Cours 3: Schémas et espaces algébriques I

Dans le cours précédent nous avons vu la notion de contexte géométrique, et qu'un tel contexte donnait lieu à des notions de variétés et d'espaces géométriques. Nous allons maintenant construire un contexte spécifique à la géométrie algébrique pour lequel les variétés seront appelées des *schémas* et les espaces géométriques seront appelés des *espaces algébriques*.

Afin de mieux comprendre la construction du contexte algébrique on commence par rappeler quelques faits élémentaires sur les variétés algébriques (”affines”) d'un point de vu naif. Naivement une variété algébrique est l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales. Ainsi une variété algébrique X est déterminée par une famille finie de polynomes $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: X est alors l'ensemble des solutions du système $\{P_i(x) = 0\}_{1 \leq i \leq r}$, en d'autres termes on a

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n \ / \ P_i(x) = 0 \ \forall \ i\}.$$

On se pose alors la question de définir les ”fonctions algébriques” sur X. Partant du principe que les fonctions algébriques sur $\mathbb{C}^n$ sont les polynomes en les $x_1, \dots, x_n$, on peut se convaincre que l'anneau des fonctions algébriques sur X peut s'écrire

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(P_1, \dots, P_r).$$

Ainsi, à la variété algébrique X on fait correspondre l'anneau $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(P_1, \dots, P_r)$. Cet anneau une $\mathbb{C}$-algèbre commutative de type fini (i.e. avec un nombre fini de générateurs). Inversement, si A est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative de type fini, on peut écrire

$$A \simeq \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]/(Q_1, \dots, Q_s),$$

et donc reconstruire une variété algébrique dans $\mathbb{C}^m$ d'équation $Q_1(y) = \cdots = Q_s(y) = 0$.

Ceci montre qu'il existe une correspondance entre les variétés algébriques affines sur $\mathbb{C}$ (i.e. celle qui sont des sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ pour un certain n), et les $\mathbb{C}$-algèbres commutatives de type fini. Le point de départ de la théorie des schémas et de considérer que tout anneau commutatif A (pas uniquement les $\mathbb{C}$-algèbres commutatives de type fini) doit être considéré comme correspondant à un objet géométrique X de sorte à ce que A soit l'anneau des fonctions algébriques sur X. Les objets géométriques associés à des anneaux sont appelés des *schémas affines*, et un schéma est par définition un recollement de schémas affines (tout comme une variété topologique est un recollement d'ouverts de $\mathbb{R}^n$). On tire de cela les deux principes suivants.

Les schémas affines sont en correspondance avec les anneaux commutatifs.

Les schémas sont obtenus par recollement de schémas affines.

En combinant ces deux principes on obtient le principe suivant.

Les schémas sont obtenus par recollement d'anneaux commutatifs.

Il faut faire attention que la correspondance entre schémas affines et anneaux commutatifs est contravariante. Ainsi, nous allons chercher à définir un contexte géométrique $(C, \tau, \mathbf{P})$, où C est la catégorie opposée à celle des anneaux commutatifs.

1 Rappels sur les anneaux et modules

On commence par rappeler que pour un anneau A il existe un notion de A-module (à gauche): un A-module est la donnée d'un groupe abélien M muni d'une application bi-linéaire $m : A \times M \longrightarrow M$ telle que

$$m(a, m(b, x)) = m(a.b, x) \quad \forall\, a, b \in A \,\forall\, x \in M$$

$$m(1, x) = x \quad \forall x \in M.$$

On utilise la notation

$$a.x := m(a, x) \quad \forall a \in A \,\forall\, x \in M$$

Pour deux A-modules M et N, un morphisme de A-modules $M \longrightarrow N$ est la donnée d'un morphisme de groupes abéliens $f : M \longrightarrow N$ telle que $f(a.x) = a.f(x)$ $\forall a \in A$ $\forall x \in M$. Les A-modules et morphismes de A-modules forment une catégorie notée $A - Mod$.

Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on définit un foncteur

$$F : B - Mod \longrightarrow A - Mod$$

où pour un B-module M, le groupe abélien sous-jacent à $F(M)$ est M, et la structure de A-module est donnée par

$$a.x := f(a).x \quad \forall a \in A \,\forall x \in M.$$

On peut montrer que le foncteur F possède un adjoint à gauche noté

$$\begin{array}{ccc} A - Mod & \longrightarrow & B - Mod \\ M & \mapsto & B \otimes_A M. \end{array}$$

Le groupe abélien sous-jacent au B-module $B \otimes_A M$ est le quotient du groupe abélien libre engendré par les symbôles $b \otimes x$ avec $b \in B$ et $x \in M$ par le sous-groupe engendré par les éléments

$$(b + b') \otimes x - b \otimes x - b' \otimes x$$

$$b \otimes (x + y) - b \otimes x - b \otimes y$$

$$a.b \otimes x - b \otimes a.x,$$

où b et b' parcourent B, x et y parcourent M et a parcourt A. La structure de B-module sur $B \otimes_A M$ est alors donnée par
$$b.(b' \otimes x) := (b.b') \otimes x.$$

Nous noterons $Comm$ la catégorie des anneaux commutatifs. Pour un morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $Comm$ on peut voir B comme un A-module par la formule $a.x := f(a).x$, pour $a \in A$ et $x \in B$. Si $g : A \longrightarrow C$ est un second morphisme dans $Comm$, on montre que l'objet coproduit $B \coprod_A C$ existe dans $Comm$: son groupe abélien sous-jacent est $B \otimes_A C$ et sa structure d'anneaux est donnée par $(b \otimes c).(b' \otimes c') := (b.b') \otimes (c.c')$ (Exo: vérifier que $B \otimes_A C$ est bien la colimite du diagramme $B \longleftarrow A \longrightarrow C$ dans $Comm$).

On termine par la notation
$$Aff := Comm^{op}.$$
De plus, le foncteur identité $Aff \longrightarrow Comm^{op}$ sera noté $Spec$. Ainsi, un morphisme d'anneaux commutatifs $A \longrightarrow B$ est formellement la même chose qu'un morphisme $Spec\, B \longrightarrow Spec\, A$ dans Aff.

2 Morphismes plats

Définition 2.1 *Un morphisme d'anneaux commutatifs $A \longrightarrow B$ est* plat *si le foncteur*
$$B \otimes_A - : A - Mod \longrightarrow B - Mod$$
est exact.

On commence par remarquer que comme les catégories de modules sont des catégories abéliennes et que le foncteur $B \otimes_A -$ est adjoint à gauche (donc exact à droite), le foncteur
$$B \otimes_A - : A - Mod \longrightarrow B - Mod$$
est exact si et seulement s'il préserve les noyaux. C'est souvent ce critère que l'on utilisera.

Les propriétés générales des morphismes plats sont les suivantes.

Lemme 2.2 1. *Les morphismes plats sont stables par compositions.*

2. *Si*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$
est un diagramme cocartésien dans $Comm$, et si f est plat alors f' est plat (i.e. les morphismes plats sont stables par co-changements de bases).

Preuve: (1) Soit $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ deux morphismes plats. Pour tout A-module M il existe un isomorphisme naturel (Exo: vérifier ceci)

$$C \otimes_B (B \otimes_A M) \simeq C \otimes_A M.$$

Ainsi, le foncteur $M \mapsto C \otimes_A M$ est isomorphe au composé des deux foncteurs $M \mapsto B \otimes_A M$ et $M \mapsto C \otimes_B M$. Comme ces deux foncteurs sont exacts leur composé aussi. Ainsi, le morphisme composé $A \longrightarrow C$ est plat.

(2) Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

est un diagramme cocartésien dans $Comm$, alors on a un isomorphisme naturel

$$B' \simeq A' \otimes_A B.$$

Ainsi, pour tout B-module M, il existe un isomorphisme naturel de A'-modules

$$B' \otimes_B M \simeq (A' \otimes_A B) \otimes_B M \simeq A' \otimes_A M.$$

Ceci montre que f plat implique f' plat (Exo: faire les détails). $\square$

Exo: Pour tout anneau commutatif A, montrer que le morphisme naturel d'inclusion $A \hookrightarrow A[X]$ est un morphisme plat. De même pour le morphisme $A[X] \longrightarrow A[X]$ qui envoit X sur X^2. Montrer que le morphisme $A[X] \longrightarrow A$ qui envoit X sur 0 n'est pas plat.

Définition 2.3 *Un morphisme d'anneaux commutatifs $A \longrightarrow B$ est* fidèlement plat *si le foncteur*

$$B \otimes_A - : A - Mod \longrightarrow B - Mod$$

est exact et conservatif (i.e. exact et de plus $(B \otimes_A M \simeq 0) \Rightarrow (M \simeq 0)$).

Les propriétés générales des morphismes fidèlement plats sont les mêmes que celles des morphismes plats.

Lemme 2.4 *1. Les morphismes fidèlement plats sont stables par compositions.*

2. Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

est un diagramme cocartésien dans $Comm$, et si f est fidèlement plat alors f' est fidèlement plat (i.e. les morphismes plats sont stables par co-changements de bases).

Preuve: Même méthode que pour le lemme 2.2 (Exo: faire les détails). $\square$

Exo: Montrer que l'inclusion naturelle $A \hookrightarrow A[X]$ est un morphisme fidèlement plat. De même pour $A[X] \longrightarrow A[X]$ qui envoit X sur X^2. Montrer que le morphisme d'inclusion $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ est plat mais pas fidèlement plat.

Définition 2.5 *Une famille de morphismes dans Aff*

$$\{Spec\, A_i \longrightarrow Spec\, A\}_{i\in I}$$

est un recouvrement fidèlement plat et quasi-compact *(*fpqc *pour faire court) si les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *L'ensemble I est fini.*

2. *Pour tout $i \in I$ le morphisme $A \longrightarrow A_i$ est un morphisme plat.*

3. *Le morphisme $A \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ est fidèlement plat.*

Exo: Montrer que la condition (3) ci-dessus implique la condition (2) (Exo: on pourra utiliser qu'il existe une équivalence naturelle de catégories $(\prod_{i\in I} A_i) - Mod \simeq \prod_{i\in I}(A_i - Mod)$).

Lemme 2.6 *Les recouvrements fpqc définis en 2.5 définissent une (pré)topologie de Grothendieck sur Aff.*

Preuve: Cela se déduit des lemmes 2.2 et 2.4. $\square$

Définition 2.7 *La topologie de Grothendieck sur Aff dont les familles couvrantes sont les recouvrements fpqc est appelée la* topologie fpqc*.*

On termine ce chapitre par le lemme suivant.

Lemme 2.8 *La topologie fpqc est sous-canonique.*

Preuve: On remarque que dire que tous les préfaisceaux représentables sur Aff sont des faisceaux équivaut à dire que pour tout morphisme fidèlement plat $A \longrightarrow B$ le morphisme naturel

$$A \longrightarrow lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B)$$

est un isomorphisme (Exo: vérifier cela).

Soit donc un morphisme fidèlement plat $u : A \longrightarrow B$. Comme le foncteur $B \otimes_A -$ commute aux limites finies (par platitude), et est conservatif (par fidèle platitude), il nous suffit de montrer que le morphisme

$$A \longrightarrow lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B)$$

induit un isomorphisme

$$B \otimes_A A \simeq B \longrightarrow lim\,(B \otimes_A B \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A B)\,.$$

En d'autres termes, on peut remplacer A par B et B par $B\otimes_A B$, et donc supposer qu'il existe un morphisme $r : B \longrightarrow A$ qui soit une rétraction de $u : A \longrightarrow B$ (i.e. le composé $A \longrightarrow B \longrightarrow A$ est l'identité). Dans ce cas, on définit un morphisme

$$lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B) \longrightarrow A$$

en composant la projection naturelle $lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B) \longrightarrow B$ avec r. Le morphisme composé

$$A \longrightarrow lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B) \longrightarrow A$$

est clairement égal à l'identité. Inversement, le morphisme composé

$$lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B) \longrightarrow A \longrightarrow lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B)$$

envoit un élément $b \in B$ tel que $b \otimes 1 = 1 \otimes b$ dans $B \otimes_A B$ vers l'élément $ur(b)$ (qui vérifie aussi $ur(b) \otimes 1 = 1 \otimes ur(b)$ dans $B \otimes_A B$). Le morphisme d'anneaux

$$t : B \otimes_A B \longrightarrow B$$

qui envoit $b \otimes b'$ sur $ur(b).b'$ est tel que

$$t(b \otimes 1) = ur(b) \qquad t(1 \otimes b) = b.$$

Ainsi, si $b \in B$ vérifie $b \otimes 1 = 1 \otimes b$ on a $b = ur(b)$. Ceci montre que le morphisme composé

$$lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B) \longrightarrow A \longrightarrow lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B)$$

est aussi égal à l'identité. Ceci termine la preuve que le morphisme

$$A \longrightarrow lim\,(B \rightrightarrows B \otimes_A B)$$

est bijectif. $\square$

3 Morphismes lisses et étales

Pour plus de détails sur cette section on renvoit aux premiers exposés de [SGA1], ou encore aux pragraphes 2.1 et 2.2 de [B-L-R].

Soit $C_0 \in Comm$. On rappelle qu'une extension de carré nul de C_0 est la donnée d'un morphisme $p : C \longrightarrow C_0$ dans $Comm$ qui vérifie les deux conditions suivantes

- Le morphisme p est surjectif.
- Si $x \in Ker(p)$ alors $x^2 = 0$.

L'exemple fondamental d'une extension de carré nul est le morphisme

$$A[X]/(X^2) \longrightarrow A$$

qui envoit X sur 0. On l'appelle l'extension de carré nul triviale. Elle est notée

$$A[\epsilon] := A[X]/(X^2),$$

et $\epsilon \in A[\epsilon]$ est par définition la classe de X. Ainsi, tout élément de $A[\epsilon]$ s'écrit de la forme $a+b.\epsilon$ avec a et b dans A.

Pour mieux comprendre les extensions de carré nul on peut considérer l'exemple suivant. Soit $A := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_r)$ une $\mathbb{C}$-algébre commutative de type fini. Soit $x : A \longrightarrow \mathbb{C}$ correspondant à un point $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $P_j(x) = 0$ pour tout j. La donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}[\epsilon] \arrow[d] \\ A \arrow[r, "x"] \arrow[ur] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

correspond à la donnée d'un vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ tel que $P_j(x + b.\epsilon) = 0$ pour tout j. Or, comme $\epsilon^2 = 0$ on a

$$P_j(x + b.\epsilon) = P_j(x) + \sum_i b_i.\frac{\partial P_j}{\partial X_i}(x).\epsilon = \sum_i b_i.\frac{\partial P_j}{\partial X_i}(x).\epsilon$$

Ainsi, la donnée d'un diagramme commutatif comme ci-dessus est équivalente à la donnée d'un vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ vérifiant

$$\sum_i b_i.\frac{\partial P_j}{\partial X_i}(x) = 0,$$

où encore à la donnée d'un vecteur tangent de la variété d'équations $P_1, \dots, P_r$ au point x.

Définition 3.1 *1. Un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $Comm$ est* formellement lisse *(resp.* formellement étale*) si pour tout $C_0 \in Comm$, toute extension de carré nul $C \longrightarrow C_0$, et tout diagramme commutatif dans $Comm(C)$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C_0 \end{tikzcd}$$

il existe un (resp. un unique) morphisme $B \longrightarrow C$ dans $Comm(C)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur] & C_0 \end{tikzcd}$$

commute.

2. *Un morphisme dans $Comm$ et* lisse *(resp.* étale*) s'il est formellement lisse (resp. formellement étale) et de présentation finie*[1].

Intuitivement, les morphismes lisses sont des analogues algébriques des submersions (e.g. $\mathcal{C}^\infty$), et les morphismes étales des analogues des difféomorphismes locaux.

Lemme 3.2 *Les morphismes lisses et étales sont stables par composition et changement de bases dans Aff.*

Preuve: Exo. □

La proposition suivante donne une façon de construire des exemples de morphismes étales.

Proposition 3.3 *Soit $F \in A[X]$ un polynôme, et considérons le morphisme naturel*

$$A \longrightarrow A[X]/(F) = B.$$

Alors, le morphisme $A \longrightarrow B$ est formellement étale si et seulement si le polynôme dérivé $F'(X)$ devient inversible dans B.

Preuve: En effet, supposons que $F'(X)$ soit inversible dans B. Ceci est équivalent à dire que pour tout anneau commutatif C et tout morphisme $B \longrightarrow C$ correspondant à $c \in C$ tel que $F(c) = 0$, l'élément $F'(c)$ est inversible dans C. Soit $C \longrightarrow C_0$ une extension de carré nul et

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] & C_0 \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif. Le morphisme u est donné par un élément $x_0 \in C$ avec $F(x_0) = 0$. Soit $x \in C$ tel que $p(x)$. Pour tout $e \in Ker(p)$ on a

$$F(x+e) = F(x) + eF'(x).$$

Par hypothèse, il existe c_0 et d_0 dans C_0 tel que

$$c_0.F'(x_0) = 1 + d_0.F(x_0).$$

Soit c et d des antécédents de c_0 et d_0 par p. On pose $e := -F(x).c \in C$. Notons que e ne dépend pas du choix de c, car $F(x) \in Ker(p)$. De plus, on a

$$e.F'(x) = -c.F'(x).F(x) = F(x).$$

Ainsi, on a

$$F(x+e) = F(x) - F(x) = 0.$$

[1] On rappelle qu'un morphisme d'anneaux commutatifs $A \longrightarrow B$ est de présentation finie si B est isomorphe comme A-algèbre à une A-algèbre de la forme $A[X_1, \ldots, X_r]/(P_1, \ldots, P_r)$.

L'élément $x + e \in C$ donne ainsi le morphisme cherché $B \longrightarrow C$. De plus, l'unicité de e montre que ce relèvement est unique. Ceci finit de montrer que $A \longrightarrow B$ est étale.

Inversement, supposons que $A \longrightarrow B$ soit étale. Soit C_0 un anneau commutatif et $C := C_0[\epsilon]$ l'extension de carré nul triviale de C_0, qui est munie d'un morphisme naturel $C_0 \longrightarrow C$. On considère un morphisme $B \longrightarrow C_0$, correspondant à $x_0 \in C_0$ tel que $F(x_0) = 0$. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & C_0 \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où le morphisme $A \longrightarrow C$ est simplement donné par la composition $A \longrightarrow B \longrightarrow C_0 \longrightarrow C$. Les morphismes $u : B \longrightarrow C$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr, "u"] & C_0 \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

sont en correspondance avec les éléments $x \in C$ de la forme $x_0 + c.\epsilon$, avec $c \in C_0$ et qui vérifient $F(x_0 + c.\epsilon) = 0$. Or, on a

$$F(x_0 + c.\epsilon) = F(x_0) + cF'(x_0)\epsilon = cF'(x_0)\epsilon.$$

L'unicité du relèvement u implique donc que l'on a

$$\left(cF'(x_0) = 0\right) \Rightarrow (c = 0)\,,$$

et donc que $F'(x_0)$ n'est pas diviseur de zéro dans C_0. Or, ceci est vrai pour tout morphisme $B \longrightarrow C_0$, et en particulier pour les morphismes $B \longrightarrow B/m$, où m parcourt les idéaux maximaux de B. Ainsi, on voit que $F'(X)$ n'appartient à aucun idéal maximal de B et est donc inversible. $\square$

Un corollaire important de la proposition précédente est qu'une extension algébrique de corps $K \longrightarrow L$ est un morphisme étale si et seulement si elle est séparable.

Un autre conséquence immédiate de la proposition précédente est que pour tout anneau commutatif et tout $f \in A$, le morphisme $A \longrightarrow A_f := A[X]/(f.X - 1)$ est étale. Exo: vérifier ceci directement en appliquant la définition.

Citons aussi sans démonstrations les faits suivants.

Proposition 3.4 *1. Un morphisme $A \longrightarrow B$ est lisse si et seulement si B est isomorphe comme A-algèbre à $A[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_m)$, où les $P_i \in A[X_1, \ldots, X_n]$ sont tels que l'idéal de B engendré par les mineurs d'ordre $m \times m$ de la matrice $\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X)\right)_{i,j}$ est B.*

2. *Un morphisme $A \longrightarrow B$ est lisse si et seulement s'il existe un recouvrement fpqc $\{u_i : B \longrightarrow B_i\}$ et des diagrammes commutatifs*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u_i"] & B_i \\ A \arrow[u] \arrow[r] & A[X_1, \dots, X_{n_i}], \arrow[u, "v_i"'] \end{tikzcd}$$

où tous les morphismes u_i et v_i sont étales.

3. *Les morphismes lisses (et en particulier les morphismes étales) sont plats.*

Pour terminer on pose la définition suivante.

Définition 3.5 *Un morphisme dans Aff est une* immersion ouverte de Zariski *si c'est un morphisme étale et un monomorphisme.*

On fera attention que l'on demande que le morphisme soit un monomorphisme dans Aff. En termes d'anneaux cela veut dire que $A \longrightarrow B$ est une immersion ouverte de Zariksi si c'est un morphisme étale et si pour tout $C \in Comm$ le morphisme induit

$$Hom(B,C) \longrightarrow Hom(A,C)$$

est injectif (i.e. que $A \longrightarrow B$ est un épimorphisme dans $Comm$).

Exo: montrer qu'un monomorphisme lisse dans Aff est aussi étale. Montrer que le morphisme étale $A \longrightarrow A_f$ considéré plus haut est une immersion ouverte de Zariski. On peut aussi montrer qu'un monomorphisme plat et de présentation finie est aussi étale (on ne le fera pas).

4 Le contexte géométrico-algébrique

On définit maintenant un contexte géométrique $(C, \tau, \mathbf{P})$ de la façon suivante.

1. La catégorie C est la catégorie Aff, opposée à celle des anneaux commutatifs.
2. On définit une topologie étale sur Aff en posant qu'une famille $\{Spec\, A_i \longrightarrow Spec\, A\}$ de morphismes dans Aff est un recouvrement étale si c'est un recouvrement fpqc et si tous les morphismes $A \longrightarrow A_i$ sont étales (cf proposition 3.4 (3)).
3. La classe $\mathbf{P}$ est par définition la classe des morphismes lisses.

Théorème 4.1 *Les définitions ci-dessus définissent un contexte géométrique.*

Quelques étapes de la preuve: On reprend les points de la définition 1.1 du cours 2.

(1) Le fait que la topologie étale soit sous-canonique se déduit immédiatement du fait que la topologie fpqc est sous-canonique (en effet, une famille couvrante étale est par définition aussi

une famille couvrante fpqc).

(2) Dans Aff tous les morphismes sont carrables, car la catégorie $Comm = Aff^{op}$ possède tout type de colimites. Les morphismes de **P** sont donc carrables, et en particulier localement carrables.

(3) Les morphismes lisses sont stables par composition et changement de bases dans Aff (voir le lemme 3.2)). Le fait que les morphismes de **P** soient locaux pour la topologie étale se déduit de la proposition 3.4 (2) (Exo: faire les détails).

(4) On sait que Aff possède tout type de colimites, et donc des colimites finies. Au niveaux des anneaux commutatifs on a un isomorphisme dans Aff

$$Spec\,A \coprod Spec\,B \simeq Spec(A \times B).$$

Pour une famille finie d'anneaux commutatifs $\{A_i\}$, les morphismes de projection

$$\prod_i A_i \longrightarrow A_{i_0}$$

sont isomorphes aux morphismes naturels

$$\prod_i A_i \longrightarrow (\prod_i A_i)[X]/(e_{i_0}X - 1),$$

où 1 est l'unité de $\prod_i A_i$, et e_{i_0} est l'unité de A_{i_0} (vu comme élément du produit en rajoutant des zéros). D'après la proposition 3.3 ces morphismes sont étales, et donc lisses. Enfin, le foncteur naturel

$$(\prod_i A_i) - Mod \longrightarrow \prod_i (A_i - Mod)$$

étant une équivalence, on voit que la famille de morphismes

$$\{\prod_i A_i \longrightarrow A_{i_0}\}_{i_0}$$

est un recouvrement lisse. Ceci montre le point (b) de la compatiblité avec les sommes. Le point (c) est équivalent au fait que pour deux anneaux commutatifs A et B, on a

$$A \times_{A \times B} B \simeq 0 \qquad A \times_{A \times B} A \simeq A.$$

Il nous reste le point (d). On dispose d'un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{O}$ sur Aff, qui à $Spec\,A$ associe l'anneau A. De plus, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$A \simeq Hom(Spec\,A, \mathcal{O})).$$

Ainsi, si $Spec\,A \simeq F \coprod G$, on trouve

$$A \simeq Hom(Spec\,A, \mathcal{O})) \simeq Hom(F, \mathcal{O}) \times Hom(G, \mathcal{O}).$$

Si on pose $B := Hom(F, \mathcal{O})$ et $C := Hom(F, \mathcal{O})$, B et C sont des anneaux commutatifs (pour la loi induite par celle du faisceau $\mathcal{O}$), et de plus on a $A \simeq B \times C$. On vérfie alors que les morphismes naturels

$$F \longrightarrow Spec\,B \qquad G \longrightarrow Spec\,C$$

sont des isomorphismes (Exo: le vérifier. On utilisera que la somme des morphismes est un isomorphisme pour en déduire qu'ils sont tous deux des monomorphismes et des épimorphismes).

(5) Nous savons que les morphismes lisses sont plats et de présentation finie. Le fait que les morphismes lisses possèdent des images ouvertes est alors une conséquence du lemme suivant que nous donnons sans preuve (c'est une autre façon d'énoncer le théorème 2.12 du chapitre §2 de [Mi]).

Lemme 4.2 *Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme plat et de présentation finie. Alors, il existe des éléments $f_1, \ldots, f_r$ dans A, tel que les morphismes*

$$Spec\,B \longrightarrow Spec\,A \qquad \coprod_i Spec\,A_{f_i} \longrightarrow Spec\,A$$

ont même image en tant que morphismes de faisceaux (sur Aff pour la topologie fpqc).

Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Définition 4.3 *Les variétés (resp. les espaces géométriques) respectivement au contexte $(Aff, ét, lisse)$ du théorème 4.1 sont appelés des* schémas *(resp. des* espaces algébriques*).*

Références

[B-L-R] S. Bosch, W. Lutkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, A series of modern surveys in mathematics **21**, Springer-Verlag (1990).

[Mi] J.S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton university press (1980).

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math., **224**, Springer.