (qui utilise la loi exponentielle) :

```
from random import *
def Poisson(l):
    t=1.0/expovariate(l)
```

```
    return int(t)
```

De plus, la fonction randint(start, stop) renvoie un nombre entier aléatoire entre start et stop.

3 Sujet 3

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Noit N la variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de la suite (X_n). On définit alors une variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \neq 0 \end{cases}$$

.

Dans les deux premières questions, on traitera le problème informatiquement. Des rappels sur le logiciel Python sont disponibles à la fin du sujet.La suite est indépendante et considère le problème de manière théorique.

1) Ecrire une fonction informatique permettant de simuler la loi de Y.
2) En simulant un grand nombre de fois Y pouvez-vous donner une estimation de son espérance et de sa variance ?
3) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_r = \sum_{k=1}^{r} X_k$.
4) Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$, puis $\mathbb{P}(Y = r)$, pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$.
5) Déterminer l'espérance de Y (si elle existe).

Rappels :

Pour simuler une loi de Poisson de paramètre l en Python, on peut utiliser la commande suivante (qui utilise la loi exponentielle) :

```
from random import *
def Poisson(l):
    t=1.0/expovariate(l)
    return int(t)
```

4 Sujet 4

Dans cet exercice, on va étudier le comportement de la série $\sum_k \frac{1}{k^2}$.

1) Ecrire un programme informatique permettant, lorsque l'on donne n d'avoir $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

2) Etudier alors graphiquement le comportement de la suite (S_n) lorsque n est grand. Que pouvez-vous conjecturer ?

3 Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

4) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. vérifier que

$$\forall t \in]0, \pi], \frac{1 - \exp(imt)}{1 - \exp(it)} \exp(it) = \frac{\sin(\frac{mt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \exp(i\frac{m+1}{2}t).$$

En déduire que

$$\forall t \in]0, \pi], \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos(\frac{m+1}{2}) \sin(\frac{m}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

5) Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin(\frac{t}{2})}$ si $0 < t \leq \pi$ et $f(0 =) - 1$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Pouvez-vous illustrer cela graphiquement grâce à l'ordinateur ?

6) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2m+1}{2} t \right) dt.$$

En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5 Sujet 5

Soit $\alpha \geq 1$.

1) Montrer que

$$\forall x \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+\alpha}}{1+x}.$$

2) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

3) En déduire que la suite $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$ converge. Ecrire une programme informatique permettant de tracer en fonction de n les valeurs de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$. Cela est-il cohérent avec la théorie ?

4) Retrouver la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

5) Grâce à votre ordinateur et aux résultats précédents, proposer une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-5} près.

6 Sujet 6

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On note E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n,$$

et F l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n,$$

et G l'ensemble des suites réelles (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n.$$

1) Vérifier que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels.

2) En mettant les termes initiaux et n en paramètres d'entrées, écrire trois fonctions informatiques permettant de calculer v_n et a_n et b_n. Grâce à ce programme, étudier graphiquement le comportement de ses suites lorsque n est grand. Que pouvez-vous en conjecturer ? Y a-t-il une influence des termes initiaux ?

3) Déterminer une base et la dimension de F.

4) Même question avec G.

5) En considérant l'application allant de E dans $\mathbb{R}^3$, qui a (u_n) associe (u_0, u_1, u_2), déterminer la dimension de E. Montrer de plus que $F \cap G = \{0_E\}$. On dit

alors que F et G sont supplémentaires et on sait alors que l'ensemble des vecteurs des bases de F et de G forment une base de E.

6) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$ et appartenant à E. Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de n.