Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Localisation d'une variété algébrique réelle par l'algorithme d'exclusion

Jean-Pierre DEDIEU et Jean-Claude YAKOUBSOHN

Résumé — Nous décrivons un nouvel algorithme pour localiser une variété algébrique V de $\mathbf{R}^n$. Un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ étant donné, on montre comment déterminer un pavé de $\mathbf{R}^n$ ne contenant aucun point de la variété. A partir de ce résultat, il est possible de construire une suite décroissante d'ensembles fermés dont l'intersection est V. Dans le cas où la variété ne possède pas de point à l'infini, on utilise la notion de cône asymptote pour déterminer un compact contenant la variété. Nous donnons également une version numérique de cet algorithme.

Localization of a real algebraic hypersurface by the exclusion algorithm

Abstract — *We describe a new algorithm for the localization of an algebraic hypersurface* V *in* $\mathbf{R}^n$. *This algorithm computes a decreasing sequence of closed sets whose intersection is* V. *In the particular case of an hypersurface without any point at infinity, the notion of the asymptotic cone is used to determine a compact set containing this hypersurface. We give also a numerical version of this algorithm.*

1. INTRODUCTION. — Soit V une variété algébrique de $\mathbf{R}^n$ définie par son équation $P(x)=0$. Nous étudions ici le problème de la localisation de cette variété dans une région F de $\mathbf{R}^n$. Expliquons l'idée générale de cet algorithme sur un cas élémentaire. Par là même, le nom donné à cet algorithme émergera de façon naturelle. Soit à calculer toutes les racines réelles d'un polynôme à une variable $P(x)$ de degré d. Soit $[-M, M]$ un intervalle contenant les racines réelles de $P(x)$. On considère pour $x\in[-M, M]$ le polynôme

$$M(x, t)=|P(x)|-\sum_{k=1}^{d}\frac{|P^{(k)}(x)|}{k!}t^k$$

qui a une seule racine positive notée ici $m(x)$. On montre que l'intervalle $]x-m(x), x+m(x)[$ ne contient aucune racine de P lorsque x n'est pas une racine. On *exclut* cet intervalle de $[-M, M]$ et l'on recommence le procédé avec un autre point. L'ensemble restant après une infinité de telles étapes est constitué des racines de $P(x)$. Nous généralisons dans la suite la méthode précédente à une variété algébrique V de R^n. Dans les préliminaires nous exposons les propriétés du polynôme $M(x, t)$ et de sa racine positive $m(x)$. Ce polynôme M a été introduit par F. Ronga dans [8] qui a montré le résultat suivant lorsque P est un polynôme de plusieurs variables :

$$(1)\qquad \begin{cases} \textit{Pour tout } x, y\in\mathbf{R}^n \textit{ on a :} \\ P(x)\neq 0 \quad \textit{et} \quad \|x-y\|<m(x) \quad\Rightarrow\quad P(y)\neq 0. \end{cases}$$

Ce résultat est à la base de l'algorithme d'exclusion. Une des étapes importantes est le calcul de la racine $m(x)$. Cette dernière est reliée à $d(x, V)$ par l'intermédiaire de l'inégalité de Łojasiewicz. Le paragraphe 3 est consacré à la description de l'algorithme d'exclusion dans le cas affine : le problème est d'approcher l'intersection d'une variété V et d'un ensemble compact F. On donne une version pratique de l'algorithme d'exclusion lorsque F est un compact semi-algébrique. Dans ce cas l'inégalité de Łojasiewicz permet de calculer la complexité de cet algorithme. Enfin, nous étudions l'algorithme projectif qui

Note présentée par Philippe CIARLET.

0764-4442/91/03121013 $ 2.00 © Académie des Sciences

permet de localiser une variété algébrique compacte sans point à l'infini. Ce nouvel algorithme est construit à partir de l'algorithme d'exclusion dans le cas affine par homogénéisation simultanée du polynôme P et de l'ensemble F. Par ailleurs, il existe d'autres méthodes algorithmiques pour trouver un compact contenant une variété algébrique : Grigor'ev et Vorobjov dans [5] estiment une borne pour les valeurs critiques de la projection de la variété sur une droite générique.

2. Préliminaires. — Posons $x=(x_1, \ldots, x_n)$. On note respectivement par $B(x, r)$, $\|x\|$, et $d(x, y)$, la boule ouverte centrée en x et de rayon r, la norme et la distance correspondant à $\|x\|=\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[x]$ de degré d. Nous considérons le polynôme de $\mathbf{R}[t]$:

$$M(x, t)=|P(x)|-\sum_{k=1}^{d} b_k t^k$$

où les coefficients b_k sont donnés par

$$b_k=\frac{1}{k!}\sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n}\left|\frac{\partial^k P(x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}\right|.$$

Le degré de $M(x, t)$ en t est d. Ce polynôme est concave et décroissant sur $[0, \infty[$ et admet une unique racine positive notée $m(x)$.

Proposition 2.1. — *Nous avons* $m(x)=0$ *si et seulement si* $P(x)=0$. *De plus* x *est un point singulier de* V *si et seulement si* $m(x)=0$ *est une racine de multiplicité supérieure ou égale à* 2 *de* $M(x, t)$.

De [6] ou [7] et du fait que le graphe de m est un ensemble semi-algébrique on déduit la

Proposition 2.2. — *La fonction* $m(x)$ *est continue et semi-algébrique.*

La fonction $m(x)$ mesure la proximité de x à V comme le montre la

Proposition 2.3. — *Soit* F *un compact de* $\mathbf{R}^n$ *non contenu dans* V. *Nous avons :*

$$c_1|P(x)| \leq m(x) \leq c_2|P(x)|^{1/d},$$

pour tout $x \in F$, *avec*

$$c_1^{-1}=\max_{x \in F}\left(\sum_{k=1}^{d} b_k b_d^{(1-k)/d}|P(x)|^{(k-1)/d}\right) \quad et \quad c_2=b_d^{-1/d}.$$

On reconnaît là une forme effective de l'inégalité de Łojasiewicz ([1], corollaire 2.6.7) appliquée à m et P. Cette même inégalité s'écrit dans le cas où F est un semi-algébrique compact et en considérant $m(x)$ et $d(x, V)$:

$$a_1 d(x, V)^{n_1} \leq m(x) \leq a_2 d(x, V)^{1/n_2} \tag{2}$$

avec a_1, a_2 des réels strictement positifs et n_1, n_2 des entiers non nuls. Une estimation pour les entiers n_1 et n_2 a été obtenue par P. Solerno dans [9].

3. L'algorithme d'exclusion dans le cas affine. — Soit F un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$. On considère deux suites de réels positifs (r_p) et (ε_p) telles que $\lim_{p \to \infty} r_p=\lim_{p \to \infty} \varepsilon_p=0$ et

l'on construit une suite d'ensembles compacts F_p de la façon suivante :

Étape 0. — On pose $F_0 = F$.

Étape p. — On choisit n_p points $x_i^p \in \mathbf{R}^n$, $1 \leqq i \leqq n_p$ tels que

$$F_{p-1} \subset \bigcup_{1 \leqq i \leqq n_p} B(x_i^p, r_p).$$

L'entier n_p est fini puisque F_{p-1} est compact. Pour chaque i, $1 \leqq i \leqq n_p$, quand $P(x_i^p) \neq 0$, on calcule une approximation s_i^p de $m_i^p = m(x_i^p)$ satisfaisant $m_i^p - \varepsilon_p \leqq s_i^p \leqq m_i^p$. Notons par B_i^p l'ensemble $B(x_i^p, s_i^p)$ si $P(x_i^p) \neq 0$, et $\varnothing$ sinon. On définit $F_p = F_{p-1} \setminus \bigcup_{1 \leqq i \leqq n_p} B_i^p$.

Test d'arrêt. — Cet algorithme s'arrête lorsque $F_p = \varnothing$.

Le résultat 1 dû à Ronga [8] implique que $B_i^p \cap V = \varnothing$. Ce fait est la base du

THÉORÈME 3.1. — *La suite* (F_p) *est décroissante et* $\bigcap_{p \geqq 0} F_p = F \cap V$.

Il s'ensuit que l'algorithme d'exclusion s'arrête si et seulement $F \cap V = \varnothing$.

PROPOSITION 3.2. — *Toujours sous l'hypothèse* $F \cap V = \varnothing$ *et si* F *est un semi-algébrique compact avec* $r_p = \varepsilon_p = 1/p$, *on a* $F_p = \varnothing$ *à l'étape* $p \geqq 2/a_1 \, d(F, V)^{n_1}$, *où* a_1 *et* n_1 *sont les constantes de l'inégalité* (2).

Si F est un semi-algébrique compact, voici une version pratique de cet algorithme. Soient p un entier et n_p points $x_i^p \in \mathbf{R}^n$ tels que $F \subset \bigcup_{1 \leqq i \leqq n_p} B(x_i^p, 1/p)$. Après calcul pour chaque i d'une approximation s_i^p de $m(x_i^p)$, l'ensemble $V_p = F \setminus \bigcup_{1 \leqq i \leqq n_p} E_i^p$ est une approximation de $V \cap F$ où E_i^p est l'ensemble $B(x_i^p, s_i^p)$ si $s_i^p \geqq 1/p$ et $\varnothing$ sinon. Plus précisément on a le

THÉORÈME 3.3. — *Pour chaque* $x \in V_p$, *on a* $d(x, V) < (1 + (2a_1^{-1})^{1/n_1})/p^{1/n_1}$ *où* a_1 *et* n_1 *sont les constantes de l'inégalité* (2).

Le nombre d'étapes p nécessaires pour obtenir une précision ε sur $d(V_p, V)$ est borné inférieurement par $((1 + (2a_1^{-1})^{1/n_1})/\varepsilon)^{n_1}$. Dans ce cas $n_p \simeq (p/2)^n \mathrm{Vol}(F)$. Pour chaque i, $1 \leqq i \leqq n_p$, nous avons à calculer les coefficients de $M(x_i^p, t)$, l'approximation s_i^p de $m(x_i^p)$ et à éprouver $s_i^p \geqq 1/p$.

4. L'ALGORITHME D'EXCLUSION DANS LE CAS PROJECTIF. — On se propose de trouver un compact contenant la variété dans le cas où celle-ci n'a pas de point à l'infini. Pour ce faire on se place dans le cadre projectif : l'algorithme d'exclusion dans le cas projectif est l'algorithme dans le cas affine appliqué au polynôme $P^*(0, x)$ et à l'ensemble $F_\infty \cap S(0, 1)$ où $S(0, 1)$ est la sphère unité pour la norme du max et où $P^*(0, x)$ et F_∞ sont obtenus respectivement à partir de P et F par un procédé d'homogénéisation décrit ci-dessous. On homogénéise le polynôme P en considérant $P^*(x_0, x) = x_0^d P(x/x_0)$, où $(x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. On note $M^*(x_0, x, t)$ le polynôme associé à P^* et $m^*(x)$ sa racine positive. Le résultat 1 devient :

PROPOSITION 4.1. — *Soit* x *tel que* $P^*(0, x) \neq 0$; *alors nous avons* $P(y) \neq 0$ *pour tout* $y = (x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n)/h_0$ *avec* $\max_{0 \leqq i \leqq n} |h_i| < m^*(0, x)$ *et* $h_0 \neq 0$. *De plus* $P^*(0, z) \neq 0$ *pour tout* $z = (x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n)$ *avec* $\max_{1 \leqq i \leqq n} |h_i| < m^*(0, x)$ *et* $z \neq 0$.

Pour homogénéiser l'ensemble F, on utilise la notion de cône asymptote introduite par G. Choquet [2], généralisée par J.-P. Dedieu ([3], [4]). On note $F_\infty = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{]0, \varepsilon[\, F}$, le cône asymptote de F et $V_{\inf}=\{x\in\mathbf{R}^n : P^*(0, x)=0\}$. On signale que l'inclusion $V_\infty \subset V_{\inf}$ peut être stricte. Décrivons maintenant l'algorithme d'exclusion projectif.

Étape 0. — On pose $G_0=F_\infty \cap S(0, 1)$ et $L_0=F$.

Étape p. — On choisit n_p points x_i^p, $1\leq i\leq n_p$ tels que $G_{p-1}\subset \bigcup_{1\leq i\leq n_p} B(x_i^p, r_p)$.

Si $P^*(0, x_i^p)\neq 0$, on calcule s_i^p une approximation $m^*(0, x_i^p)$.

On définit les ensembles $K_i^p=\{x_i^p+h\in\mathbf{R}^n : \max_{1\leq i\leq n} |h_i|<s_i^p\}$ et

$$N_i^p=\left\{\frac{x_i^p+h}{h_0}\in\mathbf{R}^n : \max_{0\leq i\leq n} |h_i|<s_i^p,\ h_0\neq 0\right\} \quad \text{si} \quad P^*(0,x_i^p)\neq 0 \quad \text{et} \quad \varnothing \text{ sinon.}$$

Les ensembles G_p et L_p sont donnés par

$$G_p=G_{p-1}\setminus \bigcup_{1\leq i\leq n_p} K_i^p, \qquad \text{et} \qquad L_p=L_{p-1}\setminus \bigcup_{1\leq i\leq n_p} N_i^p.$$

Test d'arrêt. — Cet algorithme s'arrête lorsque $G_p=\varnothing$.

THÉORÈME 4.2. — *Nous avons*

$$\bigcap_{p\geq 0} G_p=F_\infty \cap S(0,1)\cap V_{\inf} \qquad \textit{et} \qquad \left(\bigcap_{p\geq 0} L_p\right)_\infty \subset F_\infty \cap V_{\inf}.$$

En conséquence cet algorithme s'arrête en un nombre fini d'étapes si et seulement si $F_\infty \cap V_{\inf}=\{0\}$. Dans ce cas l'ensemble $\bigcap L_p$ est compact et contient $F\cap V$.

Note remise le 4 octobre 1990, acceptée après révision le 9 avril 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. BOCHNAK, M. COSTE et M.-F. ROY, *Géométrie algébrique réelle*, Springer Verlag, 1987.

[2] G. CHOQUET, Ensembles et cônes convexes faiblement complets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 254, 1962, p. 1908-1910 et p. 2123-2125.

[3] J.-P. DEDIEU, Cônes asymptotes d'ensembles non convexes, *Bulletin S.M.F., Mémoire* 60, 1979, p. 31-44.

[4] J.-P. DEDIEU, Critère de fermeture pour l'image d'un fermé non convexe par une multiapplication, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 287, série A, 1978, p. 941-943.

[5] D. Yu. GRIGOR'EV et N. N. VOROBJOV Jr, Solving systems of polynomial inequalities in subexponential time, *J. Symbolic Computation*, 5, 1988, p. 37-64.

[6] A. S. HOUSEHOLDER, *The numerical treatment of a single nonlinear equation*, MacGraw Hill Inc., 1970.

[7] A. OSTROWSKI, Sur la continuité relative des racines des équations algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 209, 1939, p. 777-779.

[8] F. RONGA, *Connecting points in the complement of a smooth hypersurface of* R^n, Preprint, 1989, Université de Genève, Section de Mathématiques, 2-4, rue du lièvre, Genève, Suisse.

[9] P. SOLERNO, *Une inégalité de Łojasiewicz effective*, Preprint, 1989, I.A.M., Viamonte, 1636, (1055), Buenos Aires, Argentina.

Laboratoire d'Analyse numérique, Université Paul-Sabatier,
118, *route de Narbonne*, 31062 *Toulouse Cedex*.