C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, p. 385-390, 1995

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Une constante universelle pour la convergence de la méthode de Newton

Jean-Claude Yakoubsohn

Résumé – Nous donnons un nouveau théorème concernant la convergence de la méthode de Newton appliquée aux systèmes d'équations algébriques. Une constante universelle $h_0 = 0,162434...$ joue un rôle fondamental dans la localisation de « bons points initiaux » de l'itération de Newton. Le calcul d'un disque d'unicité d'une racine et l'étude de la stabilité sont également revus.

A universal constant for the convergence of the Newton Method and application to the classical homotopy method

Abstract – *We give a new theorem concerning the convergence of the Newton method to compute an approximate zero of a system of equations. In this result appears the constant $h_0 = 0.162434...$ which plays a fundamental part in the localization of "good" initial points for the Newton iteration.*

Abridged English Version – In this Note we consider the algebraic system $P(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x)) = 0$ where the $P_i(x)$ are polynomials in $\mathbb{R}^n[x]$ of degree d_i, $1 \leqq i \leqq n$, with $d = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} d_i$.

Denote by $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a multi-index and by $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ with the classical conventions $\binom{k}{\alpha} = k!/\alpha_1! \ldots \alpha_n!$ and $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

For x and y in $\mathbb{R}^n$, we write the Taylor formula $P(y) = P(x) + \sum\limits_{k=1}^{d} (1/k!)\, D^k P(x)(y - x)^k$ where $D^k P(x)(y-x)^k$ is the vector $\left(\sum\limits_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} (\partial^k P_1(x)/\partial x^\alpha)(y-x)^\alpha, \ldots, \sum\limits_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} (\partial^k P_n(x)/\partial x^\alpha)(y-x)^\alpha\right)$. Furthermore $D_\alpha^k P(x)$ is the vector $D_\alpha^k P(x) = (\partial^k P_1(x)/\partial x^\alpha, \ldots, \partial^k P_n(x)/\partial x^\alpha)$. We deal with the max-norm *i.e.* $\|x\| = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$ for $x \in \mathbb{R}^n$ and $|||A||| = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}|$ for a matrix A. The open ball associated to the max-norm is $B_{\max}(x, r)$. Finally consider the quantities:

$$|||D^k P(x)||| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \left| \frac{\partial^k P_i(x)}{\partial x^\alpha} \right|. \tag{0}$$

The main goal of this Note is to show the following theorem.

Theorem 1. – *Let us consider an algebraic system $P(x) = 0$ defined as previously. Let $h_0 = 0.162434\ldots$ be the smallest of polynomial $4h^3 - 12h^2 + 8h - 1$. Let $x^0 \in \mathbb{R}^n$ and $h \in [0, h_0]$ be such that the following inequalities are satisfied:*

$$\frac{1}{k!} |||D^k P(x^0)||| \cdot |||DP(x^0)^{-1}|||^k \, \|P(x^0)\|^{k-1} \leqq h^{k-1}, \qquad 2 \leqq k \leqq d. \tag{1}$$

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

0764-4442/95/03200385 \$ 2.00 © Académie des Sciences

1. *Then the sequence of vectors in* $\mathbb{R}^n$ *defined by* $x^{p+1} = x^p - DP(x^p)^{-1} P(x^p)$ *converges to a simple solution* x^* *of algebraic system* $P(x) = 0$.

2. *Let* $h \in [0, h_0[$. *The convergence of the sequence* x_p *is super-quadradic,* i.e.

$$\| x^{p+1} - x^p \| \leqq a^p (h/a^2)^{2^p - 1} \| x^1 - x^0 \|$$

where $a = 2h_0^2 - 4h_0 + 1 = 0.403031\ldots$ *and* $h/a^2 < 1$.

3. *For* $x \in \mathbb{R}^n$ *let us define the polynomial* $\bar{L}(x, t) = -\| DP(x)^{-1} P(x) \| + t\, L(x, t)$ *where*

$$L(x, t) = 1 - \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \| DP(x)^{-1} D_\alpha^k P(x) \| \right) t^{k-1}.$$

We denote by $l^+(x)$ *and* $l^-(x)$ *the positive roots (when they exist) of the polynomial* $\bar{L}(x, t)$ *and by* $l(x)$ *the positive root of the polynomial* $L(x, t)$. *Then the union of balls* $B_{\max}(x^p, l^+(x^p))$ *for the indices* p *such that* $l(x^*) \geqq l^-(x^p)$ *contains only one solution of algebraic system* $P(x) = 0$ *which is* x^*.

The first application of this result is to use both Newton method and exclusion method studied in [4]. The classical Newton-Kantorovitch theorem concerning the Newton method ([5], [6]) present two disadvantages in the practice. First the conditions for the validity of this theorem are not expressed only in a point x^0. Next the disc of uniqueness of a solution are generally small. In this way the first result concerning the convergence of Newton method with only punctual criterion is given by S. Smale in [9]. More recently, M. Shub and S. Smale have generalized this criterion for the analytic systems in [8]. The technical background and the results developped here are different since the criterion of convergence use the quantities (0) which appears in the exclusion algorithm. After the proof of the main theorem, we give a new result of stability. Next we apply it to the determination of an appropriate discretization of the time intervall in the classical homotopy method.

---

1. Introduction. – L'origine du théorème 1 est le couplage de la méthode de Newton et de la méthode d'exclusion appliquée à la localisation des zéros des systèmes algébriques ayant un nombre fini de solutions. Une étude générale de la méthode d'exclusion est menée dans [2] et [3]. Un algorithme d'exclusion utilise deux ingrédients. Tout d'abord une fonction d'exclusion $m(x)$ définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que la boule $B_{\max}(x, m(x))$ ne contienne aucun zéro du système. Ensuite un algorithme de calcul du complémentaire de la boule $B_{\max}(x, m(x))$ dans l'ensemble V dans lequel on souhaite localiser les zéros du système. Il se trouve que le nombre d'étapes dans cet algorithme augmente quand on s'approche d'un zéro. L'idée est naturelle de tester si les hypothèses du théorème de Newton-Kantorovitch [5] sont vérifiées en un point x tel que $m(x)$ soit petit : ceci a été étudié en [4]. Mais ce théorème présente deux inconvénients dans le contexte d'un algorithme d'exclusion.

1. La validation des hypothèses du théorème de Newton-Kantorovitch consiste à vérifier l'inégalité donnée dans [4], p. 263 pour tout $y \in B_{\max}(x, 2\| DP(x)^{-1} P(x) \|)$. Le théorème 1 remplace cette inégalité non ponctuelle par $d-2$ inégalités ponctuelles qui s'expriment uniquement à l'aide de quantités connues à chaque étape de l'algorithme d'exclusion.

2. La boule d'unicité d'un zéro a pour rayon $2\| DP(x)^{-1} P(x) \|$ dans le théorème de Newton-Kantorovitch : en pratique ce rayon est petit puisque le point initial x est génériquement proche d'un zéro. Le théorème 1 donne un rayon plus grand, ce qui permet

de s'éloigner plus vite d'un zéro une fois qu'il a été approché par quelques itérations de la méthode de Newton.

L'origine des résultats présentés ici est l'article de S. Smale datant de 1981 [9] qui traite le cas d'un polynôme à une variable : les inégalités 1 apparaissent sous la forme $(P^{(k)}(x)\,P(x)^{k-1})/P'(x)^k$ plus petit qu'une quantité non explicite. *Voir* également [7]. Plus récemment, M. Shub et S. Smale ont étudié le cas des systèmes de fonctions analytiques [8]. Le cadre fonctionnel et la technique utilisée ici sont différentes de ceux développé par ces auteurs du fait de la spécificité de l'algorithme d'exclusion. Dans la suite nous donnons le plan de la preuve du théorème 1, le calcul d'un disque d'unicité d'un zéro et un résultat de stabilité. Une application à la détermination du pas de temps dans la méthode d'homotopie classique est également présentée.

2. Plan de la preuve de la convergence. – La preuve de la convergence s'effectue en deux temps. Dans une première partie on établit pour $x^1 = x^0 - DP(x^0)^{-1}\,P(x^0)$ les estimations *a priori* suivantes :

$$\|P(x^1)\| \leqq \sum_{k=2}^{d} h^{k-1}\,\|P(x^0)\| \leqq \frac{h}{1-h}\,\|P(x^0)\|,$$

$$\frac{1}{k!}\,|||D^k P(x^1)||| \leqq \left(\sum_{i=0}^{d-k}\binom{k+i}{i}h^i\right)\frac{h^{k-1}}{|||DP(x^0)^{-1}|||^k\,\|P(x^0)\|^{k-1}},$$

$$|||DP(x^1)^{-1}||| \leqq \frac{|||DP(x^0)^{-1}|||}{1-\displaystyle\sum_{i=1}^{d-1}(i+1)\,h^i}.$$

Elles conduisent à

$$\frac{1}{k!}\,|||D^k P(x^1)|||\cdot|||DP(x^1)^{-1}|||^k\,\|P(x^1)\|^{k-1} \leqq h^{k-1}\left(\frac{h}{1-h}\right)^{k-1}\frac{S_{kd}(h)}{T_d^k(h)},$$
$$2 \leqq k \leqq d,$$

où les polynômes $S_{kd}(h)$ et $T_d(h)$ sont définis par

$$T_d(h) = 1 - \sum_{i=1}^{d-1}(i+1)\,h^i, \qquad S_{kd}(h) = \sum_{i=0}^{d-k}\binom{k+i}{i}h^i.$$

Il est facile de voir que les inégalités (1) sont vérifiées si

$$Y_{kd}(h) = h^{k-1}\,S_{kd}(h) - (1-h)^{k-1}\,T_d^k(h) \leqq 0, \qquad 2 \leqq k \leqq d.$$

La deuxième étape de la preuve consiste à étudier les polynômes $Y_{kd}(h)$ introduits ci-dessus. On montre qu'ils ont une seule racine positive notée y_{kd} dans l'intervalle $]0,\,(2-\sqrt{2})/2[$. De plus, pour $d \geqq 2$, la suite des racines y_{2d} des polynômes $Y_{2d}(h)$ est strictement décroissante et converge vers la plus petite racine h_0 du polynôme $4h^3 - 12h^2 + 8h - 1$. Enfin on a $Y_{kd}(y_{2d}) < 0$ pour tout k, $3 \leqq k \leqq d$. Ainsi on montre un résultat sensiblement plus fort que celui annoncé dans le théorème 1 : à savoir que, pour d fixé, les inégalités (1) sont vérifiées pour $h \in [0,\,y_{2d}]$. Un raisonnement par induction établit alors que la suite $\|P(x^p)\|$ tend vers 0, d'où l'on déduit par continuité la convergence de la suite x^p vers un zéro du système.

3. Plan de la preuve de la complexité. – Le lemme suivant :

Lemme 3.1. – *Soit* $\phi(h) = h/(2h^2 - 4h + 1)$. *Pour* $h \in [0, h_0]$ *nous avons :*

$$h^{k-1}\left(\frac{h}{1-h}\right)^{k-1}\frac{S_{kd}(h)}{T_d^k(h)} \leqq (\phi(h)^2)^{k-1}, \qquad 2 \leqq k \leqq d$$

montre que si les inégalités (1) sont vérifiées en x^0, alors on peut remplacer h par $\phi(h)^2$ dans les inégalités (1) en x^1. Pour cette raison on introduit la suite $\beta_0 = h \in [0, h_0[$, $\beta_p = \phi(\beta_{p-1})^2$. Par induction il vient $\beta_p \leqq a^2(h/a^2)^{2^p}$ où $a = 2h_0 - 4h_0 + 1$ et $h/a^2 < 1$. Deux nouvelles estimations établissent que :

$$|||\, DP(x^p)^{-1}\, DP(x^{p-1})^{-1}\, ||| \leqq \frac{1}{T_d(\beta_{p-1})},$$

et

$$\frac{\|\, DP(x^{p-1})^{-1}\, P(x^p)\, \|}{\|\, DP(x^{p-1})^{-1}\, P(x^{p-1})\, \|} \leqq \frac{\beta_{p-1}}{1-\beta_{p-1}}.$$

On en déduit l'estimation :

$$\begin{aligned}\|\, x^{p+1} - x^p\, \| &= \|\, DP(x^p)^{-1}\, P(x^p)\, \| \\ &\leqq |||\, DP(x^p)^{-1}\, DP(x^{p-1})\, ||| \cdot \|\, DP(x^{p-1})^{-1}\, P(x^p)\, \| \\ &\leqq \frac{1}{T_d(\beta_{p-1})}\,\frac{\beta_{p-1}}{1-\beta_{p-1}}\,\|\, x^p - x^{p-1}\, \|.\end{aligned}$$

L'inégalité $T_d(h) > (1 - 4h + 2h^2)/(1-h)^2$ et la définition de la suite (β_p) nous permettent d'écrire :

$$\|\, x^{p+1} - x^p\, \| \leqq \phi(h_{p-1})(1-h_{p-1})\,\|\, x^p - x^{p-1}\, \| \leqq a\,(h/a^2)^{2^{p-1}}\,\|\, x^p - x^{p-1}\, \|.$$

Ainsi s'achève la preuve de la complexité. Le corollaire suivant est utilisé au paragraphe 6.

Corollaire 3.2. – *Soient* $a = 2h_0^2 - 4h_0 + 1$ *et* $c = (\log a \log(h/a^2)\log 2)^{1/2}$. *Pour tout* $p \geqq 1$ *nous avons* $\|\, x^* - x^p\, \| \leqq c\,(a/\sqrt{2})^{p-1}(h/a^2)^{2^{p-1}-1}\,\|\, x^1 - x^0\, \|$.

4. Plan de la preuve pour le disque d'unicité. – Pour x fixé tel que $DP(x)^{-1}$ existe, les polynômes $L(x, t)$ et $\bar{L}(x, t)$ interviennent de la façon suivante. Considérons un zéro y^* du système. En multipliant la formule de Taylor en x

$$0 = P(x) + DP(x)(y^* - x) + \sum_{k=2}^{d}\frac{1}{k!}\,D^k P(x)(y^* - x)^k$$

par $DP(x)^{-1}$ et en utilisant l'inégalité du triangle il vient $\bar{L}(x, \|\, y^* - x\, \|) \leqq 0$. Le polynôme $L(x, t)$ et $\bar{L}(x, t)$ sont des polynômes concaves pour $t \in [0, \infty[$. Le polynôme $L(x, t)$ a une racine positive $l(x)$, tandis que le polynôme $\bar{L}(x, t)$ en a au plus deux telles que $0 \leqq l^-(x) \leqq l^+(x)$. On montre de plus que les fonctions $l^-(x)$ et $l^+(x)$ sont continues dans un voisinage de tout zéro simple x^* du système et vérifient : $\lim_{x \to x^*} l^+(x) = l(x)$ and $\lim_{x\to x^*} l^-(x) = 0$. Ces propriétés, ajoutées au lemme suivant, permettent de conclure cette partie consacrée au disque d'unicité pour une racine simple.

Lemme 4.1. – x^* *Soit un zéro simple du système. Alors* $\|\, y^* - x^*\, \| \geqq l(x^*)$ *pour tout zéro* $y^* \neq x^*$.

5. Stabilité. – L'étude de la stabilité est le calcul d'un ensemble dans lequel tous les éléments vérifient les inégalités (1). Pour cela introduisons le polynôme de $\mathbb{R}[t]$:

$$R(h, \eta, \omega, t) = \eta(1-t) + t - ((\omega+1)t^2 - 2(\omega+1)t + \omega)^2\, h.$$

Si $h\,\omega^2 \geqq \eta \geqq 0$, on note par $r\,(h,\,\eta,\,\omega)$ la plus petite racine positive de $R\,(h,\,\eta,\,\omega,\,t)$.

THÉORÈME 5.1. – *On considère $h \geqq 0$ et $P\,(x) \in \mathbb{R}^n\,[x]$ tels que les inégalités* (1) *soient satisfaites pour $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit les quantités :*

$$\omega\,(x)^{-1} = \max_{k \geqq 1} \frac{1}{k!}\,|||\,D^k\,P\,(x)\,|||\cdot|||\,DP\,(x)^{-1}\,|||$$

et

$$\eta\,(x) = |||\,DP\,(x)^{-1}\,|||\cdot\|\,P\,(x)\,\|\,\omega\,(x).$$

On suppose $h\,\omega\,(x)^2 \geqq \eta\,(x)$.

Alors les inégalités (1) *sont vérifiées pour tout $y \in B_{\max}\,(x,\,r\,(h,\,\eta,\,\omega))$.*

La preuve de ce théorème est basée sur des estimations *a priori* semblables à celles obtenues au paragraphe 2. La difficulté ici est que : $P\,(x) + DP\,(x)^{-1}\,(y - x) \neq 0$. □

6. APPLICATION À LA MÉTHODE D'HOMOTOPIE CLASSIQUE. – On considère $Q\,(x) = (Q_1\,(x),\,\ldots,\,Q_n\,(x)) \in \mathbb{R}^n\,[x]$ et $H\,(x,\,t) = t\,P\,(x) + (1 - t)\,Q\,(x)$. On travaille avec $D_x\,H\,(x,\,t)$, $D_t\,H\,(x,\,t)$ et les quantités

$$|||\,D_t\,D_x^k\,H\,(x)\,||| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{|\alpha| = k} \binom{k}{\alpha} \left| \frac{\partial^k\,P_i\,(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^k\,Q_i\,(x)}{\partial x^\alpha} \right|.$$

On suppose que le polynôme $Q\,(x)$ est choisi de telle sorte que $D_x\,H\,(x,\,t)^{-1}$ existe pour tout $t \in [0,\,1]$: *voir* [1], lemme 2.1.3. La méthode numérique consiste à utiliser la méthode de Newton pour suivre une courbe $x\,(t)$ solution de $H\,(x\,(t),\,t) = 0$. Schématiquement l'algorithme classique [6], p. 336 est le suivant :

Entrées : $\varepsilon > 0$, $p_0 = 0$, $x^{00} = x(0)$, $t_0 = 0$.
  Étape i : détermination de p_i,
    $x^{i0} = x^{i-1p_{i-1}}$,
    Tant que $k \leqq p_i$ faire $x^{ik+1} = x^{ik} - D_x\,H\,(x^{ik},\,t_i)^{-1}\,H\,(x^{ik},\,t_i)$,
    détermination de t_{i+1},
Test d'arrêt : $t_i \geqq 1$.
Sorties : $x^{i-1p_{i-1}}$ est un zéro approché de $x\,(1)$.

Montrons comment déterminer t_{i+1} à partir de t_i et x^{ip_i}. Pour cela introduisons le polynôme $U\,(h,\,\eta,\,\omega,\,t) = \eta + t - h\,(\omega - t)^2$. Sous la condition $h\,\omega^2 \geqq \eta \geqq 0$, notons $u\,(h,\,\eta,\,\omega)$ sa plus petite racine. Nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 6.1. – *Soient $0 \leqq h \leqq h_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Supposons que les quantités :*

$$\gamma\,(y,\,t_0) = \max\left(\max_{k \geqq 1} \frac{1}{k!}\,|||\,D_x^k\,H\,(y,\,t_0)\,|||,\right.$$
$$\left.\max_{k \geqq 1} \frac{1}{k!}\,|||\,D_t\,D_x^k\,H\,(y,\,t_0)\,|||,\ |||\,D_t\,H\,(y,\,t_0)\,|||\right)$$

$$\omega\,(y,\,t_0)^{-1} = \gamma\,(y,\,t_0)\,|||\,D_x\,H\,(y,\,t_0)^{-1}\,|||,$$
$$(y,\,t_0) = |||\,D_x\,H\,(y,\,t_0)^{-1}\,|||\cdot\|\,H\,(y,\,t_0)\,\|\,\omega\,(y,\,t_0),$$

vérifient $h\,\omega\,(y,\,t_0)^2 \geqq \eta\,(y,\,t_0)$. Si les inégalités (1) *sont vérifiées au point $(y,\,t_0)$, alors les inégalités* (1) *sont vérifiées en tout point $(y,\,t)$ tel que $t \in [t_0,\,t_0 + u\,(h,\,\eta\,(y,\,t_0),\,\omega\,(y,\,t_0))]$.*

Il reste à dire comment on détermine les entiers p_i dans l'algorithme d'homotopie. Le corollaire 3.2 permet de calculer effectivement un entier k_i assurant que $\| x^{ik_i} - x(t_i) \| \leqq \varepsilon$. L'entier p_i est le plus petit entier plus grand que k_i tel que $h\,\omega(x^{ip_i}, t_i)^2 \geqq \eta(x^{ip_i}, t_i)$. Ce test doit être satisfait afin d'être conforme aux hypothèses de la proposition 6.1 à chaque étape de l'algorithme.

Note remise le 23 septembre 1994, acceptée le 9 novembre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. L. ALLGOWER et K. GEORG, *Numerical continuation method: an introduction*, Springer, Berlin, 1990.

[2] J.-P. DEDIEU et J.-C. YAKOUBSOHN, Localisation d'une variété algébrique réelle par l'algorithme d'exclusion, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 312, série I, 1991, p. 1013-1016.

[3] J.-P. DEDIEU et J.-C. YAKOUBSOHN, Localization of an algebraic hypersurface by the exclusion algorithm, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 2, 1992, p. 239-256.

[4] J.-P. DEDIEU et J.-C. YAKOUBSOHN, Two Seminumerical Algorithms for Solving Polynomial Systems, *Preprint*, Toulouse, 1993.

[5] B. DEMIDOVITCH et I. MARDON, *Éléments de calcul numérique*, MIR, Moscou, 1979.

[6] J. M. ORTEGA et W. C. RHEINBOLDT, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Acad. Press, New York, 1970.

[7] M. SHUB et S. SMALE, Computational complexity: on the geometry of polynomials and theory of cost, part I, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4, série 18, 1985, p. 107-142.

[8] M. SHUB et S. SMALE, Complexity of Bezout's theorem, part I: geometric aspects, *J. of the Amer. Soc.*, 6, 1993, p. 459-501.

[9] S. SMALE, The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bull. Amer. Soc.*, NS 13, 1981, p. 1-36.

Laboratoire Approximation et Optimisation, Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France.