Cours 5 : Topos

Bertrand Toën

Mardi 10 Mars 2020

1 Retour sur les systèmes d'équations polynômiales

Nous revenons sur notre système d'équations polynomiales

$$X : \begin{cases} F_1(X_1, \ldots, X_n) = 0 \\ F_2(X_1, \ldots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ F_p(X_1, \ldots, X_n) = 0 \end{cases}$$

Ici, les F_i sont des polynômes à n variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On rappelle que l'on a défini :

1. Un espace topologique des solutions complexes $\bar{X}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
2. Des ensembles finis $\bar{X}(\mathbb{F}_q) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ et leur cardinal $N(X, q)$.

Pour relier (1) et (2) ci-dessus on cherche un "espace" $\bar{\mathcal{X}}$ qui est tel que :

1. $\bar{\mathcal{X}}$ voit les nombres de Betti de $\bar{X}(\mathbb{C})$.
2. On a un Frobenius
$$Fr : \bar{\mathcal{X}} \longrightarrow \bar{\mathcal{X}}$$
dont les points fixes sont en bijections avec les ensembles $\bar{X}(\mathbb{F}_q)$.

Dans des cas très rares le Frobenius existe sur l'espace $\bar{X}(\mathbb{C})$, et on peut alors prendre pour $\bar{\mathcal{X}}$ l'espace $\bar{X}(\mathbb{C})$ lui-même. Par exemple, c'est le cas pour $\bar{X}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Le Frobenius est donné en coordonnées homogènes par
$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0^p, \ldots, x_n^p)$$
et élève les coordonnées à la p-ème puissance.

L'action du Frobenius sur $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Q}[u]/u^{n+1}$ est donnée par $u \mapsto p^i.u^i$. En effet, pour H^2 il suffit de voir cela pour $n = 1$. Mais $Fr : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est alors un endomorphisme de degré p de la sphère de Riemann, et son action sur le π_2 est donc la multiplication par p. On utilise alors la compatibilité avec la structure d'algèbre sur $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ pour voir que l'action du Frobenius envoie u^i sur $p^i u^i$.

Dans ce cas la formule des traces montre que la fonction Zêta de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour l'endomorphisme Fr est donnée par
$$Z(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), Fr, T) = \prod_{0 \leq i \leq n} (1 - p^i T).$$

Dans ce cas on observe la formule

$$deg(Z(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), Fr, T)) = \chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))) = n + 1.$$

Cependant, en général l'objet $\bar{\mathcal{X}}$ n'existe pas dans la catégorie des espaces (ni même dans $Ho(Top)$) et il est nécessaire d'étendre la notion d'espaces à celle de topos afin de pouvoir le construire.

Avant de passer à la définition formelle de topos, nous pouvons examiner le cas $\mathbb{C}^*$, vu comme une variété algébrique d'équation $XY - 1 = 0$. On sait que $H_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$ et donc $b_1(\mathbb{C}^*) = 1$.

Topologiquement on peut incarner ce nombre de Betti par le revêtement universel

$$exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

qui est un revêtement de groupe $\mathbb{Z}$. Cependant, si l'on souhaite décrire la topologie de $\mathbb{C}^*$ en restant dans la catégorie algébrique, c'est à dire en ne s'autorisant uniquement des applications polynomiales, on ne peut plus considérer la fonction exponentielle. Au mieux on peut contempler les revêtements finis

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

donnés par $x \mapsto x^n$. Lorsque $n \to \infty$ il est raisonnable de penser que ces revêtements approximent le revêtement universel.

Cela suggère que nous ayons besoin d'une notion d'espaces pour laquelle les applications du type $x \mapsto x^n$ soient des *voisinages*. On souhaite donc que les "ouverts" soient possiblement en dehors de l'espace que l'on considère (i.e. ne soient plus des sous-ensembles). La formalisation de cette idée mène à la notion de sites et topologies de Grothendieck (voir [SGA4-1, Exp. II]). Nous n'irons pas dans cette direction et allons introduire directement les topos.

2 Une caractérisation de la catégorie des ensembles

De manière intuitive, un *topos* est "une catégorie qui ressemble à la catégorie Ens des ensembles." Pour se chauffer nous allons donner une caractérisation interne de la catégorie des ensembles.

On rappelle que la catégorie Ens des ensembles possède des limites et des colimites. Icelles peuvent être explicitées. Soit $X_* : I \longrightarrow Ens$ un foncteur. La limite du foncteur X_* est donnée par

$$\lim_{i \in I} X_i = \{(x_i)_i \in \prod_i X_i \,/\, u(x_i) = x_j \;\forall\, u : i \to j \; dans\, I\} \subset \prod_i X_i$$

De manière duale $co\lim_{i \in I} X_i$ est le quotient de $\coprod_i X_i$ par la relation d'équivalence engendrée par : $(x_i, i) \sim (x_j, j)$ s'il existe $x_k \in X_k$ et $u : k \to i$ $v : k \to j$ tel que $u(x_k) = x_i$ et $v(x_k) = x_j$.

$$co\lim_{i \in I} X_i = (\coprod_i X_i)/\sim$$

Par construction, $co\lim_{i \in I} X_i$ vient avec des applications naturelles $X_i \to co\lim_{i \in I} X_i$ (induite par l'inclusion de la composante X_i dans $\coprod_i X_i$). De même, $\lim_{i \in I} X_i$ vient avec des projections naturelles $\lim_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$.

Dans Ens les colimites et les limites possèdent certaines compatibilités caractéristiques. Il s'agit de deux faits suivants, appelés *lois de distributivité*.

1. Pour toute catégorie I, tout diagramme $X_* : I \longrightarrow Ens$ de colimite $X = co\lim_{i\in I} X_i$, et toute application $Y \longrightarrow X$, l'application canonique

$$co\lim_{i\in I}(Y \times_X X_i) \longrightarrow Y$$

est un isomorphisme.
2. Pour toute catégorie I, tout morphisme de diagrammes

$$f : Y_* \longrightarrow X_*$$

qui est *équifibré*, pour tout $j \in I$ le carré suivant

$$\begin{tikzcd} Y_j \arrow[r] \arrow[d] & X_j \arrow[d] \\ co\lim_{i\in I} X_i \arrow[r] & co\lim_{i\in I} Y_i \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Rappelons dans la notion ci-dessus que *équifibré* signifie que pour tout morphisme $u : i \to j$ dans I, la carré suivant

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\ Y_j \arrow[r] & X_j \end{tikzcd}$$

est cartésien.

On peut alors montrer le théorème suivant, qui affirme que les lois de distributivités ci-dessus caractérisent la catégorie des ensembles si l'on suppose de plus que l'objet final est générateur.

Proposition 2.1 *Une catégorie C est équivalente à Ens si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes.*

1. *C possède des limites et colimites (+ une condition ensembliste de* présentabilité *que nous n'expliciterons pas ici, voir [Ad-Ro]).*
2. *La catégorie C vérifie les lois de distributivité ci-dessus.*
3. *L'objet final $*$ de C est générateur : un morphisme $f : x \to y$ de C est un isomorphisme si et seulement si l'application induite $C(*, x) \to C(*, y)$ est bijective. De plus les objets finaux et initiaux ne sont pas isomorphes.*

La proposition précédente se démontre en utilisant l'adjonction suivante

$$G : Ens \rightleftarrows C : C(*, -)$$

où l'adjoint à gauche G envoie un ensemble X sur l'objet $\coprod_X *$ dans C. Le fait que cette adjonction soit en réalité une équivalence se déduit alors des lois de distributivité.

En théorie des Topos la catégorie Ens joue le rôle de l'espace ponctuel. Toute catégorie vérifiant les deux premières conditions de la proposition 2.1 mais pas nécessairement la dernière sera appelée un topos.

3 Topos

Définition 3.1 Un topos *est une catégorie vérifiant* (1) *et* (2) *de la proposition 2.1.*

Nous donnons aussi la définition de morphismes de topos.

Définition 3.2 *Un morphisme $f : T \longrightarrow T'$ entre deux topos T et T' est un foncteur qui admet un adjoint à gauche $f^* : T' \longrightarrow T$ qui est exact (i.e. commute aux limites finies). Les morphismes entre topos forment donc une catégorie, les morphismes étant les transformations naturelles de foncteurs.*

Préfaisceaux. Soit I une catégorie. On note $\widehat{I} = Fun(I^o, Ens)$. C'est un topos, appelé *topos des préfaisceaux* sur I.

Par exemple, si G est un groupe on peut considérer $I = BG$, la catégorie avec un unique objet $*$ et $End(*) = G$. Alors $\widehat{BG}$ est un topos, appelé le *topos classifiant du groupe* G. La catégorie $\widehat{BG}$ est la catégorie des ensembles munis d'une G-action.

Pour tout topos T les morphismes $T \longrightarrow \widehat{BG}$ sont en correspondance avec les *G-fibrés principaux internes à T*. Lorsque $T = Ens$, ces morphismes $Ens \longrightarrow \widehat{BG}$ sont les *points de T*, et sont en correspondance avec les G-ensembles principaux homogènes. La catégorie des points de $\widehat{BG}$ est alors équivalente à la catégorie BG : un unique objet et G comme automorphisme. En d'autres termes il existe un unique morphisme $Ens \longrightarrow \widehat{BG}$ à isomorphisme près, et le groupe des automorphismes de ce foncteur est G.

Espaces topologiques. Soit X un espace topologique. Nous allons définir un topos $Sh(X)$ des faisceaux sur X. La construction $X \mapsto Sh(X)$ définit alors un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la 2-catégorie des topos.

La catégorie $Sh(X)$ est définie de la manière suivante. On note $Ouv(X)$ la catégorie des ouverts de X : ses objets sont les ouverts et ses morphismes sont les inclusions. La catégorie $Sh(X)$ est alors la sous-catégorie pleine de $\widehat{Ouv(X)}$ formée des foncteurs

$$F : Ouv(X)^o \longrightarrow Ens$$

vérifiant la conditions de descente suivante : pour tout ouvert U et tout recouvrement ouvert $U = \cup_i U_i$, l'application canonique ci-dessous est bijective

$$F(U) \longrightarrow \lim \left(\prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_{i,j}) \right)$$

où l'on note $U_{i,j} = U_i \cap U_j$. La catégorie $Sh(X)$ ainsi définie est un topos, appelé le *topos des faisceaux sur X*.

La catégorie $Sh(X)$ est aussi définissable par une propriété universelle. On considère les catégories C avec colimites et un foncteur $F : Ouv(X) \longrightarrow C$. On dira que F *a la propriété de recollement* si pour tout ouvert U et tout recouvrement ouvert $U = \cup_i U_i$ le morphisme naturel dans C

$$co\lim \left(\coprod_{i,j} F(U_{i,j}) \rightrightarrows \coprod_i F(U_i) \right) \longrightarrow F(U)$$

est un isomorphisme dans C. Alors, il existe un foncteur avec la propriété de recollement (induit par Yoneda)

$$Ouv(X) \longrightarrow Sh(X)$$

et ce dernier est universel : pour toute catégorie C avec colimites et tout foncteur avec la propriété de recollement $Ouv(X) \longrightarrow C$, il existe une factorisation unique à isomorphisme unique près

$$\begin{tikzcd} Ouv(X) \arrow[r] \arrow[dr] & Sh(X) \arrow[d, "\exists!"] \\ & C. \end{tikzcd}$$

4 Le petit topos étale d'un anneau commutatif

Commençons par le cas d'un corps K. On définit une catégorie K_{et} dont les objets sont les K-algèbres (commutatives) de la forme $\prod_i K_i$, produit fini d'extensions de corps $K \hookrightarrow K_i$ finies et séparables. Les morphismes dans K_{et} sont les morphismes de K-algèbres.

On définit un topos $Sh(K_{et})$ comme sous-catégorie pleine de $\widehat{(K_{et})^o}$. Il s'agit de la sous-catégorie des foncteurs

$$F : K_{et} \longrightarrow Ens$$

qui vérifient la *descente galoisienne*. Il s'agit des deux conditions suivantes :

1. $F(\prod_i K_i) \simeq \prod_i F(K_i)$ pour toute famille finie d'extension finies séparables $K \hookrightarrow K_i$.
2. Pour tout extension finie et séparable $K \hookrightarrow K' \hookrightarrow K''$ le morphisme naturel

$$F(K') \longrightarrow \lim \left(F(K'') \rightrightarrows F(K'' \otimes_{K'} K'')\right)$$

est bijectif.

La condition (2), lorsque $K' \hookrightarrow K''$ est de plus galoisienne de groupe G, affirme que $F(K')$ est en bijection naturelle avec $F(K'')^G$, l'ensemble des points fixes de G sur $F(K'')$.

Le topos $Sh(K_{et})$ est appelé *le petit topos étale de K*. On peut de plus le décrire entièrement en termes du groupe de Galois absolu de K. Le contenu de la proposition suivante est ce que l'on appelle parfois "la théorie de Galois de Grothendieck".

Proposition 4.1 *Soit K^{sp} une clôture séparable de K et $G_K = Gal(K^{sp}/K)$ le groupe de Galois absolu de K muni de sa topologie profinie usuelle. Il existe alors une équivalence canonique de catégories*

$$Sh(K_{et}) \simeq G_K - Ens_{ct},$$

où $G_K - Ens_{ct}$ est la catégorie des ensembles munis d'une action continue de G_K. Cette équivalence est induite par le foncteur

$$F \mapsto F(K^{sp}) = co\lim F(K')$$

où K' parcours les sous-extensions finies de $K \subset K^{sp}$.

Une conséquence importante de la propriété précédente est le fait suivant. Nous pouvons composer l'équivalence avec le foncteur d'oubli $G_K - Ens_{ct} \longrightarrow Ens$, qui oublie l'action de G_K. Le foncteur obtenu ainsi

$$\omega : Sh(K_{et}) \longrightarrow Ens$$

est appelé le *foncteur fibre* (associé au choix de K^{sp}). Le corollaire de la proposition est alors la formule suivante

$$G_K \simeq aut(\omega).$$

Pour terminer nous généralisons la construction du topos $Sh(K_{et})$ au cas où K est remplacé par un anneau commutatif quelconque A.

Pour cela on rappelle qu'un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ est *plat*, si le foncteur de changement de bases

$$- \otimes_A B : A - Mod \longrightarrow B - Mod$$

est exact (i.e. préserve les suites exactes de modules).

Définition 4.2 *Un morphisme d'anneaux commutatifs $A \longrightarrow B$ est* étale *si*

1. *B est de présentation finie sur A (i.e. de la forme $A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_k)$).*
2. *$A \longrightarrow B$ est plat.*
3. *Pour tout corps K et tout morphisme d'anneaux $A \to K$, la K-algèbre $B \otimes_A K$ est isomorphe à un produit fini $\prod_i K_i$ d'extensions finies et séparables de corps $K \hookrightarrow K_i$.*

On dit de plus qu'un morphisme $A \longrightarrow B$ est un recouvrement étale *s'il est étale si et si pour tout corps K et tout morphisme d'anneaux $A \to K$, la K-algèbre $B \otimes_A K$ est non-nulle.*

On pose alors A_{et} la catégorie des A-algèbres étales. Notons qu'un morphismes $A' \longrightarrow A''$ entre A-algèbres étales est automatiquement lui-même un morphisme étale (attention c'est faux pour les morphismes plats). On revoit à [Mi] pour plus sur les morphismes plats et étales.

On définit alors le topos $Sh(A_{et})$ comme étant la catégorie des foncteurs

$$F : A_{et} \longrightarrow Ens$$

vérifiant les deux propriétés suivantes.

1. $F(\prod_i B_i) \simeq \prod_i F(B_i)$ pour toute famille finie de A-algèbres étales $A \to B_i$.
2. Pour tout recouvrement étale $B \longrightarrow B'$ de A-algèbres étales, le morphisme naturel

   $$F(B) \longrightarrow \lim \left(F(B') \rightrightarrows F(B' \otimes_B B')\right)$$

   est bijectif.

Le topos $Sh(A_{et})$ est appelé le *petit topos étale de A*.

Références

[Ad-Ro] Adámek, Jiří ; Rosický, Jiří *Locally presentable and accessible categories.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 189. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Mi] Milne, James S. *Étale cohomology.* Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. xiii+323 pp.

[SGA4-1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. xix+525 pp.