C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 433-436, 1989

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Sur un procédé de construction d'algorithmes de calcul approché des racines d'une équation du type $f(x)=0$

Jean-Claude YAKOUBSOHN

Résumé — On utilise le procédé de construction de la méthode de Newton pour déterminer une classe de méthodes itératives et on exhibe à cette occasion, un exemple original de méthode itérative d'ordre trois.

On an algorithm construction method for the computation of roots of equations

Abstract — *We construct a class of iterative methods to solve non linear equations and we give an original example of a third order iterative method.*

I. NOTATIONS. — f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et r un zéro simple de f, c'est-à-dire : $f(r)=0$, $f'(r)\neq 0$. On considère une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g et sa dérivée soient non nulles sur I; u, v et w sont trois fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$ et dont les liens avec la fonction f apparaîtront dans la suite. Afin d'alléger l'écriture de certaines relations, on convient de noter f, u, v, w, etc. au lieu de $f(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, etc. On notera h', h'', $h^{(3)}$, $\ldots$, $h^{(n)}$ les dérivées successives d'une fonction h; en outre, la simple écriture $h^{(n)}$ suppose implicitement que la fonction h est dérivable jusqu'à l'ordre n sur son domaine de définition.

II. INTRODUCTION. — Il est ici question d'algorithmes ou méthodes itératives qui sont définis par la donnée d'une fonction F appelée fonction d'itération de la méthode, et d'une valeur initiale x_0. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \text{ donné}, \qquad x_{n+1}=\mathrm{F}(x_n)$$

est destinée à converger vers une racine de l'équation $f(x)=0$ (Traub [8]). Le point x_0 est calculé par des méthodes d'isolation et de localisation des zéros d'une fonction. Si f est un polynôme, on pourra consulter Dedieu [3]. La construction annoncée dans le titre est basée sur le procédé suivant. Dans une première étape, on calcule pour une valeur fixée de la variable x, A et B solution du système :

$$\mathrm{A}\,g+\mathrm{B}=u$$
$$\mathrm{A}\,g'=v.$$

On obtient $\mathrm{A}=v/g'$ et $\mathrm{B}=u-vg/g'$.

Ceci permet dans un deuxième temps, de définir l'itéré de x, noté $\mathrm{F}(x)$, et donc la fonction d'itération de la méthode par :

R1 $$\mathrm{A}\,g(\mathrm{F})+\mathrm{B}=0$$

R2 $$|\mathrm{F}(x)-x|=\operatorname{Inf}\left\{|y-x| \;\middle|\; y\in g^{-1}\left(g-\frac{u}{v}g'\right)\right\}.$$

Et ceci sous l'hypothèse qui rend le calcul ci-dessus possible :

$$\text{pour tout } x\in\mathrm{I}, \text{ on a } g-\frac{u}{v}g'\in\operatorname{Im} g\cap\mathrm{I}.$$

Note présentée par Jacques ARSAC.

0249-6291/89/03080433 $ 2.00 © Académie des Sciences

L'ordre d'une telle fonction d'itération est donné par la

PROPOSITION 1. — *La fonction d'itération* F *définie par les relations* R1 *et* R2 *est :*

1° *d'ordre* 2 *en* r $[F(r)=r$ *et* $F'(r)=0]$ *si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :*

R3 $$u(r)=0 \quad et \quad v(r)\neq 0$$

R4 $$u'(r)=v(r);$$

dans ce cas, on a au point $x=r$:

$$F''=\frac{-u''+2v'}{v}-\frac{g''}{g'};$$

2° *d'ordre* 3 *en* r $[F(r)=r$ *et* $F'(r)=F''(r)=0]$ *si et seulement si les relations* R3 *et* R4 *sont vérifiées ainsi que :*

R5 $$-g'(r)v(r)+(2v'(r)-u''(r))g'(r)=0;$$

dans ce cas, on a en $x=r$

$$F^{(3)}=\frac{-u^{(3)}+3v''}{v}-\frac{6v'^2}{v^2}+\frac{2u''v'}{v^2}+\left(\frac{6v'}{v}-\frac{3u''}{v}\right)\frac{g''}{g'}-\frac{2g^{(3)}}{g'}.$$

On utilise la relation R1 pour montrer la proposition 1.

On détermine maintenant une classe de fonctions u et v satisfaisant à la proposition 1. D'après Traub [8], p. 98, une fonction d'itération d'ordre m dépend explicitement de f et des $m-1$ premières dérivées de f. On cherche u et v sous la forme de polynômes homogènes en $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$. On a alors la

PROPOSITION 2. — *Soit* $g(x)=x$.

1° *Les polynômes* u *et* v *homogènes de degré* 1 *en* f *et* f' *qui satisfont aux relations* R3 *et* R4 *sont de la forme :*

$$u=u_0 f, \qquad v=v_0 f+u_0 f' \qquad avec \quad u_0\in\mathbb{R}\ et\ v_0\in\mathbb{R}.$$

2° *Les polynômes* u *et* v *homogènes de degré* 2 *en* f, f' *et* f'' *qui satisfont aux relations* R3, R4 *et* R5 *sont de la forme :*

$$u=u_0 f^2+u_1 ff', \qquad v=v_0 f^2+u_0 ff'-\frac{u_1}{2}ff''+u_1 f'^2$$

avec $u_0\in\mathbb{R}$, $u_1\in\mathbb{R}$ *et* $v_0\in r$.

Exemple 1. — Dans le 1 de la proposition 2, en prenant $v_0=0$ et $u_0\neq 0$, on retrouve la fonction d'itération de Newton. Dans le cas 2 en prenant $u_0=0$, $u_1=2$ et $v_0=0$, on retrouve la fonction d'itération de Halley.

Exemple 2. — $g(x)=x^n$, $u=f$ et $v=f'$. On obtient la fonction d'itération d'ordre deux donnée par Burgstalher [1] pour des polynômes.

L'étude de la convergence d'une telle méthode avec des hypothèses adéquates sur les fonctions g, u et v est strictement identique à celles faites par Dieudonné [4], p. 59, et par Ostrowski [7].

III. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE FONCTIONS D'ITÉRATION D'ORDRE 3. — On détermine pour une valeur fixée de la variable x, A, B et C solution du système :

$$\begin{gathered}A g^2+B g+C=u\\ 2A gg'+B g'=v\\ 2A(gg''+g'^2)+B g''=w;\end{gathered}$$

on obtient :

$$2g'^3\,A = g'\,w - g''\,v,\quad 2g'^3\,B = (g'^2 + gg'')\,v - g'\,gw$$
$$2g'^3\,C = 2\,ug'^3 + g^2\,g'\,w - vg\,(2\,g'^2 + gg'').$$

L'itéré de x est défini par :

R6 $$A\,g^2(F) + B\,g(F) + C = 0$$

R7 $$|F(x) - x| = \operatorname{Inf}\{\,|y - x| \mid y \in g^{-1}(H(x))\}$$

où

$$H(x) = \left\{ g - \frac{2\,ug'/v}{1+\sqrt{\Delta}},\ g - \frac{2\,ug'/v}{1-\sqrt{\Delta}} \right\} \quad \text{et} \quad \Delta = 1 - \frac{2\,uw}{v^2} + 2\frac{u}{v}\frac{g''}{g'}.$$

Il faut supposer que $H(x)$ est contenu dans $\operatorname{Im} g \cap I$ et que $\Delta \geqq 0$, pour tout $x \in I$.

PROPOSITION 3. — *La fonction d'itération* F *définie par la relation* R7 *est d'ordre* 3 *si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :*

R8 $$u(r) = 0$$

R9 $$u'(r) = v(r)$$

R10 $$-2\,v(r)\,g''(r) + (u''(r) - 2\,v'(r) + w(r))\,g'(r) = 0.$$

Les calculs établissant la proposition sont effectués à l'aide de la relation R6.

Comme en II, on recherche les fonctions u, v et w sous la forme de polynômes homogènes en $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$ où m est l'ordre de la fonction d'itération. On a la

PROPOSITION 4. — *Soit* $g(x) = x$.

1° *Les polynômes homogènes* u, v *et* w *de degré* 1 *en* f, f' *et* f'' *satisfaisant aux relations* R8, R9 *et* R10 *sont de la forme :*

$$u = u_0\,f, \qquad v = u_0\,f' + v_0\,f, \qquad w = w_0\,f + 2\,v_0\,f' + u_0\,f''$$

où u_0, v_0 *et* w_0 *sont des nombres réels quelconques.*

2° *Les polynômes homogènes* u, v *et* w *de degré* 2 *en* f, f' *et* f'' *satisfaisant aux relations* R8, R9 *et* R10 *sont de la forme :*

$$u = u_0\,f^2 + u_1\,ff' + u_2\,ff''$$
$$v = v_0\,f^2 + v_1\,ff' + v_2\,ff'' + u_1\,f'^2 + u_2\,f'\,f''$$
$$w = w_0\,f^2 + w_1\,ff' + w_2\,ff'' + 2\,(v_1 - u_0)\,f'^2 + (2\,v_2 + u_1)\,f'\,f'' + u_2\,f''^2$$

où u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2, w_0, w_1 *et* w_2 *sont des nombres réels quelconques.*

On étudie plus spécialement les deux exemples suivants :

Exemple 3. — Avec $g(x) = x$, $u = f$, $v = f'$ et $w = f''$. On obtient :

$$F(x) = x - \frac{2\,f/f'}{1 + \sqrt{1 - 2\,ff''/f'^2}}.$$

On retrouve la fonction d'itération de Cauchy [2]. La méthode itérative associée à F est d'ordre 3 : c'est la méthode des paraboles.

On a au point $x = r$: $F^{(3)} = f^{(3)}/f'$. De plus si le produit $f^{(3)}\,f'$ est négatif sur un intervalle contenant une racine, il y a convergence monotone de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la racine de f. On peut enfin remarquer qu'il existe un voisinage d'une racine de f où la quantité $f'^2 - ff''$ est positive.

Voici l'exemple d'une méthode itérative dont les limites d'utilisation sont dues uniquement à la fonction f et à ses dérivées et sans que la fonction d'itération en soit la cause.

Exemple 4. — Avec $g(x)=x$, $u=ff'$, $v=f'^2-ff''$ et $w=-f'f''$; on obtient :

$$F(x)=x-\frac{2ff'}{f'^2-ff''+\sqrt{f'^4+(ff'')^2}}.$$

Cette fonction d'itération est d'ordre trois avec en $x=r$:

$$F^{(3)}=\frac{f^{(3)}}{f'}-\frac{5}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

On peut noter que les valeurs qui annulent la dérivée f' sont des points fixes instables. De plus si la condition :

$$f^{(3)}f'<\left(2+\frac{f'^2}{\sqrt{f'^4+(ff'')^2}-ff''}\right)(f'')^2$$

est réalisée dans un intervalle qui contient une racine, alors il y a convergence monotone de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la racine. Cette condition s'obtient en écrivant : $F'>0$.

Ainsi pour $f(x)=\operatorname{Log} x$, la condition précédente est réalisée et le domaine d'attraction de la racine $x=1$ est $]0, +\infty[$.

Note remise le 28 octobre 1988, acceptée après révision le 21 février 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. BURGSTALHER, An algorithm for solving polynomials equations, *Am. Monthly*, 93, n° 6, 1986, p. 421-430.

[2] A. CAUCHY, Méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes, *Œuvres* 1re série, 4, Gauthier-Villars, Paris, p. 88-98.

[3] J.-P. DEDIEU, Sur le calcul des racines d'un polynôme, *Séminaire Calcul formel et outils algébriques pour la modélisation géométrique*, Paris, 1988.

[4] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris 1968.

[5] H. HALLEY, A new and general method of finding the root of equation, *Phil. Trans. Roy. Society London*, 18, 1964, p. 136.

[6] C. MASSE, L'itération de Newton : convergence et chaos, *Thèse de 3e Cycle*, Grenoble, 1984.

[7] A. OSTROWSKI, *Solutions of equations in Euclidean and Banach spaces*, 3e éd., Academic Press, 1973.

[8] J. F. TRAUB, *Iterative methods for the solutions of equations*, Prentice Hall, 1964.

[9] H. S. WALL, A modification of Newton's method, *Am. Monthly*, 55, 1948, p. 90-94.

Université Paul-Sabatier, U.F.R. Mathématiques, Informatique, Gestion,
118, *route de Narbonne*, 31062 *Toulouse Cedex.*