Algèbres simpliciales S^1-équivariantes et théorie de de Rham

Bertrand Toën
Laboratoire Emile Picard
Université Paul Sabatier, Bat 1R2 31062 Toulouse Cedex 9
France

Gabriele Vezzosi
Dipartimento di Matematica Applicata "G. Sansone"
Università di Firenze
Italy

Avril 2009

Résumé

Ce travail accompagne [To-Ve4] et a pour objectif de fournir de plus amples détails sur la comparaison entre fonctions sur les espaces des lacets dérivés et théorie de de Rham. Pour une k-algèbre commutative A, lisse sur k de caractéristique nulle, nous montrons que deux objets $S^1 \otimes A$ et $\epsilon(A)$ se déterminent mutuellement, et ce fonctoriellement en A. L'objet $S^1 \otimes A$ est la k-algèbre simpliciale S^1-équivariante obtenue en tensorisant A par le groupe simplicial $S^1 := B\mathbb{Z}$. L'objet $\epsilon(A)$ est l'algèbre de de Rham de A, munie de la différentielle de de Rham et considérée comme une *ϵ-dg-algèbre* (i.e. une algèbre dans une certaine catégorie monoïdale de $k[\epsilon]$-dg-modules, où $k[\epsilon] := H_*(S^1, k)$). Nous construisons une équivalence ϕ, entre la théorie homotopique des k-algèbres simpliciales S^1-équivariantes et celle des ϵ-dg-algèbres, et nous montrons l'existence d'une équivalence fonctorielle $\phi(S^1 \otimes A) \sim \epsilon(A)$. Nous déduisons de cela la comparaison annoncée, identifiant les fonctions S^1-équivariantes sur LX, l'espace des lacets dérivé d'un k-schéma X lisse, et la cohomologie de de Rham algébrique de X/k. Nous déduisons aussi des versions fonctorielles et multiplicatives des théorèmes de décomposition de l'homologie de Hochschild (du type HKR), pour des k-schémas séparés quelconques.

Introduction

Dans ce travail nous comparons la théorie des fonctions sur l'espace des lacets dérivés d'un schéma de caractéristique nulle X, au sens de la géométrie algébrique dérivée (voir [To, To-Ve3, To-Ve4]), avec sa théorie de de Rham. Cette comparaison est annoncée dans [Ben-Nad] ainsi que dans notre récent travail [To-Ve4], et semble découler d'une comparaison plus générale, mais encore conjecturale, entre fonctions sur les espaces de lacets dérivés et homologie cyclique. Dans ce travail nous établirons cette comparaison avec la théorie de de Rham de manière directe, sans avoir à passer par l'homologie cyclique. Une conséquence intéressante de cette approche directe est de fournir de nouvelles preuves, et une nouvelle compréhension, des théorèmes HKR pour les schémas (dans le style de [Ye, Sch]).

Soit k un anneau commutatif de caractéristique nulle et A une k-algèbre lisse sur k. Le schéma dérivé des lacets de $X = \mathrm{Spec}\, A$ est par définition $LX := \mathbb{R}Map(S^1, X)$, où $S^1 := B\mathbb{Z}$ est considéré comme un groupe simplicial (voir [Ben-Nad, To, To-Ve4] pour les détails). Au niveau des anneaux de fonctions LX est le spectre de la k-algèbre commutative simpliciale $S^1 \otimes A$, où l'on utilise ici l'enrichissement simplicial naturel de la catégorie des k-algèbres simpliciales commutatives. Ainsi, le problème qui consiste à comparer les fonctions sur LX et la théorie de de Rham de X se résume de manière purement algébrique à étudier les relations entre $S^1 \otimes A$ et l'algèbre de de Rham de A/k. Le résultat principal de ce travail affirme que la donnée de $S^1 \otimes A$, muni de son action naturelle de S^1, est équivalente, à homotopie près, à la donnée de l'algèbre de de Rham de A/k, munie de sa différentielle de de Rham.

Afin de donner un énoncé plus précis considérons $DR(A) = Sym_A(\Omega^1_{A/k}[1])$ l'algèbre de de Rham de A/k, pour laquelle Ω^n_A est placé en degré $-n$. Muni de la différentielle nulle $DR(A)$ devient une k-dg-algèbre commutative (*cdga* pour faire court). De plus, la différentielle de de Rham muni cette cdga d'une structure additionelle, à savoir celle d'une $\epsilon - cdga$, c'est à dire d'une opération de degré -1, $\epsilon : DR(A) \longrightarrow DR(A)[1]$, satisfaisant la règle de Liebniz (au sens gradué) par rapport à la multiplication dans $DR(A)$ (voir §1 pour la définition précise de $\epsilon - cdga$). Cette $\epsilon - cdga$ sera notée $\epsilon(A)$. D'autre part, on peut aussi former $S^1 \otimes A$, la k-algèbre commutative simpliciale obtenue en tensorisant A par le groupe simplicial $S^1 = B\mathbb{Z}$. L'objet $S^1 \otimes A$ est naturellement muni d'une action du groupe simplicial S^1, qui opère sur lui-même par translations, et est donc un objet de $S^1 - sk - CAlg$, la catégorie des k-algèbres simpliciales commutatives S^1-équivariantes. Notre théorème principal (voir 3.1) peut alors s'énoncer de la façon suivante.

Théorème 0.1 *Il existe une équivalence, ϕ, de la théorie homotopique $S^1 - sk - CAlg$ vers la théorie homotopique $\epsilon - cdga$, qui est telle que pour tout k-algèbre commutative lisse A il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\epsilon(A) \simeq \phi(S^1 \otimes A).$$

La notion d'*équivalence de théorie homotopique* utilisée dans le théorème précédent sera pour nous une équivalence de dérivateurs au sens de Grothendieck (voir [Gr]). Ainsi, le théorème 0.1 nous dit que pour toute petite catégorie I, il existe une équivalence de catégories homotopiques de diagrammes

$$\phi_I : Ho(S^1 - sk - CAlg^I) \longrightarrow Ho(\epsilon - cdga^I),$$

fonctorielle en I. De plus, pour tout I-diagramme de k-algèbres commutatives lisses A, il existe un isomorphisme dans $Ho(\epsilon - cdga^I)$

$$\phi(S^1 \otimes A) \simeq \epsilon(A),$$

qui est non seulement fonctoriel en A, mais aussi en I. Le théorème 0.1 sera en réalité une conséquence d'un résultat plus général, valable pour toute k-algèbre commutative simpliciale A, affirmant l'existence d'une équivalence

$$\mathbb{L}\epsilon(N(A)) \simeq \phi(S^1 \otimes^{\mathbb{L}} A),$$

où $N(A)$ est la *cdga* obtenue par normalisation à partir de A, et $\mathbb{L}\epsilon$ et $S^1 \otimes^{\mathbb{L}} -$ sont des versions dérivées des constructions ϵ et $S^1 \otimes -$.

Un corollaire important, et immédiat, de notre théorème principal est la version suivante du théorème HKR.

Corollaire 0.2 *Soit X un k-schéma séparé. Alors, il existe un isomorphisme naturel dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-dg-algèbres commutatives*

$$Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/k}[1]) \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X,$$

où $\mathbb{L}_{X/k}$ est le complexe cotangent de [Il]. En particulier, si X est lisse sur k on a

$$Sym_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}[1]) \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X.$$

Il faut noter ici que ce corollaire redonne les résultats de [Ye] et [Sch]. Il les améliore aussi car nos isomorphismes sont *multiplicatifs*. Il n'est d'ailleurs pas tout à fait clair que les isomorphismes de 0.2 soient les mêmes que ceux de [Sch, Ye].

Pour finir cette introduction, deux mots concernant la stratégie de la preuve du théorème 0.1 et les difficultés que nous avons rencontrées. Il faut en fait remarquer que le point crucial est la construction de l'équivalence ϕ. En effet, par définition, $S^1 \otimes A$ est *la k-algèbre simpliciale S^1-équivariante libre sur A*. De même, nous montrons (voir proposition 1.4) que $\epsilon(A)$ est *la $\epsilon - cdga$ libre sur A*. Ainsi, une fois l'équivalence ϕ construite on déduit l'existence d'un isomorphisme naturel $\epsilon(A) \simeq \phi(S^1 \otimes A)$ formellement, par propriété universelle de ces deux objets: il suffit en effet que ϕ soit compatible avec certains foncteurs qui oubient d'une part l'action de S^1 et d'autre part la ϵ-structure. La construction d'une telle équivalence ϕ est donnée dans notre §2 et se révèle plus compliquée que nous le croyions d'abord. En effet, il se trouve que nous n'avons pas trouvé d'approches directes reliant les théories homotopiques $S^1 - sk - CAlg$ et $\epsilon - cdga$, et notre construction de ϕ passe par une chaine relativement longue d'équivalences de Quillen entre plusieurs catégories de modèles auxiliaires. C'est pour cette raison que nous avons choisi de formuler cette construction dans le contexte des dérivateurs de Grothendieck, qui est relativement efficace afin de ne pas avoir à trainer d'interminables chaines d'équivalences fonctorielles. Il est possible cependant, qu'un approche plus directe existe, et nous prétendons simplement ne pas l'avoir vue. A ce sujet, nous faisons remarquer qu'il existe d'une part une équivalence de Quillen $N : sk - CAlg \longrightarrow cdga$, entre k-algèbres simpliciales commutatives et *cdga*, induite par le foncteur de normalisation de la correspondance de Dold-Kan (voir [Sc-Sh]). D'autre part, il existe aussi une équivalence de Quillen $N : S^1 - sk - Mod \longrightarrow k[\epsilon] - dg - mod$, entre les k-modules simpliciaux S^1-équivariants et les $k[\epsilon]$-dg-modules (ici $k[\epsilon] = H_*(S^1, k)$), qui elle aussi est induite par normalisation. Cependant, ces deux équivalences de Quillen ne semblent pas se promouvoir en une équivalence de Quillen $N : S^1 - sk - CAlg \longrightarrow \epsilon - cdga$, induite par le simple foncteur de normalisation. L'obstruction à l'existence d'un tel foncteur de normalisation provient du fait que $N : S^1 - sk - Mod \longrightarrow k[\epsilon] - dg - mod$ n'est pas compatible avec les structures monoïdales de ces deux catégories (qui sont induites par les produits tensoriels sur k et utilisent donc des structures de type co-algèbre pour être définies), même pas en un sens *lax* de [Sc-Sh]. Le mophisme *shulffle* $N(E) \otimes N(F) \longrightarrow N(E \otimes F)$ n'est simplement pas un morphisme de $k[\epsilon]$-dg-modules. Ainsi, pour $A \in S^1 - sk - CAlg$, $N(A)$ possède bien une structure de *cdga* d'une part, et une structure de $k[\epsilon]$-dg-module d'autre part, mais ces deux structures ne vérifient pas les conditions de compatibilité pour faire de $N(A)$ une $\epsilon - cdga$. Cela dit, il est intéressant de remarquer que notre équivalence ϕ sera probablement considérée par les spécialistes comme *bien connue*, et tel fût bien notre sentiment en écrivant ce travail que nous ne faisions que mettre par écrit une succession de faits plus ou moins *évidents*, ou tout au moins *folkloriques*. Nous avons, de ce fait, été surpris par les conséquences de notre théorème principal, à savoir la version fonctorielle et multiplicative des isomorphismes HKR (voir 3.2), isomorphismes certes bien connus (voir par exemple [Lo, Sch, Ye]), mais n'ayant pas la réputation de faits *triviaux*, particulièrement pour les versions globales valables sur des schémas. La nouveauté dans notre approche est de ne pas oublier que le complexe de Hochschild (d'une k-algèbre commutative ou d'un k-schéma) est muni de deux structures additionnelles, une multiplication et une action de S^1 (l'utilisation de la structure multiplicative sur le complexe de Hochschild est clairement présente dans [Sch]). C'est l'existence de ces deux structures qui permet le lien naturel avec le théorie de de Rham, et cela de manière essentiellement unique car ce lien est déduit de propriétés universelles.

Remerciements: Nous remercions M. Hoyois qui a attiré notre attention sur le fait que la comparaison, annoncée dans [Ben-Nad, To-Ve3, To-Ve4], entre fonctions sur les espaces de lacets dérivés et homologie cyclique était probablement plus subtile que nous le prétendions. Ce travail ne répond pas directement à cette problématique. Il montre cependant que l'on peut directement obtenir une comparaison avec la théorie de de Rham sans passer par l'homologie cyclique, ce qui suffit pour les besoins de [To-Ve3, To-Ve4] (et aussi visiblement de [Ben-Nad]).

Notations: Tout au long de cet article k désigne un anneau commutatif *de caractéristique nulle*. Les complexes de k-modules seront homologiquement indicés et tous concentrés en degrés négatifs par convention. La catégorie des complexes de k-modules, concentrés en degrés négatifs, sera notée $C(k)$. Pour une k-dg-algèbre B (concentrée en degrés négatifs d'après nos conventions) on note $B - dg - mod$ la catégorie des B-dg-modules à gauche (de même, concentrés en degrés négatifs). Cette catégorie est munie d'une structure de catégorie de modèles pour laquelle les équivalences sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les morphismes surjectifs en degrés strictement négatifs. Nous noterons aussi *cdga* la catégorie des k-dg-algèbres commutatives (toujours en degrés négatifs), que nous munirons de sa structure de modèles standard pour la quelle les équivalences sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les morphismes surjectifs en degrés strictement négatifs (voir [Bo-Gu, Hi]). Nous utiliserons implicitement que le foncteur de normalisation induit une équivalence entre la catégorie homotopique des k-algèbres simpliciales commutatives et la catégorie homotopique de *cdga*. Les techniques de [Sc-Sh] impliquent que le foncteur de normalisation est alors l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen.

Nous noterons $S^1 := B\mathbb{Z}$ l'ensemble simplicial classifiant du groupe abélien $\mathbb{Z}$, que nous considérerons toujours comme une groupe abélien simplicial. En tant que groupe simplicial, S^1 peut opérer sur tout objet dans une catégorie simplicialement enrichie, et en particulier dans une catégorie de modèles simpliciales M. Les objets S^1-équivariants dans une telle catégorie de modèles M forment une catégorie notés $S^1 - M$.

Nous utiliserons le langage, et des notions de bases, de la théorie de dérivateurs de Grothendieck (voir par exemple [Gr]). Le dérivateur associé à une catégorie de modèles M sera noté $\mathbb{D}(M)$. Pour une sous-catégorie pleine M_0 d'une catégorie de modèles M, stable par équivalences, nous noterons $\mathbb{D}(M_0)$ le sous-dérivateur plein de $\mathbb{D}(M)$ formé des objets de M_0. Toute adjonction de Quillen

$$g : M \longrightarrow N \qquad M \longleftarrow N : f$$

induit une adjonction dans la 2-catégorie des dérivateurs

$$\mathbb{L}g : \mathbb{D}(M) \longrightarrow \mathbb{D}(N) \qquad \mathbb{D}(M) \longleftarrow \mathbb{D}(N) : \mathbb{R}f.$$

L'expression *diagramme 2-commutatif de dérivateurs* fera référence à la donné d'un diagramme de 1-morphismes munis de toutes les 2-isomorphismes de cohérences nécessaires. Ainsi, un carré 2-commutatif est la donnée non pas de quatre 1-morphismes, mais bien de quatre 1-morphismes et un 2-isomorphisme entre les deux compositions possibles.

Finalement, nous utiliserons aussi la notion de $\mathbb{S}$-catégorie pour laquelle nous renvoyons à [Be] (et à [To-Ve4, §1] pour des propriétés plus avancées).

1 Les ϵ-dg-algèbres

On considère la k-dg-algèbre $k[\epsilon]$, librement engendrée par un élément ϵ en degré -1 et avec la relation $\epsilon^2 = 0$. La k-algèbre sous-jacente est $k[X]/X^2$, avec $deg(X) = -1$, et est munie de la différentielle nulle.

Définition 1.1 *La* catégorie des ϵ-dg-modules *est la catégorie $k[\epsilon] - dg - mod$, des $k[\epsilon]$-dg-modules à gauche. Elle sera notée $\epsilon - dg - mod$.*

On remarque que $\epsilon - dg - mod$ n'est autre que la catégorie des complexes mixtes négativement gradués (au sens de [Lo] par exemple).

On munit $\epsilon - dg - mod$ de sa structure de modèles usuelle où les équivalences sont les quasi-isomorphismes de complexes sous-jacents, et les fibrations sont les morphismes surjectifs en degrés strictement négatifs. La catégorie $\epsilon - dg - mod$ est munie d'une structure monoïdale symétrique induite par le produit tensoriel de complexes de k-modules. Plus précisément, pour M et N deux ϵ-dg-modules on définit une structure de ϵ-dg-module sur le complexe $M \otimes_k N$ de la façon suivante. Le complexe $M \otimes_k N$ est naturellement muni d'une structure de $k[\epsilon] \otimes_k k[\epsilon]$-dg-module à gauche. On considère alors le morphisme de k-dg-algèbres

$$k[\epsilon] \longrightarrow k[\epsilon] \otimes_k k[\epsilon]$$

qui envoie ϵ sur $\epsilon \otimes 1 + 1 \otimes \epsilon$. A travers ce morphisme $M \otimes_k N$ est muni d'une structure de ϵ-dg-module. On vérifie alors que les contraintes d'associativité, de symétrie et d'unité du produit tensoriel de complexes induisent des contraintes d'associativité, de symétrie et d'unité pour la structure monoïdale ainsi construite sur $\epsilon - dg - mod$. La catégorie $\epsilon - dg - mod$ est ainsi munie d'une structure monoïdale symétrique que nous noterons simplement $\otimes$.

Définition 1.2 *La* catégorie des ϵ-dg-algèbres commutatives *est la catégorie des monoïdes associatifs, commutatifs et unitaires dans la catégorie monodïdale $(\epsilon - dg - mod, \otimes)$. Elle sera notée $\epsilon - cdga$.*

En d'autres termes, un objet de $\epsilon - cdga$ consiste en une k-dg-algèbre commutative A, munie d'un morphisme de complexes de k-modules $\epsilon : A \longrightarrow A[1]$, tel que pour tout a, b, éléments de A, de degrés respectifs n et m, on ait

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)b + (-1)^n a\epsilon(b).$$

Nous allons maintenant munir $\epsilon - cdga$ d'une structure de catégorie de modèles. Pour cela, nous considérons le foncteur d'oubli

$$\epsilon - cdga \longrightarrow C(k),$$

et nous définissons les équivalences (resp. les fibrations) dans $\epsilon - cdga$ comme les morphismes induisant des équivalences (resp. des fibrations) dans $C(k)$. Ainsi, une équivalence dans $\epsilon - cdga$ est un morphisme induisant un quasi-isomorphisme sur le complexes sous-jacent. De même, une fibration dans $\epsilon - cdga$ est un morphisme qui est surjectif en tout degré strictement négatif.
Ce foncteur d'oubli possède un adjoint à gauche. En effet, il est facile de voir que le foncteur d'oubli commute à tout type de limites ainsi qu'aux colimites filtrantes. Comme les catégories $\epsilon - cdga$ et $cdga$ sont des catégories localement présentables, l'existence d'un adjoint à gauche est assurée par le théorème d'existence de Freyd. Nous noterons

$$\epsilon : cdga \longrightarrow \epsilon - cdga$$

l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli, dont nous allons maintenant donner une construction plus explicite. Soit $A \in cdga$, et notons Ω^1_A le A-dg-module coreprésentant le foncteur des dérivations (au sens dg). Ce A-dg-module est librement engendré sur A par des symbôles $\partial(a)$, avec $a \in A$, $deg(\partial(a)) = deg(a)$, et avec les relations

$$\partial(ab) = (-1)^{deg(a).deg(b)} b\partial(a) + (-1)^{deg(a)} a\partial(b).$$

On note $DR(A)$ la A-dg-algèbre commutative libre sur $\Omega^1_A[1]$

$$DR(A) := \oplus_n (\Omega^1_A[1])^{\otimes_A n}/\Sigma_n.$$

On munit enfin cette $cdga$ d'une ϵ-structure en décrétant que

$$\epsilon : A \subset DR(A) \longrightarrow \Omega^1_A \subset DR(A)[-1]$$

est la dérivation universelle $a \mapsto \partial(a)$, et en prolongeant par multiplicativité. La k-dg-algèbre commutative, munie de ϵ, est un objet de $\epsilon - cdga$ noté $\epsilon(A)$. De plus, la $cdga$ sous-jacente à $\epsilon(A)$ est $DR(A)$, et le morphisme naturel $A \longrightarrow DR(A)$ induit une bijection

$$Hom_{\epsilon-cdga}(DR(A), B) \longrightarrow Hom_{cdga}(DR(A), B) \longrightarrow Hom_{cdga}(A, B).$$

Ainsi, $A \mapsto \epsilon(A)$ est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli.

Proposition 1.3 *Les notions ci-dessus de fibrations et d'équivalences munissent $\epsilon - cdga$ d'une structure de catégorie de modèles. De plus, le foncteur d'oubli $\epsilon - cdga \longrightarrow cdga$ est de Quillen à droite.*

Preuve: Il s'agit de relever la structure de modèles sur $cdga$ le long du foncteur d'oubli $\epsilon - cdga \longrightarrow cdga$.
Notons I_0 et J_0 des ensembles générateurs de cofibrations et cofibrations triviales dans $cdga$. On définit $I := \epsilon(I_0)$, l'image de I_0 par le foncteur ϵ. De même, on pose $J := \epsilon(J_0)$. On applique alors le théorème 2.1.19 de [Ho]. Comme le foncteur d'oubli $\epsilon - cdga \longrightarrow cdga$ reflète les limites, les colimites, les fibrations et les équivalences, on voit que pour vérifier les conditions de ce théorème il suffit de montrer que $J \subset W$. D'après la construction explicite du foncteur ϵ que nous avons donné précédemment on voit qu'il suffit de montrer que $A \mapsto \Omega^1_A$ (en tant que foncteur $cdga \longrightarrow C(k)$) transforme cofibrations triviales en quasi-isomorphismes. Pour cela il suffit de montrer que pour $A \longrightarrow B$ une cofibration triviale de $cdga$, le morphisme induit

$$\Omega^1_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_B$$

est une cofibration triviale de B-dg-modules. Pour cela, donnons nous un diagramme commutatif de B-dg-modules

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_A \otimes_A B & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^1_B & \longrightarrow & N, \end{array}$$

avec $M \longrightarrow N$ une fibration. Par propriété universelle des dg-modules Ω^1, on voit que ce diagramme correspond à un diagramme commutatif dans $cdga/B$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \oplus M \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \oplus N, \end{array}$$

où $B \oplus E$ est l'extension de carré nulle triviale de B par le dg-module E. Comme $A \longrightarrow B$ est une cofibration triviale et que $B \oplus M \longrightarrow B \oplus N$ est une fibration, il existe $B \longrightarrow B \oplus M$ un relèvement dans $cdga/B$. Par adjonction on voit que cela implique l'existence d'un relèvement $\Omega^1_B \longrightarrow M$ de B-dg-modules. Ceci montre donc que $\Omega^1_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_B$ relève les fibrations et donc est une cofibration triviale. En particulier, le morphisme $\Omega^1_A \longrightarrow \Omega^1_B$ est une équivalence, ce qu'il nous fallait montrer. $\square$

Le foncteur ϵ, retreint à la sous-catégorie de *cdga* formée des k-algèbres non-dg, possède l'interprétation plaisante suivante. Soit A une k-algèbre commutative et

$$DR(A) = Sym_A(\Omega^1_A[1]) \simeq \oplus_n \Omega^n_A[n]$$

sa dg-algèbre de de Rham. La différentielle de de Rham munit $DR(A)$ d'une structure de $\epsilon-cdga$ qui n'est autre que $\epsilon(A)$. En d'autres termes, $DR(A)$ muni de sa différentielle de de Rham est la ϵ-dg-algèbre commutative libre engendrée par A. De plus, si A est cofibrante en tant qu'objet de *cdga* (e.g. A est une k-algèbre de polynômes) alors $\epsilon(A)$ est cofibrante dans $\epsilon - cdga$.

Proposition 1.4 *Notons*

$$\mathbb{L}\epsilon : Ho(cdga) \longrightarrow Ho(\epsilon - cdga)$$

le foncteur dérivé à gauche de ϵ. Si A est une k-algèbre commutative lisse alors le morphisme naturel

$$\mathbb{L}\epsilon(A) \longrightarrow \epsilon(A)$$

est un isomorphisme dans $Ho(\epsilon - cdga)$.

Preuve: Soit $QA \longrightarrow A$ un modèle cofibrant pour A dans *cdga*. Le morphisme en question est représenté par

$$Sym_{QA}(\Omega^1_{QA}[1]) \longrightarrow Sym_A(\Omega^1_A[1]).$$

Ainsi, ce morphisme est un quasi-isomorphisme si et seulement si le morphisme induit

$$\Omega^1_{QA} \longrightarrow \Omega^1_A$$

est un quasi-isomorphisme de complexes. Or, Ω^1_{QA} est un modèle pour le complexe cotangent $\mathbb{L}_A$ de A, comme cela se voit en utilisant l'équivalence de Quillen entre *cdga* et k-algèbres simpliciales commutatives, ainsi que la caractérisation du complexe cotangent en termes de dérivations (voir par exemple [To-Ve2]). Le morphisme ci-dessus est alors isomorphe, dans $Ho(C(k))$, au morphisme naturel

$$\mathbb{L}_A \longrightarrow \Omega^1_A.$$

Or, comme A est lisse ce morphisme est bien un quasi-isomorphisme. $\square$

2 Algèbres simpliciales S^1-équivariantes et ϵ-dg-algèbres

Notons $sk - CAlg$ la catégorie des k-algèbres commutatives simpliciales, et considérons $S^1 - sk - CAlg$ la catégorie des objets de $sk - CAlg$ avec une action du groupe simplicial S^1. La catégorie $sk - CAlg$ est munie d'une structure de modèles pour la quelle les fibrations et les équivalences sont définies sur les ensembles simpliciaux sous-jacents. Comme $sk - CAlg$ est une catégorie de modèles simpliciale et engendrée par cofibration la catégorie $S^1 - sk - CAlg$ est elle-même munie d'une structure projective où les fibrations et équivalences sont définis dans $sk - CAlg$.

Dans cette section nous allons construire une équivalence de dérivateurs

$$\phi : \mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \longrightarrow \mathbb{D}(\epsilon - dg - alg)$$

ainsi qu'un 2-isomorphisme h faisant commuter le diagramme suivant (en tant que diagramme dans la 2-catégorie des dérivateurs)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathbb{D}(\epsilon - dg - mod) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(sk - CAlg) \arrow[r, "N"'] & \mathbb{D}(cdga).
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les morphismes verticaux sont induits par les foncteurs d'oubli

$$S^1 - sk - CAlg \longrightarrow sk - CAlg \qquad \epsilon - cdga \longrightarrow cdga,$$

et le foncteur N est le foncteur de normalisation, adjoint à droite d'une équivalence de Quillen (voir [Sc-Sh])

$$N : sk - CAlg \longrightarrow cdga.$$

Première étape: On considère le groupe simplicial BS^1 comme une $\mathbb{S}$-catégorie avec une unique objet $*$, dont le monoïde des endomorphismes est S^1. On choisit alors une catégorie $\mathcal{C}$, et un diagramme de $\mathbb{S}$-catégories

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i} T \xleftarrow{j} BS^1,$$

tel que, d'une part j soit une équivalence de $\mathbb{S}$-catégories, et i fasse de T une localisation de $\mathcal{C}$ le long de tous ses morphismes (au sens par exemple de [To-Ve4, §1.2]). On pourra, par exemple, prendre pour $\mathcal{C}$ la catégorie cyclique Λ. On sait alors qu'il existe une chaine d'adjonctions de Quillen

$$sk - CAlg^{\mathbb{C}} \longleftrightarrow sk - CAlg^{T} \longleftrightarrow sk - CAlg^{BS^1} = S^1 - sk - CAlg.$$

Ces adjunctions induisent des équivalences de dérivateurs (voir par exemple [To-Ve1, §2.3.2] ou encore [To-Ve4, §1.2])

$$\mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \xrightarrow{j^*} \mathbb{D}(sk - CAlg^T) \xleftarrow{i^*} \mathbb{D}_{loc}(sk - CAlg^{\mathbb{C}}),$$

où $\mathbb{D}_{loc}(sk - CAlg^{\mathbb{C}})$ désigne le sous-dérivateur plein de $\mathbb{D}(sk - CAlg^{\mathbb{C}})$ formé des diagrammes $\mathcal{C} \longrightarrow sk - CAlg$ qui envoie tous les morphismes de $\mathcal{C}$ sur des équivalences. Fixons-nous un objet $x \in \mathcal{C}$, alors le foncteurs ci-dessus commutent clairement à l'évaluation en x et au point de base de BS^1, et on dispose ainsi de deux carrés 2-commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \arrow[r, "j^*"] \arrow[dr] & \mathbb{D}(sk - CAlg^T) \arrow[d, "ev_{i(x)}"] & \mathbb{D}_{loc}(sk - CAlg^{\mathbb{C}}) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[dl, "ev_x"] \\
& \mathbb{D}(SEns), &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux sont des équivalences, et le morphisme vertical de gauche est le foncteur d'oubli. On construit ainsi un diagramme 2-commutatif de dérivateurs

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \arrow[rr, "\phi_1"] \arrow[dr] & & \mathbb{D}_{loc}(sk - CAlg^{\mathbb{C}}) \arrow[dl, "ev_x"] \\
& \mathbb{D}(SEns). &
\end{tikzcd}$$

Comme BS^1 est simplement connexe, il n'est pas difficile de vérifier que ce diagramme ne dépend pas, à équivalence près, du choix du point $x \in \mathcal{C}$.

Seconde étape: Considérons le foncteur de normalisation

$$N : sk - CAlg \longrightarrow cdga$$

que l'on sait être l'adjoint à droite d'une équivalence de Quillen (voir [Sc-Sh]). Il induit donc un nouvel adjoint à droite d'une équivalence Quillen

$$N : sk - CAlg^{\mathcal{C}} \longrightarrow cdga^{\mathcal{C}},$$

qui induit, à sont tour, une équivalence de dérivateurs

$$\mathbb{D}_{loc}(sk - CAlg^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}).$$

Cette équivalence vient avec un 2-isomorphisme naturel faisant commutater le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_{loc}(sk - CAlg^{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\phi_2"] \arrow[dr, "ev_x"'] & & \mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[dl, "ev_x"] \\
& \mathbb{D}(cdga). &
\end{tikzcd}$$

Troisième étape: Dans cette étape, et la suite, nous aurons besoin de travailler momentanément avec des complexes non bornés. Lorsque cela sera le cas nous l'indiquerons par un indice $(-)_\infty$. Ainsi, $C(k)_\infty$, $cdga_\infty$ ... désignera la catégorie des complexes non bornés, des k-dg-alèbres commutatives non bornées ....

L'inclusion des complexes en degrés négatifs dans les complexes non bornés induit un morphisme de dérivateurs

$$\mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}_\infty).$$

Ce morphisme est pleinement fidèle et identifie le membre de gauche au sous-dérivateur des objets cohomologiquement concentrés en degrés négatifs.

On considère le functor des sections globales

$$\Gamma : cdga^{\mathcal{C}}_\infty \longrightarrow cdga_\infty.$$

Ce foncteur est de Quillen à droite lorsque l'on munit $cdga_\infty^{\mathcal{C}}$ de sa structure injective, pour laquelle les cofibrations et les équivalences sont définies termes à termes. Pour tout $A \in cdga_\infty^{\mathcal{C}}$, le morphisme unité $\underline{k} \longrightarrow A$, où $\underline{k}$ est le diagramme constant, induit un morphisme dans $cdga$

$$\Gamma(\underline{k}) \longrightarrow \Gamma(A).$$

Ainsi, si R désigne un foncteur de remplacement fibrant dans $cdga_\infty^{\mathcal{C}}$, on dispose d'un morphisme

$$\Gamma(R(\underline{k})) \longrightarrow \Gamma(R(A)).$$

Nous noterons $B := \Gamma(R(\underline{k})) \in cgda$. La construction $A \mapsto \Gamma(R(A))$ définit ainsi un morphisme de dérivateurs

$$\mathbb{D}_{loc}(cdga_\infty^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}(B - cdga),$$

où $B - cdga$ désigne la catégorie comma $B/cdga$.

Rappelons que, lors de la seconde étape, nous nous sommes fixés un diagramme de $\mathbb{S}$-catégories

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i} T \xleftarrow{j} BS^1.$$

Ce diagramme induit des isomorphismes de k-algèbres graduées commutatives de cohomologie

$$H^*(B) = H^*(\mathbb{R}\Gamma(\underline{k})) \simeq H^*(\mathcal{C}, k) \simeq H^*(BS^1, k) \simeq k[u],$$

où $deg(u)$ et correspond au générateur de $H^2(K(\mathbb{Z}, 2), k)$ donné par l'inclusion standard $\mathbb{Z} \subset k$. Le choix d'un 2-cocycle $u' \in Z^2(B)$ qui est un représentant de u détermine un quasi-isomorphisme de cdga $k[u] \longrightarrow B$. Ce quasi-isomorphisme, considéré à homotopie près, ne dépend pas du choix de u'. Il induit ainsi une équivalence de Quillen

$$B - cdga_\infty \longrightarrow k[u] - cdga_\infty$$

dont le morphisme correspond de dérivateurs

$$\mathbb{D}(B - cdga_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty)$$

est une équivalence, déterminée à 2-isomorphisme unique près.

Nous avons ainsi construit un morphisme de dérivateurs

$$\phi_3 : \mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \hookrightarrow \mathbb{D}(cdga_\infty^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}(B - cdga_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty).$$

Ce morphisme entre dans un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty) \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}(cdga) \arrow[r, "i"'] & \mathbb{D}(cdga^\infty), \end{tikzcd}$$

qui n'est pas 2-commutatif et demande quelques explications supplémentaires. Le morphisme q est induit par le foncteur d'oubli, et i par l'inclusion naturelle. Cependant, p n'est pas le foncteur d'oubli. Il est induit par le foncteur de Quillen à gauche

$$k[u] - cdga_\infty \longrightarrow cdga_\infty$$

qui envoie A' sur $k \otimes_{k[u]} A'$. Par adjonction, il n'est pas difficile de voir qu'il existe un 2-morphisme

$$u : p \circ \phi_3 \Rightarrow i \circ q,$$

qui n'est pas un 2-isomorphisme en général. Il le deviendra lorsque les foncteurs seront restreint à certains sous-dérivateurs d'objets bornés, comme nous allons maintenant le voir.

Nous noterons $\mathbb{D}^+_{loc}(cdga^{\mathcal{C}})$ (resp. $\mathbb{D}^+(k[u] - cdga_\infty)$) le sous-dérivateur formée des objets dont les complexes sous-jacents sont cohomologiquement bornés à gauche (i.e. H^i s'annule pour tout i suffisament petit). Nous remarquerons ici que la restriction de ϕ_3

$$\phi_3^+ : \mathbb{D}^+_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}^+(k[u] - cdga_\infty)$$

est pleinement fidèle. De plus, la restriction du 2-morphisme u ci-dessus induit un 2-isomorphisme

$$u^+ : p \circ \phi_3^+ \Rightarrow i \circ q.$$

Pour voir cela, il nous faut revenir à l'adjonction de Quillen

$$cdga_\infty \longleftrightarrow cdga^{\mathcal{C}}_\infty.$$

Notons $A := R(\underline{k})$ un modèle fibrant de $\underline{k}$ dans $cdga^{\mathcal{C}}_\infty$, et $B = \Gamma(A)$. On considère l'adjonction induite

$$f : B - cdga_\infty \longleftrightarrow A/cdga^{\mathcal{C}}_\infty : \Gamma.$$

Le foncteur f envoie un objet $B' \in B - cdga_\infty$ sur $A \otimes_B B'$, où A est considérée comme une B-dg-algèbre commutative à travers le morphisme $B \longrightarrow A$, adjoint de l'identité $B = \Gamma(A)$ (nous identifions ici les objets de $B - cdga_\infty$ avec leur diagrammes constants correspondants). Il nous faut montrer que pour tout objet $A' \in A/cdga^{\mathcal{C}}_\infty$, cohomologiquement borné à gauche, le morphisme d'adjonction

$$A \otimes^{\mathbb{L}}_B \mathbb{R}\Gamma(A') \longrightarrow A'$$

est un isomorphisme dans $Ho(cdga^{\mathcal{C}}_\infty)$. Pour cela on peut oublier la structure d'algèbres et considéré que A' est un A-dg-module. Dans ce cas, un argument de type décomposition de Postnikov sur A' ramène le problème au cas où A' est un diagramme constant associé à un k-modules M. On a alors

$$H^*(\mathbb{R}\Gamma(M)) \simeq H^*(\mathcal{C}, M) \simeq H^*(K(\mathbb{Z}, 2), M) \simeq k[u] \otimes_k M.$$

On a donc

$$A \otimes^{\mathbb{L}}_B \mathbb{R}\Gamma(M) \simeq A \otimes^{\mathbb{L}}_{k[u]} k[u] \otimes_k M \simeq M.$$

En revenant aux définitions de nos foncteurs, ceci montre aussi que u^+ est un 2-isomorphisme (nous laissons la vérification au lecteur). On peut de plus caractériser l'image de ϕ_3^+. En effet, l'objet $k[u]$ engendre une t-structure sur le dérivateur $\mathbb{D}(k[u] - dg - mod_\infty)$, dont la partie négative est engendrée par $k[u]$ par colimites homotopiques. L'image essentielle de ϕ_3^+ consiste alors en tous les objets de $\mathbb{D}(k[u]-cdga_\infty)$ dont l'objet sous-jacent dans $\mathbb{D}(k[u]-dg-mod_\infty)$ est d'amplitude $[n,0]$ pour un certain entier n.

Quatrième étape: De manière analogue à l'étape précédente, nous construisons un diagramme, qui n'est pas 2-commutatif, de dérivateurs

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(\epsilon - cdga) \arrow[r, "\phi_4"] \arrow[d, "r"'] & \mathbb{D}(k[u]-cdga_\infty) \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{D}(cdga) \arrow[r, "i"'] & \mathbb{D}(cdga^\infty),
\end{tikzcd}$$

tel que la restriction de ϕ_4 à $\mathbb{D}^+\epsilon - cdga)$, le sous-dérivateurs des objets cohomologiquement bornés, soit pleinement fidèle. Nous construisons aussi un 2-morphisme $v : p\circ\phi_4 \Rightarrow i\circ r$ qui induira un 2-isomorphisme par restriction

$$v^+ : p\circ\phi_4^+ \Rightarrow i\circ r.$$

La construction de ϕ_4 et de v est tout à fait analogue à celle de ϕ_3 et de u, nous nous contenterons donc de l'esquisser. Nous considérerons $\epsilon-dg-mod$, muni de sa structure *injective*, pour laquelle les cofibrations et les équivalences sont définies dans $C(k)$. Cette structure de modèles reste une structure de modèles monoïdales au sens de [Ho], et elle induit une structure injective sur $\epsilon-cdga$, pour laquelle les cofibrations et les équivalences sont définies dans $cdga$. On considère alors le foncteur

$$\Gamma_\epsilon : \epsilon - cdga \longrightarrow cdga_\infty,$$

qui envoie $A\in\epsilon-cdga$ sur $\underline{Hom}_{\epsilon-dg-mod_\infty}(k,A)$, où $\underline{Hom}_{\epsilon-dg-mod_\infty}$ désigne le complexe, non borné, des morphismes de ϵ-dg-modules. Le foncteur Γ_ϵ est de Quillen à droite, et la construction $A\mapsto\Gamma_\epsilon(R(A))$, où R est un remplacement fibrant dans $\epsilon-cdga$, fournit un morphisme de dérivateurs

$$\mathbb{D}(\epsilon-cdga)\longrightarrow\mathbb{D}(B'-cdga_\infty),$$

avec $B' := \Gamma_\epsilon(R(k))$. Or, $H^*(B')\simeq Ext^*_{k[\epsilon]}(k,k)\simeq k[u]$. Ainsi, il existe un quasi-isomorphisme de dg-algères commutatives $k[u]\longrightarrow B'$, bien déterminé à homotopie près. Ce quasi-isomorphisme fournit une équivalence de dérivateurs $\mathbb{D}(B'-cdga_\infty)\longrightarrow\mathbb{D}(k[u]-cdga_\infty)$. Le morphisme phi_4 est par définition l'équivalence composée

$$\mathbb{D}(\epsilon-cdga)\longrightarrow\mathbb{D}(B'-cdga_\infty)\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}(k[u]-cdga_\infty).$$

Nous laissons le soins au lecteur de vérifier que ϕ_4^+ est bien pleinement fidèle, et que son image essentielle coïncide avec celle de ϕ_3^+ (les arguments sont les mêmes que pour ϕ_3).

Cinquième et dernière étape: D'après les deux dernières étapes nous avons construit un diagramme 2-commutatif de dérivateurs

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^+_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_3^+"] \arrow[d] & \mathbb{D}(k[u]-cdga_{\infty}) \arrow[d] & \mathbb{D}^+(\epsilon - cdga) \arrow[l, "\phi_4^+"'] \arrow[d] \\
\mathbb{D}^+(cdga) \arrow[r] & \mathbb{D}(cdga^{\infty}) & \mathbb{D}^+(cdga). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Les morphismes ϕ_3^+ et ϕ_4^+ étant pleinement fidèles avec la même image essentielle on trouve un nouveau diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^+_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_{34}^+"] \arrow[d] & \mathbb{D}^+(\epsilon - cdga) \arrow[d] \\
\mathbb{D}^+(cdga) \arrow[r, "id"'] & \mathbb{D}^+(cdga).
\end{tikzcd}$$

Il n'est pas difficile de remarquer que ce diagramme se complète, de manière unique (à isomorphisme unique près), en un diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_{34}"] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \\
\mathbb{D}^+_{loc}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_{34}^+"] \arrow[u] \arrow[d] & \mathbb{D}^+(\epsilon - cdga) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathbb{D}^+(cdga) \arrow[r, "id"'] & \mathbb{D}^+(cdga),
\end{tikzcd}$$

avec ϕ_{34} une équivalence de dérivateurs. En effet, il suffit pour cela de remarquer que dans $\mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}})$ et $\mathbb{D}(\epsilon - cdga)$, tout objet est limite de sa tour de Postnikov. Ainsi, ϕ_{34} est défini est prenant l'image par ϕ_{34}^+ des tours de Postnikov de $\mathbb{D}_{loc}(cdga^{\mathcal{C}})$, puis en en prenant leurs limites dans le dérivateur $\mathbb{D}(\epsilon - cdga)$. Nous laissons les détails au lecteur de cette construction formelle.

La conclusion de ces cinq étapes et la construction d'un diagramme 2-commutatif de dérivateurs

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(sk - CAlg) \arrow[r, "N"'] & \mathbb{D}(cdga),
\end{tikzcd}$$

où $\phi := \phi_{34} \circ \phi_2 \circ \phi_1$, le morphisme N est induit par le foncteur de normalisation, et les morphismes verticaux sont les oublis.

3 Le théorème de comparaison et quelques applications

Nous sommes maintenant en mesure de d'énoncer et de démontrer notre résultat principal.

Théorème 3.1 *1. Les deux morphismes de dérivateurs*

$$\mathbb{D}(sk-CAlg) \longrightarrow \mathbb{D}(\epsilon - cdga),$$

qui envoient respectivement A sur $\phi(S^1 \otimes_k^{\mathbb{L}} A)$ et sur $\mathbb{L}\epsilon(N(A))$, sont naturellement isomorphes.

2. Soit $\mathbb{D}(k-CAlg^{sm})$ le sous-dérivateur plein de $\mathbb{D}(sk-CAlg)$ formé des k-algèbres commutatives lisses et sur k. Alors les deux morphismes de dérivateurs

$$\mathbb{D}^{sm}(k-CAlg) \longrightarrow \mathbb{D}(\epsilon - cdga),$$

qui envoient respectivement A sur $\phi(S^1 \otimes_k A)$ et sur $\epsilon(A)$, sont naturellement isomorphes.

Preuve: Tout d'abord, (2) découle de (1) et du fait que pour A lisse sur k les deux morphismes

$$\mathbb{L}\epsilon(A) \longrightarrow \epsilon(A) \qquad S^1 \otimes_k^{\mathbb{L}} A \longrightarrow S^1 \otimes_k A$$

sont des équivalences (à cause de la proposition 1.4, et parceque A est plate sur k). Pour (1), on revient au diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(sk - CAlg) \arrow[r, "N"'] & \mathbb{D}(cdga),
\end{tikzcd}$$

et on remarque que les adjoints à gauche des oublis sont respectivement induits par les foncteurs de Quillen à gauche

$$\epsilon : cdga \longrightarrow \epsilon - cdga \qquad S^1 \otimes_k - : sk - CAlg \longrightarrow S^1 - sk - CAlg.$$

Comme les morphismes ϕ et N sont des équivalences le diagramme induit

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - CAlg) \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \\
\mathbb{D}(sk - CAlg) \arrow[r, "N"'] \arrow[u, "S^1\otimes^{\mathbb{L}}-"] & \mathbb{D}(cdga), \arrow[u, "\mathbb{L}\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

est naturellement 2-commutatif. □

Pour le corollaire suivant, rappelons que pour X un k-schéma séparé (à diagonale affine suffirait), on dispose de son schéma dérivé $LX := \mathbb{R}Map(S^1, X)$ (voir [To-Ve4, To-Ve3] ainsi que [To, 4.3.1]). Il vient avec une projection naturelle $LX \longrightarrow X$, qui fait de LX le spectre relatif du faisceau de k-algèbres simpliciales commutatives $S^1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X$ sur X. Le groupe simplicial S^1 opère naturellement sur LX en agissant sur lui-même par translations.

Corollaire 3.2 *Soit X un k-schéma de type fini et séparé sur $Spec\, k$.*

1. *Il existe un isomorphisme dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\epsilon - cdga$ sur X*

$$\phi(S^1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{L}\epsilon(\mathcal{O}_X).$$

2. *Il existe un isomorphisme dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\mathcal{O}_X - cdga$ sur X*

$$\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/k}[1]),$$

où $\mathbb{L}_{X/k}$ est le complexe cotangent de X relativement à k au sens de [Il].

3. *Si X est lisse sur k, alors il existe isomorphisme dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\mathcal{O}_X - cdga$ sur X*

$$\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq Sym_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}[1]).$$

4. *Si X est lisse sur k, alors il existe un isomorphisme naturel de k-algèbres commutatives*

$$\pi_0(\mathcal{O}(LX)^{hS^1}) := \pi_0(\mathbb{R}\Gamma(X, S^1 \otimes \mathcal{O}_X)^{hS^1}) \simeq H^{ev}_{DR}(X/k),$$

où $(-)^{hS^1}$ désigne le foncteur des points fixes homotopiques, et $H^{ev}_{DR}(X/k)$ est la cohomologie de de Rham paire de X/k.

Preuve: Le point (1) est une conséquence immédiate du théorème 3.1. Pour le point (2) il suffit de remarquer qu'il existe une équivalence naturelle de faisceaux de k-algèbres commutatives simpliciales (où le produit tensoriel dérivé est calculé dans la $sk - CAlg$)

$$S^1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X,$$

qui par normalisation donne une équivalence de faisceaux de cdga (où le produit tensoriel dérivé est maintenant calculé dans *cdga*)

$$N(S^1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X)) \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X.$$

D'autre part la cdga sous-jacente à $\mathbb{L}\epsilon(\mathcal{O}_X)$ est naturellement équivalente à $Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/k}[1])$ comme nous l'avons déjà fait remarqué au §1. Le point (3) se déduit formellement de (2) et du fait que lorsque X est lisse $\mathbb{L}_{X/k} \simeq \Omega^1_{X/k}$.

Pour le dernier point, notons $\mathcal{O}(LX) := \mathbb{R}\Gamma(X, S^1 \otimes \mathcal{O}_X)$, où Γ est le foncteur de Quillen à droite des sections globales, de la catégorie des faisceaux de sur X à valeurs dans $S^1 - sk - CAlg$ vers la catégorie $S^1 - sk - CAlg$. Pour B une $\epsilon - cdga$ il existe un isomorphisme naturel d'algèbres

$$Hom_{Ho(\epsilon - dg - mod)}(k, B) \simeq H^0(Tot(\mathcal{B}B^-)),$$

où $Tot(\mathcal{B}B^-)$ est le complexe total négatif associé au complexe mixte B (voir [Lo, 5.1.7], ici notre ϵ joue le rôle de l'opérateur B, la différentielle du complexe sous-jacent à B est b). En particulier, on a un isomorphisme naturel entre $Hom_{Ho(\epsilon-dg-mod)}(k,B)$ et la cohomologie du complexe de longuer 2

$$\oplus_{n\geq 0}B_{-2n-1} \xrightarrow{d} \oplus_{n\geq 0}B_{-2n} \xrightarrow{d} \oplus_{n\geq 0}B_{-2n+1},$$

où d est la différentielle somme de ϵ et de la différentielle du complexe sous-jacent à B. Ceci, appliqué à $\phi(\mathcal{O}(LX))$ donne

$$\pi_0(\mathcal{O}(LX)^{hS^1}) \simeq Hom_{Ho(S^1-sk-CAlg)}(k,\mathcal{O}(LX)) \simeq Hom_{Ho(\epsilon-cdga)}(k,\phi(\mathcal{O}(LX))) \simeq H^0(Tot\mathcal{B}\phi(\mathcal{O}(LX))^-).$$

Par (1) et (3) on a

$$\phi(\mathcal{O}(LX)) \simeq \mathbb{R}\Gamma(X,\epsilon(X))) \simeq \oplus_n \mathbb{R}\Gamma(X,\Omega^n_X[-n]),$$

et où l'action de ϵ est induite par la différentielle de de Rham sur le membre de droite. Ainsi, on a donc clairement

$$H^0(Tot\mathcal{B}\phi(\mathcal{O}(LX))^-) \simeq \oplus_{n\ pair} H^n_{DR}(X) = H^{ev}_{DR}(X).$$

□

Il est aussi possible de généraliser le point (4) du corollaire précédent au cas non-affine de la façon suivante. La cdga $\mathbb{R}\Gamma(X,S^1\otimes\mathcal{O}_X)^{hS^1}$ est naturellement munie d'une structure de $k[u]-cdga$, et l'on peut donc inverser u. Il existe alors des isomorphismes

$$\pi_*(\mathbb{R}\Gamma(X,S^1\otimes\mathcal{O}_X)^{hS^1})[u^{-1}] \simeq H^*_{per}(X/k),$$

où $H^i_{per}(X/k) = H^{ev}_{DR}(X/K)$ si i est pair et $H^i_{per}(X/k) = H^{odd}_{DR}(X/K)$ si i est impair. Nous ne donnerons pas les détails ici.

Références

[Ben-Nad] D. Ben-Zvi, D. Nadler, *Loop Spaces and Langlands Parameters*, prépublication arXiv:0706.0322.

[Be] J. Bergner, *A model category structure on the category of simplicial categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 5, 2043–2058.

[Bo-Gu] A.K. Bousfield, V.K.A.M. Gugenheim, *On* PL *de Rham theory and rational homotopy type*. Mem. Amer. Math. Soc. **8** (1976), no. 179, ix+94 pp.

[Gr] A. Grothendieck, *Les Dérivateurs*, accessible

à http://people.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.

[Hi] V. Hinich, *Homological algebra of homotopy algebras*. Comm. Algebra **25** (1997), no. 10, 3291–3323.

[Ho] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[Il] L. Illusie, *Complexe cotangent et deformations I*, Lectur Notes in Mathematics **239**, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[Lo] J.L. Loday, *Cyclic homology.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **301**. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xx+513 pp.

[Sc-Sh] S. Schwede, B. Shipley, *Equivalences of monoidal model categories.* Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 287–334.

[Sch] F. Schuhmacher, *Hochschild Cohomology of Complex Spaces and Noetherian Schemes*, Homology, Homotopy and Applications, Volume **6** (2004) 299–340.

[To] B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, à parraitre dans *Algebraic Geometry, Seattle 2005* (aussi accessible à http://www.math.univ-toulouse.fr∼toen/publis.html).

[To-Ve1] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical Algebraic Geometry I*, Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257–372.

[To-Ve2] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical Algebraic Geometry II: geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224 pp

[To-Ve3] B. Toën, G. Vezzosi, *Chern character, loop spaces and derived algebraic geometry*, à parraitre dans le *Abel Symposium, Oslo 2007* (aussi accessible à http://www.math.univ-toulouse.fr∼toen/publis.html).

[To-Ve4] B. Toën, G. Vezzosi, *Infinies-categories monoidales rigides, traces et caracteres de Chern*, prépublication arXiv:0903.3292.

[Ye] A. Yekutieli, *The Continuous Hochschild Cochain Complex of a Scheme*, Canadian J. Math Vol. **54** (6), 2002, pp. 1319-1337.