Cours 2: Reflexions sur la notion d'espace II

Dans le cours précédent nous avons vu comment la catégorie des variétés topologiques pouvait se reconstruire à partir de la catégorie C des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Pour être plus précis nous avons utilisé la catégorie C ainsi que deux structures additionelles: la topologie τ, et la notion d'homéomorphisme local. Dans ce cours nous formaliserons ceci, et nous expliquerons comment définir les variétés et les espaces géométriques dans un contexte abstrait.

1 Contextes géométriques

Soit C une catégorie munie d'une (prè)topologie τ sous-canonique. Par le lemme de Yoneda on identifiera alors la catégorie C avec une sous-catégorie pleine de la catégorie $Sh(C,\tau)$ des faisceaux sur C. On notera le plongement de Yoneda par

$$h : C \longrightarrow Sh(C,\tau).$$

On se donne $\mathbf{P}$ une classe de morphismes dans C (i.e. $\mathbf{P}$ est un sous-ensemble de l'ensemble C_1 des morphismes de C). Rappelons les notions suivantes:

1. Nous dirons qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans C est *carrable* si pour tout morphisme $Z \longrightarrow Y$ de C, l'objet $X \times_Y Z$ existe dans C.

2. Nous dirons que $\mathbf{P}$ *est stable par composition* si pour deux morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ on a $(f \in \mathbf{P}$ *et* $g \in \mathbf{P}) \Rightarrow (g \circ f \in \mathbf{P})$.

3. Nous dirons que $\mathbf{P}$ *est stable par changement de bases* si pour tout carré cartésien dans C

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

   on a $(f \in \mathbf{P}) \Rightarrow (f' \in \mathbf{P})$.

4. Nous dirons que $\mathbf{P}$ *contient les identités* si pour tout objet $X \in C$ on a $id_X \in \mathbf{P}$.

On remarque que si $\mathbf{P}$ est stable par changement de bases et contient les identités alors $\mathbf{P}$ contient aussi tous les isomorphismes (Exo: le vérifier. On utilisera que les carrés commutatifs d'isomorphismes sont cartésiens).

Nous aurons aussi besoin des notions suivantes.

1. Une famille de morphismes $\{X_i \longrightarrow X\}$ dans C est un ***P**-recouvrement* si chaque morphisme $X_i \longrightarrow X$ appartient à $\mathbf{P}$ et si de plus le morphisme

$$\coprod_i h_{X_i} \longrightarrow h_X$$

   est un épimorphisme de faisceaux.

2. Une famille de morphismes $\{X_i \longrightarrow X\}$ dans C est un ***P**-recouvrement ouvert* si c'est un $\mathbf{P}$-recouvrement et si de plus chaque morphisme $X_i \longrightarrow X$ est un monomorphisme.

3. Nous dirons que $\mathbf{P}$ *est local pour la topologie* τ si les deux conidtions suivantes sont satisfaites.

   (a) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans C tel qu'il existe une famille couvrante $\{Y_i \longrightarrow Y\}$ telle que chaque morphisme induit $f_i : X \times_Y Y_i \longrightarrow Y$ appartienne à $\mathbf{P}$. Alors $f \in \mathbf{P}$.

   (b) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans C tel qu'il existe un $\mathbf{P}$-recouvrement $\{X_i \longrightarrow X\}$ tel que chaque morphisme induit $X_i \longrightarrow X$ soit dans $\mathbf{P}$. Alors $f \in \mathbf{P}$.

4. Nous dirons que le triplet $(C, \tau, \mathbf{P})$ *est compatible aux sommes finies* si les trois conditions suivantes sont satisfaites.

   (a) La catégorie C possède des sommes finies.

   (b) Pour toute famille finie d'objets $\{X_i\}_{i\in I}$ dans C la famille de morphismes

$$\{X_j \to \coprod_{i\in I} X_i\}_{j\in I}$$

   est un $\mathbf{P}$-recouvrement.

   (c) Les sommes finies sont disjointes dans C: pour toute famille finie d'objets $\{X_i\}_{i\in I}$ dans C, de somme $X := \coprod_{i\in I} X_i$, et tout $(j,k) \in I^2$ on a

$$X_j \times_X X_k \simeq \emptyset \textit{ si } j \neq k \qquad X_j \times_X X_j \simeq X_j\text{[1]}.$$

   (d) Pour tout $X \in C$, s'il existe deux faisceaux F et G tels que $h_X \simeq F \coprod G$, alors il existe $Y \in C$ avec $h_Y \simeq F$.

5. Nous dirons que les morphismes de $\mathbf{P}$ *possèdent des images ouvertes*, si pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathbf{P}$, il existe une famille de morphismes $\{X'_i \longrightarrow Y\}$ de $\mathbf{P}$ qui vérifie les deux conditions suivantes.

   (a) Les morphismes $X'_i \longrightarrow Y$ sont des monomorphismes.

   (b) Les morphismes de faisceaux $h_X \longrightarrow h_Y$ et $\coprod_i h_{X'_i} \longrightarrow h_Y$ possèdent la même image.

6. Nous dirons que les morphismes de $\mathbf{P}$ sont *localement carrables* si pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathbf{P}$, il existe un $\mathbf{P}$-recouvrement ouvert $\{X_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ tel que chaque morphisme $X_i \longrightarrow Y$ soit carrable.

[1] La condition veut dire ici que le morphisme diagonal de X_j dans $X_j \times_X X_j$ est un isomorphisme

Nous arrivons enfin à la définition clè de ce cours.

Définition 1.1 *Un contexte géométrique est la donnée d'une catégorie C, d'une (prè)topologie τ sur C, et d'une classe de morphismes $\boldsymbol{P}$ dans C qui vérifient les conditions suivantes.*

1. *La topologie τ est sous-canonique.*
2. *Les morphismes de $\boldsymbol{P}$ sont localement carrables.*
3. *$\boldsymbol{P}$ est stable par composition et changement de bases, contient les identités et est local pour la topologie τ.*
4. *Le triplet $(C, \tau, \boldsymbol{P})$ est compatible aux sommes finies.*
5. *Les morphismes de $\boldsymbol{P}$ possèdent des images ouvertes.*

Il est important de remarquer tout de suite le fait suivant qui sera utilisé implicitement dans la suite.

Lemme 1.2 *Si $(C, \tau, \boldsymbol{P})$ est un contexte géométrique, alors le plongement de Yoneda*

$$h : C \longrightarrow Sh(C, \tau)$$

commute au sommes finies.

Preuve: Pour une famille finie d'objets $\{X_i\}_{i \in I}$ dans C, de somme $X := \coprod_i X_i$, il faut montrer que le morphisme naturel

$$\coprod_{i \in I} h_{X_i} \longrightarrow h_X$$

est un isomorphisme de faisceau. Pour cela on montre que c'est un épimorphisme et un monomorphisme.

Pour montrer que c'est un monomorphisme, on utilise que l'on a

$$(\coprod_i h_{X_i}) \times_{h_X} (\coprod_i h_{X_i}) \simeq \coprod_{i,j} (h_{X_i} \times_{h_X} h_{X_j}).$$

Comme les sommes sont disjointes dans C on trouve

$$(\coprod_i h_{X_i}) \times_{h_X} (\coprod_i h_{X_i}) \simeq \coprod_i h_{X_i},$$

ce qui implique que le morphisme $\coprod_{i \in I} h_{X_i} \longrightarrow h_X$ est un monomorphisme.

Le fait que $\coprod_{i \in I} h_{X_i} \longrightarrow h_X$ soit aussi un épimorphisme est vrai par la condition (b) de la définition *d'être compatible aux sommes finies.* $\square$

Pour fixer les idées voici quelques exemples de contextes géométriques (Exo: vérifier que ces données vérifient bien les conditions de la définition 1.1).

1. On prend pour C la catégorie des espaces topologiques. La topologie τ est la topologie usuelle: une famille de morphismes d'espaces topologiques $\{X_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ est couvrante si pour tout i le morphisme $X_i \longrightarrow X$ est une immersion ouverte et si le morphisme $\coprod_i X_i \longrightarrow X$ est surjectif. Pour $\mathbf{P}$ on prend les homéomorphismes locaux.

2. On prend pour C la sous-catégorie pleine de celle des espaces topologiques constituée des sommes disjointes finies d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ (pour n variable). La topologie τ est la topologie usuelle comme ci-dessus, et de même $\mathbf{P}$ est comme ci-dessus la classe des homéomorphismes locaux.

3. On prend C et τ comme à l'exemple (2) ci-dessus. Pour $\mathbf{P}$ on prend la classe des submersions topologiques. On rappelle qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une submersion topologique s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X, des ouverts V_i de Y, et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "q_i"'] & V_i \times \mathbb{R}^{n_i} \arrow[d, "p_i"] \\ X \arrow[r] & Y, \end{tikzcd}$$

   où les u_i sont des homéomorphismes, et les q_i et les p_i sont les morphismes naturels $U_i \subset X$ et $V_i \times \mathbb{R}^{n_i} \longrightarrow V_i \subset Y$.

4. On définit une catégorie C de la façon suivante: ses objets sont les sommes disjointes finies d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ (pour n variables). Ses morphismes sont les applications $\mathcal{C}^\infty$ (i.e. infiniment différentiables). La topologie τ sur C est toujours la topologie usuelle: une famille de morphismes dans C, $\{X_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$, est couvrante si pour tout i le morphisme $X_i \longrightarrow X$ est une immersion ouverte $\mathcal{C}^\infty$ (i.e. est injective et de différentielle bijective en tout point de X_i) et si le morphisme $\coprod_i X_i \longrightarrow X$ est surjectif. Pour $\mathbf{P}$ on prend la classe des difféomorphismes locaux (i.e. des applications $\mathcal{C}^\infty$ dont la différentielle est bijective en tout point).

5. On prend C et τ comme à l'exemple (4) ci-dessus. Pour $\mathbf{P}$ on prend la classe des submersions $\mathcal{C}^\infty$ (i.e. des applications $\mathcal{C}^\infty$ qui ont une différentielle surjective en tout point).

6. On définit une catégorie C de la façon suivante: ses objets sont les sommes disjointes finies d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ pour n variable. Ses morphismes sont les applications holomorphes (i.e. $\mathcal{C}^\infty$ et dont la différentielle en tout point est une application $\mathbb{C}$-linéaire). Pour $\mathbf{P}$ on prend les applications holomorphes lisses (i.e. holomorphes et dont la différentielle est surjective en tout point).

2 Variétés

On fixe un contexte géométrique $(C, \tau, \mathbf{P})$ au sens de la définition 1.1 précédente.

Définition 2.1 *1. Soit $X \in C$. Un morphisme de faisceaux $f : F \longrightarrow h_X$ est une* immersion ouverte *si c'est un monomorphisme et s'il existe une famille de morphismes $\{X_i \longrightarrow X\}$ dans $\mathbf{P}$ telle que l'image de f soit égale à celle du morphisme $\coprod_i h_{X_i} \longrightarrow h_X$.*

2. *Un morphisme de faisceaux $f : F \longrightarrow G$ est une* immersion ouverte *si pour tout $X \in C$ et tout morphisme $h_X \longrightarrow G$, le morphisme induit*

$$F \times_G h_X \longrightarrow h_X$$

est une immersion ouverte au sens ci-dessus.

On remarque que la condition (5) de la définition de contextes géométrique (cf cours précédent) implique que l'on peut supposer que chaque morphisme $X_i \longrightarrow X$ est aussi un monomorphisme dans la définition précédente.

On montre que les immersions ouvertes sont stables par compositions et changement de bases (Exo). On montre aussi que pour deux faisceaux F et G le morphisme naturel $F \longrightarrow F \coprod G$ est une immersion ouverte (Exo: utiliser que $(C, \tau, \mathbf{P})$ est compatible aux sommes finies).

Définition 2.2 *Un faisceau $F \in Sh(C, \tau)$ est une* variété *(respectivement au contexte $(C, \tau, \boldsymbol{P})$) s'il existe une famille d'objets $\{U_i\}_{i \in I}$ dans C et un morphisme $p : \coprod_{i \in I} h_{U_i} \longrightarrow F$ vérifiant les deux conditions suivantes.*

1. *Le morphisme p est un épimorphisme de faisceaux.*

2. *Pour tout $i \in I$ le morphisme $h_{U_i} \longrightarrow F$ est une immersion ouverte.*

La donnée des objets U_i et du morphisme $p : \coprod_{i \in I} h_{U_i} \longrightarrow F$ sera appelée un atlas ouvert *de F.*
La catégorie des variétés *est la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux $Sh(C, \tau)$ formée des variétés.*

Chaque contexte géométrique décrit à la fin du paragraphe précédent donne ainsi lieu à une notion de variété. Voici ce que donnent la notion de variétés dans ces contextes, numérotés comme au pragraphe précédent (Gros exo: démontrer ces assertions en s'inspirant du cours précédent qui traite le cas du contexte 2).

1. La catégorie des variétés dans ce contexte est équivalente à celle des espaces topologiques.

2. La catégorie des variétés dans ce contexte est équivalente à celle des variétés topologiques (ceci a été démontré lors du cours précédent).

3. La catégorie des variétés dans ce contexte est équivalente à celle des variétés topologiques (on remarquera que les immersions ouvertes sont les mêmes que pour le cas précédent, bien que la classe $\mathbf{P}$ soit différente).

4. La catégorie des variétés dans ce contexte est équivalente à celle des variétés différentiables (de classe $\mathcal{C}^\infty$).

5. La catégorie des variétés dans ce contexte est équivalente à celle des variétés différentiables.

6. La catégorie des variétés dans ce contexte est équivalente à celle des variétés complexes.

3 Espaces géométriques

Pour pouvoir définir les espaces géométriques il nous faut d'abord étendre la notion de morphisme dans $\mathbf{P}$ des objets de C à tous les faisceaux, comme nous l'avons fait pour la notion d'homéomorphismes locaux.

Définition 3.1 *1. Un morphisme $f : F \longrightarrow G$ dans $Sh(C,\tau)$ est* représentable *(par une variété) si pour tout objet $X \in C$ et tout morphisme $h_X \longrightarrow G$ le produit fibré $F \times_G h_X$ est une variété.*

2. Un morphisme $f : F \longrightarrow G$ dans $Sh(C,\tau)$ possède la propriété $\mathbf{P}$ *(on dira aussi* appartient à $\mathbf{P}$*) s'il est représentable et si pout tout objet $X \in C$ et tout morphisme $h_X \longrightarrow G$ il existe un atlas ouvert*

$$p : \coprod_{i\in I} h_{U_i} \longrightarrow F \times_G h_X$$

tel que chaque morphisme induit $h_{U_i} \longrightarrow h_X$ corresponde à un morphisme $U_i \longrightarrow X$ dans C appartenant à $\boldsymbol{P}$.

On remarquera le lemme important suivant. Il montre en particulier que la notion précédente de morphisme dans $\mathbf{P}$ est compatible avec la notion déjà existante dans C.

Lemme 3.2 *1. Une immersion ouverte dans $Sh(C,\tau)$ est dans $\boldsymbol{P}$.*

2. Soit $X \in C$ et $F \longrightarrow h_X$ un morphisme de faisceaux. On suppose qu'il existe une famille couvrante $\{X_i \longrightarrow X\}$ vérifiant les conditions suivantes.

(a) Chaque morphisme $X_i \longrightarrow X$ est un monomorphisme et dans $\boldsymbol{P}$.

(b) Pour tout i le faisceau $F \times_{h_X} h_{X_i}$ est une variété.

Alors le faisceau F est une variété.

3. Les morphismes dans $\boldsymbol{P}$ au sens de la définition 3.1 sont stables par composition et changement de bases.

4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans C. Alors f est dans $\boldsymbol{P}$ si et seulement si le morphisme $h_f : h_X \longrightarrow h_Y$ est dans $\boldsymbol{P}$ au sens de la définition 3.1.

5. Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ induit une immersion ouverte $h_f : h_X \longrightarrow h_Y$ si et seulement si f est dans $\boldsymbol{P}$ est si c'est un monomorphisme dans C.

Preuve: (1) Soit $f : F \longrightarrow G$ une immersion ouverte. Soit $X \in C$, $h_X \longrightarrow G$ un morphisme, et considérons le morphisme induit

$$F' := F \times_G h_X \longrightarrow h_X.$$

Il existe alors une famille de morphismes $\{X_i \longrightarrow X\}$ dans $\mathbf{P}$ tel que F' s'identifie à l'image du morphisme $\coprod_i h_{X_i} \longrightarrow h_X$. En utilisant le fait que les morphismes de $\mathbf{P}$ ont des images ouvertes, on peut de plus supposer que chaque $h_{X_i} \longrightarrow h_X$ est un monomorphisme. En utilisant que les morphismes de $\mathbf{P}$ sont localement carrables on peut aussi supposer que les morphismes $X_i \longrightarrow X$ sont carrables dans C. Les morphismes $h_{X_i} \longrightarrow h_X$ se factorisent par F'. De plus, on voit facilement (Exo) que chaque morphisme $h_{X_i} \longrightarrow F'$ est une immersion ouverte. Comme le morphisme $p : \coprod_i h_{X_i} \longrightarrow F'$ est un épimorphisme par hypothèse, ceci implique que F' est une variété. De plus, $p : \coprod_i h_{X_i} \longrightarrow F'$ est un atlas ouvert tel que $h_{X_i} \longrightarrow h_X$ est dans $\mathbf{P}$. Ceci montre que f est dans $\mathbf{P}$.

(2) Posons $F_i := F \times_{h_X} h_{X_i}$. Pour tout i il existe un altas ouvert $\coprod_j V_{i,j} \longrightarrow F_i$. On vérifie alors que le morphisme total

$$\coprod_{i,j} V_{i,j} \longrightarrow F$$

est un atlas ouvert.

(3) Exo (on utilisera le point (2)).

(4) Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans C. Supposons d'abord que f est dans $\mathbf{P}$. Soit $Z \longrightarrow Y$ un morphisme dans C. Il nous faut commencer par montrer que le faisceau $h_X \times_{h_Y} h_Z$ est représentable par une variété. Pour cela on utilise que les morphismes de $\mathbf{P}$ sont localement carrables. Il existe donc un $\mathbf{P}$-recouvrement ouvert $\{X_i \longrightarrow X\}$, tel que chaque faisceau $h_{X_i} \times_{h_Y} h_Z$ soit représentable par un objet U_i de C. Par le point (2) ceci montre que $h_X \times_{h_Y} h_Z$ est une variété. De plus, les morphismes induits $U_i \longrightarrow Z$ sont dans $\mathbf{P}$, car les morphismes de $\mathbf{P}$ sont stables par changements de bases. Ceci montre que f est bien dans $\mathbf{P}$.

Réciproquement, si h_f est dans $\mathbf{P}$ alors il existe un $\mathbf{P}$-recouvrement $\{X_i \longrightarrow X\}$ tel que chaque morphisme $X_i \longrightarrow Y$ soit dans $\mathbf{P}$. Comme $\mathbf{P}$ est local pour τ ceci implique que f est dans $\mathbf{P}$.

(5) Se déduit de (4) et du fait qu'un morphisme f dans C est un monomorphisme si et seulement si le morphisme h_f est un monomorphisme dans $Sh(C, \tau)$. $\square$

Définition 3.3 *Un faisceau F est un* espace géométrique *s'il existe une famille d'objets $\{U_i\}_{i \in I}$ dans C et un morphisme $p : \coprod_{i \in I} h_{U_i} \longrightarrow F$ vérifiant les deux conditions suivantes.*

1. *Le morphisme p est un épimorphisme de faisceaux.*

2. *Pour tout $i \in I$ le morphisme $h_{U_i} \longrightarrow F$ appartient à $\mathbf{P}$.*

La donnée des objets U_i et du morphisme $p : \coprod_{i \in I} h_{U_i} \longrightarrow F$ sera appelée un atlas *de F.*

La catégorie des espaces géométriques *est la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux $Sh(C, \tau)$ formée des espaces géométriques.*

Une variété est bien entendu un espace géométrique (car les immersion ouverte sont aussi des morphismes dans $\mathbf{P}$).

On termine avec la proposition suivante, qui présente les espaces géométriques comme certains quotient de relations d'équivalences sur des variétés.

Proposition 3.4 *Soit F un espace géométrique. Alors, il existe un faisceau X, et une relation d'équivalence $R \subset X \times X$ vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Les faisceaux X et R sont des variétés. Le faisceau X est une réunion disjointe d'objet de C (i.e. $X \simeq \coprod h_{U_i}$, avec $U_i \in C$).*
2. *Les deux morphismes naturels $R \hookrightarrow X \times X \longrightarrow X$ sont dans $\boldsymbol{P}$.*
3. *Le faisceau F est isomorphe au faisceau quotient de X par la relation R*

$$F \simeq X/R = colim\,(R \rightrightarrows X)\,.$$

Preuve: On choisit un atlas

$$p : \coprod_i h_{U_i} \longrightarrow F.$$

On pose $X := \coprod h_{U_i}$ et $R := X \times_F X$. Comme le morphisme p est un épimorphisme on a

$$F \simeq colim\,(X \times_F X \rightrightarrows X)\,,$$

ce qui montre la condition (3). Pour montrer (1), on écrit

$$R = X \times_F X \simeq \coprod_{i,j} h_{U_i} \times_F h_{U_j}.$$

Ceci montre que R est une réunion disjointe de variété et donc une variété. Enfin, comme chaque morphisme $h_{U_i} \longrightarrow F$ est dans $\mathbf{P}$, on a bien que chaque projection

$$h_{U_i} \times_F h_{U_j} \longrightarrow h_{U_i}$$

est dans $\mathbf{P}$. Ceci implique la condition (2). $\square$