

## Combien existe-t-il d'octaèdres dont les longueurs des arêtes sont données?

ANNE BELLIDO(\*) - JEAN-PIERRE DEDIEU(\*)

JEAN-CLAUDE YAKOUBSOHN(\*)

### 1. - Introduction.

Considérons le robot parallèle suivant (figure 1) constitué de deux triangles indeformables  $ABC$  et  $DEF$  reliés entre eux par six vérins de longueurs variables:  $AD, AE, BE, BF, CF, CD$ . Les articulations entre les vérins et les plates-formes sont du type cardan et permettent des rotations suivant les trois axes de coordonnées. Les roboticiens dénomment ce type de robot «plateforme de Stewart» en hommage à son inventeur [14] qui conçut sur ce principe en 1965, un simulateur de vol pour avions. Les qualités de ces robots sont la précision du positionnement de la plateforme supérieure et la rigidité d'un tel assemblage. Pour ces raisons, ils sont utilisés dans des domaines autres que celui de la simulation, notamment dans la manipulation précise de charges car ils peuvent transporter des masses 90 fois supérieures à la leur, voir [9]. Supposons connues les positions des sommets  $A, B$  et  $C$  de la plate-forme inférieure supposée fixe. Nous souhaitons calculer les coordonnées des sommets  $D, E$  et  $F$  de la plate-forme supérieure en fonction des longueurs des six vérins et déterminer toutes les solutions possibles: c'est le problème géométrique direct. Ce problème découle de la difficulté à piloter un tel robot. Il s'agit d'amener la plateforme supérieure d'une position de départ I à une position d'arrivée II. La position II étant connue, il est facile d'en déduire les longueurs des vérins. La résolution du problème géométrique direct permet au cours du dépla-

---

(\*) Indirizzo degli autori: Laboratorio d'Analyse Numérique, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France.

Logiciels de Calculus formels utilisés: MAPLE.

CoCOA: Alessandro Giovini, Gianfranco Niesi, Department of Mathematics, University of Genova, viale Leon Battista Alberti 4, 16132 Genova, Italy.



symétrie près, par rapport au plan  $ABC$ . Nous verrons, sur un exemple, qu'une solution convexe n'existe pas toujours.

D'autre part, Bricard (1987,[1]) a étudié et caractérisé les octaèdres qui peuvent être déformés sans déformer leurs faces. Ces octaèdres articulés ne sont bien sûr pas convexes. Leur étude a été reprise par Lebesgue (1938,[8]) qui en a donné une description géométrique. Dans le cas des octaèdres articulés de Bricard, notre problème possède bien sûr une infinité de solutions.

Nous montrons que, en général, il existe au plus huit octaèdres dont les longueurs des arêtes sont données (seize en comptant les configurations symétriques) et nous donnons un exemple où le nombre huit est effectivement atteint. Ce résultat a aussi été obtenu par J.-P. Merlet par une méthode différent de la nôtre.

Cet article est divisé en quatre parties. Dans la première, nous rappelons la modélisation de Bricard de ce problème. Les trois angles dièdres  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  sont obtenus à l'aide d'un système de trois équations algébriques de degré 4. La connaissance de ces angles trièdres permet de déterminer les plans  $ACD$ ,  $ABE$  et  $BCF$ , puis les coordonnées de  $D$ ,  $E$  et  $F$ : le point  $D$  est à l'intersection des sphères centrées en  $A$  et  $C$  et de rayons respectifs  $AD$  et  $CD$ , et du plan  $ACD$ .

Dans la seconde partie, nous montrons que les carrés des longueurs des trois diagonales de l'octaèdre ( $AF$ ,  $BD$  et  $CE$ ) sont solutions d'un système de six équations algébriques de degré 4. On obtient alors les coordonnées des points  $D$ ,  $E$  et  $F$  en calculant l'intersection de trois sphères:  $D$  est à l'intersection des sphères centrées en  $A$ ,  $B$  et  $C$  et de rayons respectifs  $AD$  (donné),  $BD$  (calculé) et  $CD$ (donné).

Dans la troisième partie, nous montrons que le nombre d'octaèdres possibles est au plus égal à huit.

Enfin, nous étudions deux exemples et nous donnons quelques indications sur l'aspect numérique du problème.

## 2. - Les équations de Bricard.

Soit  $SP_1P_2P_3P_4$  un angle tétraèdre de sommet  $S$  dont les quatre faces sont invariables. Notons  $\alpha = \angle P_4SP_1$ ,  $\beta = \angle P_1SP_2$ ,  $\gamma = \angle P_2SP_3$  et  $\delta = \angle P_3SP_4$  (voir figure 2).

Cet angle tétraèdre, articulé suivant les arêtes  $SP_1$ ,  $SP_2$ ,  $SP_3$  et  $SP_4$  peut être déformé tout en conservant ses faces invariables (les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  restent constants au cours de la déformation). Notons  $\varphi$  et  $\psi$  les angles dièdres  $SP_1$  et  $SP_4$ . Nous allons voir, suivant Bricard, qu'il existe une rela-

tion qui relie  $\varphi$  et  $\psi$  au cours de la déformation de cet angle solide. Introduisons un repère orthonormé et quatre points  $M, N, P, Q$  pris sur les arêtes  $SP_1, SP_2, SP_3, SP_4$  de la façon suivante: l'origine du repère est placée en  $M$  et les axes  $Mx$  et  $My$ , pris dans le plan  $SMQ$ , sont parallèles aux bissectrices de l'angle  $\angle MSQ$ . Le point  $Q$  est sur l'axe  $Mx$  et  $SM = SQ = 1$ . Le point  $S$  a une ordonnée négative. Les points  $N$  et  $P$  appartenant aux axes  $SP_2$  et  $SP_3$  sont tels que les angles  $\angle SMN$  et  $\angle SQP$  soient droits.

Ces points ont pour coordonnées:

$$N \begin{cases} x_1 = \operatorname{tg} \beta \cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ y_1 = \operatorname{tg} \beta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ z_1 = \operatorname{tg} \beta \sin \varphi, \end{cases} \quad P \begin{cases} x_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \delta \cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ y_2 = \operatorname{tg} \delta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi, \\ z_2 = \operatorname{tg} \delta \sin \psi. \end{cases}$$

Egalons la valeur de  $\overline{NP}^2$  qui résulte de ces expressions à celle que fournit la considération du triangle  $NSP$ . Il vient après réduction:

$$\begin{aligned} (0) \quad & \sin \beta \sin \delta \cos \alpha \cos \varphi \cos \psi - \sin \beta \sin \delta \sin \varphi \sin \psi - \\ & - \sin \alpha \sin \beta \cos \delta \cos \varphi - \sin \alpha \sin \delta \cos \beta \cos \psi + \\ & + \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \delta = 0. \end{aligned}$$

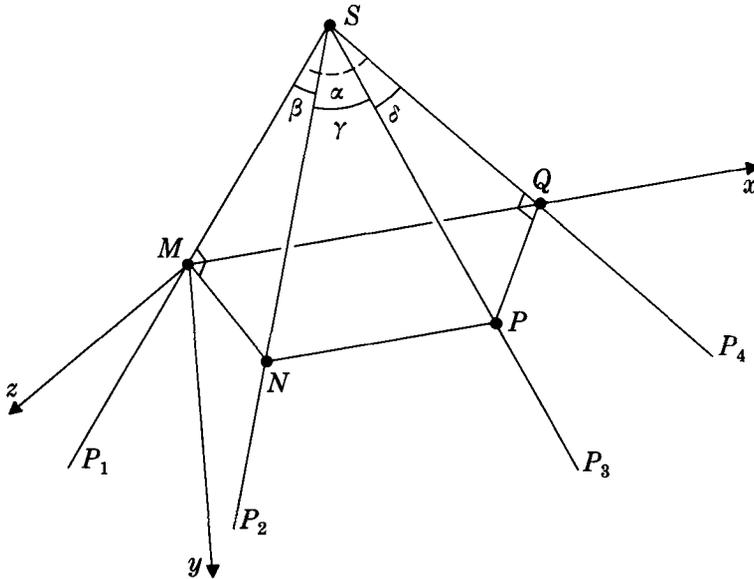


Figure 2.

Si l'on introduit les variables  $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$  et  $u = \operatorname{tg}(\psi/2)$ , cette relation devient:

$$(1) \quad at^2u^2 + bt^2 + 2ctu + du^2 + c = 0,$$

avec

$$(2) \quad \begin{cases} a = \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta + \delta), \\ b = \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta - \delta), \\ c = -2 \sin \beta \sin \delta, \\ d = \cos \gamma - \cos(\alpha - \beta + \delta), \\ e = \cos \gamma - \cos(\alpha - \beta - \delta). \end{cases}$$

Revenons au problème posé au paragraphe 1. Afin de déterminer tous les octaèdres ayant des faces données, nous supposons que la face  $ABC$  est fixe (figure 1). Ensuite la considération des angles tétraèdres  $ACDEB$ ,  $BAEFC$  et  $CADFB$ , de sommets respectifs  $A$ ,  $B$  et  $C$ , fournit trois équations en les inconnues  $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ ,  $u = \operatorname{tg}(\psi/2)$  et  $v = \operatorname{tg}(\chi/2)$  où  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$  sont les angles dièdres  $AC$ ,  $AB$  et  $BC$ . Ces équations sont du même type que (1):

$$(3) \quad \begin{cases} B_1(t, u) = at^2u^2 + bt^2 + 2ctu + du^2 + e, \\ B_2(u, v) = a'u^2v^2 + b'u^2 + 2c'uv + d'v^2 + e', \\ B_3(t, v) = a''t^2v^2 + b''t^2 + 2c''tv + d''v^2 + e''. \end{cases}$$

Remarquons que le résultant de ce système, obtenu en éliminant  $u$  et  $v$  entre ces trois équations, est un polynôme de degré 16 en  $t$ , où n'interviennent que des termes de degré pair. En effet, si  $(t, u, v)$  est solution de (3),  $(-t, -u, -v)$  est aussi solution du système.

### 3. - Les équations de Lagrange.

Considérons l'octaèdre  $ABCDEF$  (figure 1) et introduisons la numérotation suivante de ses arêtes

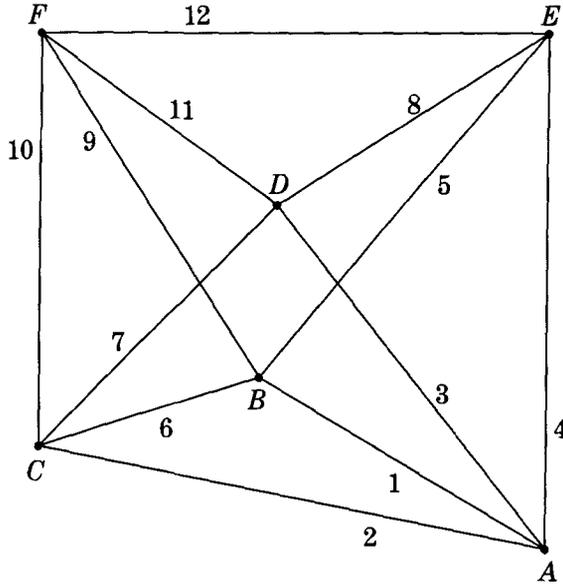


Figure 3.

Notons aussi  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq 12$ , le carré de la longueur de l'arête numéro  $i$ , ainsi que

$$x = d(C, E)^2, \quad y = d(B, D)^2, \quad z = d(A, F)^2,$$

les carrés des longueurs des diagonales de l'octaèdre:  $CE$ ,  $BD$  et  $AF$ .

Nous allons voir que les quantités  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont reliées entre-elles de six manières différentes. Pour ce faire, nous utilisons une identité, due à Lagrange, entre les distances mutuelles de cinq points de l'espace. Plus généralement, on a:

**PROPOSITION 3.1.** Soit  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , des points de  $\mathbb{R}^n$  avec  $p \geq n + 2$ . Notons  $L_{ij} = d(M_i, M_j)^2$  le carré de la distance euclidienne de  $M_i$  et  $M_j$ . On a:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & L_{12} & \dots & L_{1p} \\ 1 & L_{21} & 0 & \dots & L_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & L_{p1} & L_{p2} & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de faire le produit des deux matrices  $A$  et  $B$  suivantes pour obtenir la matrice ci-dessus; ces deux matrices sont de taille  $(p + 1) \times (p + 1)$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \|M_1\|^2 & x_{11} & \dots & x_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \|M_2\|^2 & x_{21} & \dots & x_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \|M_p\|^2 & x_{p1} & \dots & x_{pn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \|M_1\|^2 & \|M_2\|^2 & \dots & \|M_p\|^2 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -2x_{11} & -2x_{21} & \dots & -2x_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & -2x_{1n} & -2x_{2n} & \dots & -2x_{pn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = B$$

où  $M_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$  et  $\|M_i\|^2 = x_{i1}^2 + \dots + x_{in}^2$ .

A l'aide de cette identité, nous obtenons:

PROPOSITION 3.2. Les carrés  $x, y, z$  des longueurs des diagonales satisfont les équations suivantes

$$(4) \quad E_1(x, y) = E_2(x, y) = E_3(x, z) = E_4(x, z) = E_5(y, z) = E_6(y, z) = 0,$$

où chaque équation est du type.

$$E(u, v) = u^2 v^2 + c_2 u^2 v + c_3 uv^2 + c_4 u^2 + c_5 v^2 + c_6 uv + c_7 u + c_8 v + c_9,$$

avec  $c_2$  et  $c_3 < 0$ ,  $c_4, c_5$  et  $c_6 \geq 0$ .

DÉMONSTRATION. On utilise la proposition 3.1 en prenant  $n = 3, p = 5$  et où les  $M_i, 1 \leq i \leq 5$ , sont pris parmi les six sommets de l'octaèdre, selon le schéma suivant:

$$\det(A, B, C, D, E) = E_1(x, y),$$

$$\det(F, B, C, D, E) = E_2(x, y),$$

$$\det(D, A, C, F, E) = E_3(x, z),$$

$$\det(B, A, C, F, E) = E_4(x, z),$$

$$\det(C, A, D, F, B) = E_5(y, z),$$

$$\det(E, A, D, F, B) = E_6(y, z).$$

Ces équations ont été calculées à l'aide du logiciel de calcul formel Maple, les coefficients en fonction des  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq 12$ , sont égaux à:

$$\begin{aligned} c_2 = -2(L_1 + L_3), \quad c_3 = -2(L_2 + L_4), \quad c_4 = (L_1 - L_3)^2, \quad c_5 = (L_2 - L_4)^2, \\ c_6 = 4(L_2 + L_4)(L_1 + L_3) - 2(L_6 - L_1 - L_2)(L_8 - L_3 - L_4) - \\ - 2(L_5 - L_1 - L_4)(L_7 - L_2 - L_3), \end{aligned}$$

(les coefficients  $c_7, c_8, c_9$  ont une expression trop compliquée pour être explicités ici. Ils ont été calculés à l'aide de Maple), dans le cas de la première équation (les autres cas sont identiques). Il est donc clair que  $c_2$  et  $c_3 < 0$ ,  $c_4$  et  $c_5 \geq 0$ . Montrons que  $c_6 \geq 0$ . Remarquons que

$$L_6 - L_1 - L_2 = -2\sqrt{L_1 L_2} \cos BAC,$$

$$L_8 - L_3 - L_4 = -2\sqrt{L_3 L_4} \cos DAE,$$

$$L_5 - L_1 - L_4 = -2\sqrt{L_1 L_4} \cos BAE,$$

$$L_7 - L_2 - L_3 = -2\sqrt{L_1 L_3} \cos CAD.$$

On obtient donc

$$c_6 = 4(L_2 + L_4)(L_1 + L_3) - 16\alpha \sqrt{L_1 L_2 L_3 L_4},$$

avec  $\alpha = (\cos BAC \cos DAE + \cos BAE \cos CAD)/2$ . On remarque alors que

$$(L_2 + L_4) \geq 2\sqrt{L_2 L_4}, \quad (L_1 + L_3) \geq 2\sqrt{L_1 L_3} \quad \text{et} \quad |\alpha| \leq 1.$$

**PROPOSITION 3.3.** Les quantités  $x$ ,  $y$  et  $z$  satisfont les inégalités suivantes:

$$(5) \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \\ \leq \min \{(\sqrt{L_2} + \sqrt{L_4})^2, (\sqrt{L_5} + \sqrt{L_6})^2, (\sqrt{L_7} + \sqrt{L_8})^2, (\sqrt{L_{10}} + \sqrt{L_{12}})^2\}, \\ 0 \leq y \leq \\ \leq \min \{(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_3})^2, (\sqrt{L_6} + \sqrt{L_7})^2, (\sqrt{L_5} + \sqrt{L_8})^2, (\sqrt{L_9} + \sqrt{L_{11}})^2\}, \\ 0 \leq z \leq \\ \leq \min \{(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_9})^2, (\sqrt{L_2} + \sqrt{L_{10}})^2, (\sqrt{L_3} + \sqrt{L_{11}})^2, (\sqrt{L_4} + \sqrt{L_{12}})^2\}. \end{cases}$$

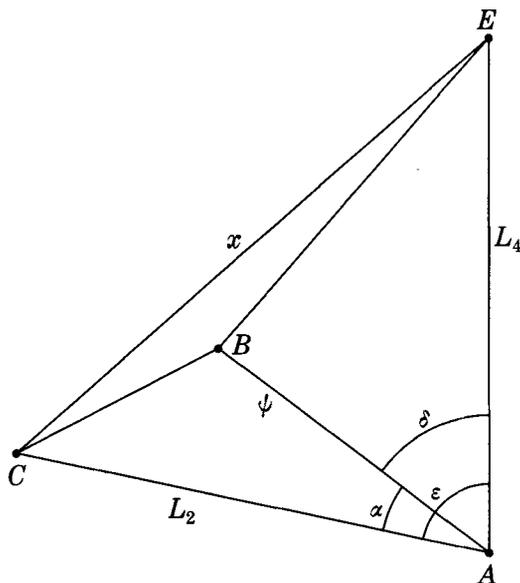


Figure 4.

DÉMONSTRATION. Considérons  $x$ . On a  $x \geq 0$  puisque c'est le carré de la longueur  $CE$ . L'autre borne provient de l'inégalité du triangle relative à  $CEA, CEB, CED$  et  $CEF$ .

Les systèmes d'équations (3) et (4) ne sont pas sans présenter d'analogie, ainsi qu'on peut aisément le constater. Nous allons voir comment on peut passer du système  $B_1, B_2, B_3$  au système  $E_1, E_3, E_5$ . Considérons la figure suivante, qui est une partie de la figure 3.

Rappelons que  $\alpha = \angle BAC$  et  $\delta = \angle BAE$  sont donnés, ainsi que  $L_2 = d(A, C)^2$  et  $L_4 = d(A, E)^2$ , alors que  $x = d(E, C)^2$ ,  $\varepsilon = \angle CAE$  et  $\psi$  (l'angle dièdre  $AB$ ) sont inconnus.

D'une part les angles  $\varepsilon$  et  $\psi$  sont reliés par la relation suivante (classique en trigonométrie sphérique):

$$(6) \quad \cos \varepsilon = \cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta \cos \psi.$$

D'autre part  $x$  et  $\cos \varepsilon$  sont reliés par (considérant le triangle  $ACE$ ):

$$(7) \quad x = L_2 + L_4 - 2\sqrt{L_2 L_4} \cos \varepsilon,$$

d'où la relation suivante entre  $x$  et  $\cos \psi$ :

$$(8) \quad x = L_2 + L_4 - 2\sqrt{L_2 L_4} (\cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta \cos \psi).$$

On peut procéder de façon identique avec  $C, y$  et  $\cos \varphi$  ainsi que  $B, z$  et  $\cos \chi$ .

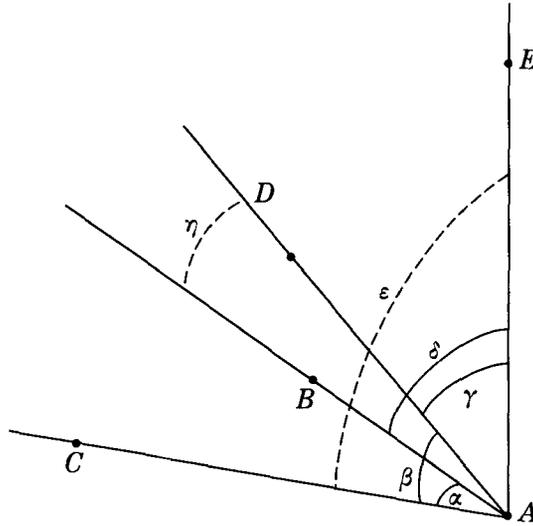


Figure 5.

Si l'on remplace dans la relation (0) les expressions  $\cos \psi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \psi$  et  $\sin \varphi$  par leurs valeurs en fonction de  $x$  et  $y$ , on obtient précisément  $E_1(x, y)$ .

Cette vérification a été effectuée à l'aide du logiciel de calcul formel Maple. Ce fut long et fastidieux et nous n'en donnons pas le détail ici.

On peut également établir le lien entre les systèmes (3) et (4) en utilisant la caractérisation suivante d'une demi-droite issue de l'origine dans un repère quelconque.

Considérons l'angle tétraèdre  $ACDEB$  de sommet  $A$ , et un repère porté par les demi-droites  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$  formant entre elles les angles  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ . La demi-droite  $AB$  forme avec chacun des axes les angles  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\delta$  (voir: figure 5).

On a la relation suivante (cf. [13] Chap. 1, page 13):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cos \beta & \cos \varepsilon & \cos \alpha \\ \cos \beta & 1 & \cos \gamma & \cos \eta \\ \cos \varepsilon & \cos \gamma & 1 & \cos \delta \\ \cos \alpha & \cos \eta & \cos \delta & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on obtient une nouvelle équation:  $F_1(\cos \varepsilon, \cos \eta) = 0$ , avec

$$F_1 = (\cos^2 \varepsilon - 1)(\cos^2 \eta - 1) + 2 \cos \varepsilon (\cos \alpha \cos \delta + \cos \beta \cos \gamma) +$$

$$+ 2 \cos \eta (\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma \cos \delta) - 2 \cos \varepsilon \cos \eta (\cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \delta) + \\ + (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \cos \delta)^2 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta) = 0.$$

En reportant dans cette équation les expressions de  $\cos \varepsilon$  et  $\cos \eta$  en fonction de  $\cos \psi$  et  $\cos \varphi$  respectivement (cf. (6)), on retrouve très simplement le carré de l'équation (0) de Bricard. On peut donc, appliquant ceci aux angles tétraèdres de sommet  $B$  et  $C$  obtenir le système (3).

Si, par contre, on reporte dans cette équation les expressions de  $\cos \varepsilon$  et  $\cos \eta$  en fonction de  $x$  et  $y$  (cf. (7)), on obtient l'équation de Lagrange  $E_1(x, y) = 0$ , et par suite, le système (4).

#### 4. - Sur le nombre de solutions.

Supposons que la face  $ABC$  de l'octaèdre (celle dont on connaît les coordonnées de sommets) ne se réduise pas un segment.

PROPOSITION 4.1. A toute solution  $(x, y, z)$  du système (4)-(5), il ne peut correspondre qu'au plus deux octaèdres symétriques par rapport au plan  $ABC$ .

DÉMONSTRATION. Le point  $D$  est à l'intersection des sphères centrées en  $A, B$  et  $C$  de rayons respectifs  $\sqrt{L_3}, \sqrt{y}$  et  $\sqrt{L_7}$ . Ces points d'intersection:  $D_1$  et  $D_2$  sont symétriques par rapport au plan  $ABC$ . Considérons maintenant le point  $E$ : il est à l'intersection des sphères centrées en  $A, B$  et  $C$  et de rayons  $\sqrt{L_4}, \sqrt{L_5}$  et  $\sqrt{x}$ . Donc deux positions possibles  $E_1$  et  $E_2$ . Ce qui conduit à quatre possibilités:  $A, B, C, D_1, E_j$ . Le nombre quatre ne peut être atteint que si  $D_1$  et  $D_2$  (resp.  $E_1$  et  $E_2$ ) sont distincts, c'est à dire non situés dans le plan  $ABC$ . Dans ce cas, les distances  $d(D_1, E_1)$  et  $d(D_1, E_2)$  sont différentes. Mais comme  $d(D, E)^2 = L_8$  est une donnée du problème, une seule de ces deux possibilités peut être réalisée. En conclusion, il n'y a que deux configurations admissibles pour les points  $D_j$  et  $E_j$ , symétriques par rapport au plan  $ABC$ . On raisonne avec  $F$  de la même manière, ce qui établit le résultat.

Nous allons maintenant prouver que le système (4) ne peut posséder que huit solutions. On a:

$$E_1(x, y) = x^2 y^2 + c_2 x^2 y + c_3 x y^2 + c_4 x^2 + c_5 y^2 + c_6 x y + c_7 x + c_8 y + c_9.$$

Posons

$$P_1 = x^2 + c_3 x + c_5, \quad Q_1 = c_2 x^2 + c_6 x + c_8, \quad R_1 = c_4 x^2 + c_7 x + c_9.$$

On a :

$$E_1 = P_1 y^2 + Q_1 y + R_1,$$

et de même

$$E_2 = P_2 y^2 + Q_2 y + R_2.$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$F_{12} = P_2 E_1 - P_1 E_2 = (P_2 Q_1 - P_1 Q_2) y + (P_2 R_1 - P_1 R_2),$$

$$R_{12} = \text{Res}(E_1, E_2, y) = (P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(R_2 Q_1 - R_1 Q_2) + (P_2 R_1 - P_1 R_2)^2,$$

$$S_{12} = \text{Res}(E_1, E_2, x).$$

**PROPOSITION 4.2.** Si les polynômes  $R_{12}(x)$  et  $S_{12}(y)$  ne sont pas identiquement nuls, le système  $E_1(x, y) = 0$ ,  $E_2(x, y) = 0$  possède au plus huit solutions.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $(\bar{x}, \bar{y})$  une solution du système  $E_1 = E_2 = 0$ . On a  $R_{12}(\bar{x})$ . Comme  $R_{12}(x) \neq 0$ , le degré de  $R_{12}$  est  $\leq 8$  de sorte qu'il y a au plus huit possibilités pour  $\bar{x}$ .

Remarquons que l'on a aussi  $F_{12}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ .

*1er cas:*  $(P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(\bar{x}) \neq 0$ .

Puisque  $F_{12}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , on a

$$\bar{y} = - (P_2 R_1 - P_1 R_2)(\bar{x}) / (P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(\bar{x})$$

et cela détermine  $\bar{y}$  de façon unique.

*2ème cas:*  $(P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(\bar{x}) = 0$ ,  $P_1(\bar{x}) = P_2(\bar{x}) = 0$ ,  $Q_1(\bar{x})$  ou  $Q_2(\bar{x}) \neq 0$ .

On a alors:  $E_i(\bar{x}, \bar{y}) = Q_i(\bar{x})\bar{y} + R_i(\bar{x}) = 0$ . Comme un des deux nombres  $Q_i(\bar{x})$  est  $\neq 0$ , cela détermine  $\bar{y}$  de façon unique.

*3ème cas:*  $(P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(\bar{x}) = 0$ ,  $P_1(\bar{x}) = P_2(\bar{x}) = 0$ ,  $Q_1(\bar{x}) = Q_2(\bar{x}) = 0$ .

On a  $E_i(\bar{x}, y) = R_i(\bar{x}) = 0$  pour  $i = 1, 2$  et quel que soit  $y$ . Cela signifie que  $\bar{x}$  est une racine commune aux polynômes  $E_1(x, y)$  et  $E_2(x, y)$  dans l'anneau

$\mathbb{R}[y][x]$ . Dans ce cas,  $S_{12} = \text{Res}(E_1, E_2, x) = 0$  contrairement à l'hypothèse.

4ème cas:  $(P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(\bar{x}) = 0$ ,  $P_1(\bar{x})$  ou  $P_2(\bar{x}) \neq 0$ .

Remarquons que puisque

$$R_{12}(\bar{x}) = (P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(R_2 Q_1 - R_1 Q_2) + (P_2 R_1 - P_1 R_2)^2 = 0$$

on a:

$$(P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(\bar{x}) = (P_2 R_1 - P_1 R_2)(\bar{x}) = 0,$$

d'où

$$(R_2 Q_1 - R_1 Q_2)(\bar{x}) = 0$$

puisque par hypothèse  $P_1(\bar{x})$  ou  $P_2(\bar{x}) \neq 0$ . Ceci permet de voir que  $\bar{x}$  est racine double de l'équation  $R_{12}(x) = 0$ . Supposons que  $P_1(\bar{x}) \neq 0$ . On obtient  $\bar{y}$  en résolvant l'équation  $E_1(\bar{x}, y) = 0$  qui est du second degré. Ainsi à  $\bar{x}$  racine double de  $R_{12}(x) = 0$  correspond au plus deux valeurs de  $\bar{y}$ . En résumé, il n'y aura pas plus de huit couples  $(\bar{x}, \bar{y})$  solutions de  $E_1 = E_2 = 0$ .

Étudions maintenant le nombre de solutions du problème.

**THÉORÈME 4.3.** En général, il existe au plus huit octaèdres dont les longueurs des arêtes sont données (à un déplacement ou une symétrie près). Seul l'un d'entre eux peut être convexe.

**DÉMONSTRATION.** La seconde assertion n'est autre que le résultat de Cauchy cité au paragraphe 1. Pour prouver la première assertion, il suffit, en vertu de la proposition 4.1 de montrer que le système (4) possède au plus huit solutions. Ce sera le cas si parmi les trois couples de polynômes  $R_{12}(x)$  et  $S_{12}(y)$ ,  $R_{34}(x)$  et  $S_{34}(z)$ ,  $R_{56}(y)$  et  $S_{56}(z)$  (formés comme  $R_{12}$  et  $S_{12}$ , à partir des couples d'équations  $E_1$  et  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$ ,  $E_5$  et  $E_6$ ), deux d'entre eux sont formés de polynômes non nuls. On applique alors deux fois la proposition 4.2. Les cas de nullité pour les polynômes  $R_{i, i+1}$  et  $S_{i, i+1}$  fournissent des relations algébriques portant sur les carrés des longueurs des arêtes:  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq 12$ , ce qui justifie l'expression «en général».

**REMARQUE 4.4.** Nous eussions aimé montrer que les cas dans lesquels le théorème précédent est en défaut sont précisément ceux qui conduisent aux octaèdres articulés de Bricard. Hélas, les calculs que l'on devait mener pour atteindre ce résultat étaient par trop inextricables, même à l'aide des systèmes de calcul formel dont nous disposions.

EXEMPLE 4.5. Configuration fournissant huit solutions.

Considérons les huit points suivants:  $A(0, 0, -7)$ ,  $B(0, 5, 0)$ ,  $C(4, 0, 0)$ ,  $D(0, -4, 0)$ ,  $E(-6, 0, 0)$ ,  $F(0, 0, 6)$ . Ils constituent les sommets d'un octaèdre dont les diagonales sont  $AF$ ,  $BD$ ,  $CE$ . Remarquez que chaque diagonale est perpendiculaire au plan formé par les quatre autres sommets.

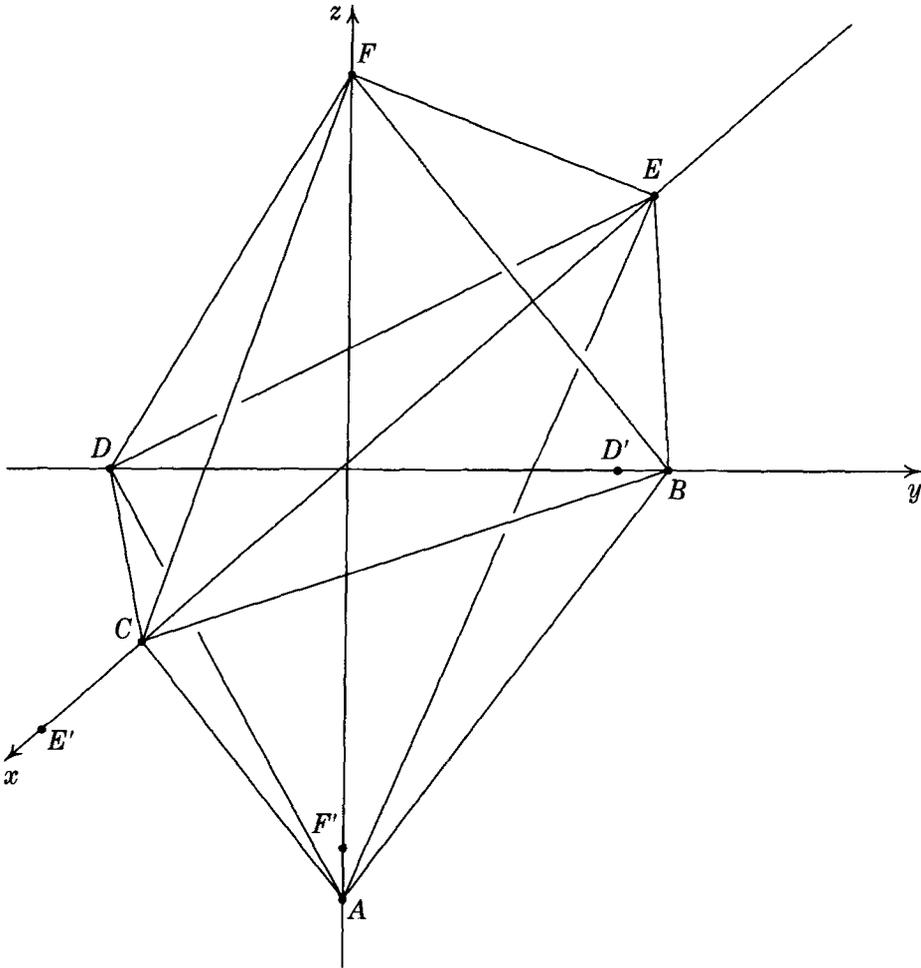


Figure 6.

Considérons les symétriques  $D'$ ,  $E'$  et  $F'$  des points  $D$ ,  $E$ ,  $F$  par rapport aux plans  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $z = 0$ . On obtient huit octaèdres différents, qui ont tous les mêmes longueurs d'arêtes en prenant pour sommets:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ou  $D'$ ,  $E$  ou  $E'$ ,  $F$  ou  $F'$ .

EQUATIONS DE LAGRANGE CORRESPONDANTES:

$$E_1(x, y) = x^2 y^2 - 146x^2 y - 234xy^2 + 81x^2 + 169y^2 + 3\,068xy - \\ - 18\,954x - 24\,674y + 13\,689,$$

$$E_2(x, y) = x^2 y^2 - 226x^2 y - 314xy^2 + 81x^2 + 169y^2 + 50\,228xy - \\ - 25\,434x - 38\,194y - 13\,689,$$

$$E_3(x, z) = x^2 z^2 - 204x^2 z - 270xz^2 + 400x^2 + 169z^2 + 45\,080xz - \\ - 108\,000x - 34\,476z - 67\,600,$$

$$E_4(x, z) = x^2 z^2 - 168x^2 z - 234xz^2 + 400x^2 + 169z^2 + 35\,216xz - \\ - 93\,600x - 28\,392z + 67\,600,$$

$$E_5(y, z) = y^2 z^2 - 300y^2 z - 278yz^2 + 400y^2 + 81z^2 + 44\,894yz - \\ - 111\,200y - 24\,300z + 32\,400,$$

$$E_6(y, z) = y^2 z^2 - 248y^2 z - 226yz^2 + 400y^2 + 81z^2 + 65\,312yz - \\ - 90\,400y - 20\,088z + 32\,400.$$

### 5. - Étude numérique d'un exemple sans solution convexe.

Nous nous donnons a priori les six sommets d'un octaèdre (par leurs coordonnées dans un certain repère) et nous calculons les longueurs de ses douze arêtes.

COORDONNÉES DES SOMMETS:

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1), \\ D(0.5, -0.5, 0.5), \quad E(1.5, 1.5, 0.5), \quad F(1, 1, 1.5).$$

CARRÉS DES LONGUEURS DES ARÊTES:

$$L_1 = 2, \quad L_2 = 2, \quad L_3 = 0.75, \quad L_4 = 2.75, \\ L_5 = 2.75, \quad L_6 = 2, \quad L_7 = 0.75, \quad L_8 = 5, \\ L_9 = 3.25, \quad L_{10} = 2.25, \quad L_{11} = 3.5, \quad L_{12} = 1.5.$$

Nous procédons à la mise en équations:

PREMIÈRE MÉTHODE. Nous choisissons comme inconnues les carrés des longueurs  $x, y, z$  des trois diagonales et nous calculons six déterminants de Lagrange, d'où le système suivant:

$$\begin{aligned}
 E_1(x, y) &= x^2 y^2 - 5.5 x^2 y - 9.5 xy^2 + 1.5625 x^2 + 0.5625 y^2 + \\
 &\quad + 50.25 xy + 2.65625 x - 13.59375 y - 159.24609375, \\
 E_2(x, y) &= x^2 y^2 - 13.5 x^2 y - 7.5 xy^2 + 0.0625 x^2 + 0.5625 y^2 + \\
 &\quad + 81.25 xy + 36.53125 x - 37.59375 y - 200.71484375, \\
 E_3(x, z) &= x^2 z^2 - 10.5 x^2 z - 9.5 xz^2 + 1.5625 x^2 + 0.5625 z^2 + \\
 &\quad + 69.75 xz - 17.34375 x - 1.40625 z - 22.74609375, \\
 E_4(x, z) &= x^2 z^2 - 8.5 x^2 z - 11.5 xz^2 + 7.5625 x^2 + 18.0625 z^2 + \\
 &\quad + 92.75 xz - 86.71875 x - 167.78125 z - 125.91015625, \\
 E_5(y, z) &= y^2 z^2 - 8.5 y^2 z - 5.5 yz^2 + 0.0625 y^2 + 1.5625 z^2 + \\
 &\quad + 44.75 yz - 23.84375 y - 5.78125 z - 43.77734375, \\
 E_6(y, z) &= y^2 z^2 - 8.5 y^2 z - 15.5 yz^2 + 1.5625 y^2 + 5.0625 z^2 + \\
 &\quad + 96.75 yz - 55.46875 y - 72.78125 z + 38.34765625,
 \end{aligned}$$

Une façon de résoudre ce problème est alors d'appliquer la méthode de Newton au système  $\{E_1 = 0, E_3 = 0, E_5 = 0\}$  en faisant varier le point d'initialisation dans un parallélépipède (Proposition 3.3). Ici:

$$0 \leq x \leq 7.424235,$$

$$0 \leq y \leq 5.199490,$$

$$0 \leq z \leq 7.490370.$$

DEUXIÈME MÉTHODE. Nous choisissons comme inconnues les valeurs  $t, u, v$ , des demi-tangentes des trois angles dièdres d'arêtes  $AC, AB$  et  $BC$  et nous appliquons la méthode de Bricard, d'où le système:

$$B_1(t, u) = 0.417609 t^2 u^2 - 1.383829 t^2 - 2.088932 tu - 0.531026 u^2 - 1.287997,$$

$$B_2(u, v) = 1.752369 u^2 v^2 + 0.099191 u^2 - 2.925652 uv + 0.423759 v^2 + 0.233408,$$

$$B_3(t, v) = 0.796902 t^2 v^2 + 0.000116 t^2 - 2.244334 tv - 1.138550 v^2 - 0.813169.$$

On calcule alors:

$$r_2(t) = \text{Res}(\text{Res}(B_1, B_2, u), B_3, v)$$

dont l'expression a été obtenue formellement par le logiciel de calcul formel CoCOA. On obtient:

$$\begin{aligned} r_2(t) = & 9.516048 t^{16} + 280.989250 t^{14} + 1425.989906 t^{12} - \\ & - 692.329314 t^{10} - 1269.708250 t^8 + 725.867631 t^6 - 59.436955 t^4 - \\ & - 0.620923 t^2 + 0.155113. \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme de degré 8 en  $t^2$  sont calculées simultanément par la méthode de Durand-Kerner [7]. Numériquement, nous déterminons à partir de chaque solution du système les coordonnées des sommets  $D, E, F$  d'un octaèdre, chacun de ces points étant interprété comme intersection de trois sphères; les octaèdres recherchés sont ceux pour lesquels les longueurs des côtés du triangle  $DEF$  sont égales aux données initiales.

PREMIER COUPLE DE SOLUTIONS:

*Longueurs des diagonales (Lagrange)*

$$x = 5.045546, \quad y = 1.681251, \quad z = 2.522713.$$

*Angle dièdre (Bricard)*

$$t = \text{tg}(\varphi/2) = 0.698869.$$

*Solution n° 1*

$$D(0.200322, -0.265304, 0.200322),$$

$$E(1.526328, 1.526328, 0.378555)$$

$$F(1.199446, 0.835802, 1.335802).$$

*Solution n° 2*

$$D(0.776762, 0.311136, 0.776762)$$

$$E(-0.094479, -0.094479, -1.242252)$$

$$F(-0.381255, -0.744898, -0.244898).$$

DEUXIÈME COUPLE DE SOLUTIONS:

*Longueurs des diagonales (Lagrange)*

$$x = 4.75 \quad y = 2.75 \quad z = 3.25.$$

*Angle dièdre (Bricard)*

$$t = \operatorname{tg}(\varphi/2) = 0.868529.$$

*Solution n° 3*

$$D(0.5, -0.5, 0.5)$$

$$E(1.5, 1.5, 0.5)$$

$$F(1, 1, 1.5).$$

*Solution n° 4*

$$D(0.833333, -0.166667, 0.833333),$$

$$E(-0.166667, -0.166667, -1.166667),$$

$$F(-0.666667, -0.666667, -0.166667).$$

REMARQUE. On retrouve, avec la solution n° 3, l'octaèdre dont on est parti pour se donner le problème et toutes les solutions obtenues sont convexes!

*Pervenuto in Redazione il 20 dicembre 1990.*

*In forma definitiva il 10 luglio 1991.*

## RÉSUMÉ

Nous montrons que, en général, il existe au plus huit octaèdres différents dont les longueurs des arêtes sont données. Nous donnons un exemple pour lequel ce nombre huit est atteint.

## ABSTRACT

We prove that, in general, there are at the most eight distinct octahedrons with given edge-lengths. We also give an example for which this number is reached.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BRICARD, *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 3 (1897), pp. 113-148.
- [2] A. CAUCHY, *Sur les polygones et les polyèdres*, Journal de l'école Polytechnique, 9 (1813), pp. 26-38.
- [3] S. CHARENTUS, *Modélisation et commande d'un robot manipulateur redondant composé de plusieurs plateformes de Stewart*, Thèse LAAS (1990).
- [4] S. CHARENTUS - M. RENAUD, *Calcul du modèle géométrique direct de la plateforme de Stewart*, LAAS Report n° 89260. Juillet 1989.
- [5] J.-P. DEDIEU - G. H. NORTON, *Stewart varieties: A direct algebraic model for Stewart platforms*, SIGSAM Bulletin, 24 (4), (1990), pp. 42-59.
- [6] E. F. FICHTER, *A stewart platform - based manipulator: general theory and practical construction*, The International Journal of Robotics Research, 5 (2), (1986), pp. 157-182.
- [7] A. FROMMER, *A unified approach to methods for the simultaneous computation of all zeros of generalized polynomials*, Numer. Math., 54 (1988), pp. 105-116.
- [8] H. LEBESGUE, *Octaèdres articulés de Bricard*, L'enseignement Mathématique, 13 (1967), pp. 150-160.
- [9] J.-P. MERLET, *Parallel manipulators. Part I: Theory, design, kinematics, dynamics and control*, INRIA - Sophia Antipolis. Rapport n° 646 (1987).
- [10] J.-P. MERLET, *Manipulateurs parallèles. 4ème partie: Modes d'assemblage et cinématique directe sous forme polynomiale*, INRIA - Sophia-Antipolis (Novembre 1989).
- [11] J.-P. MERLET, *Robots parallèles*, Hermes (1990).
- [12] P. NANO, K. J. WALDRON, *Direct kinematic solution of a Stewart Platform*, IEEE International Conference Robotics and Automation, Scottsdale, Arizona (U.S.A.), pp. 431-437, Mai 1989.
- [13] M. NIEWENGLOWSKI, *Cours de géométrie analytique*, Gauthiers-Villars Ed., Paris (1896).
- [14] D. STEWART, *A platform with six degrees of freedom*, Proc. Inst. Mech. Engineers (London), 180 (1965-66), pp. 371-378.