

# Cours 4 $\frac{1}{2}$ : Compléments sur les schémas et espaces algébriques

Dans ce cours on cite en vrac quelques faits concernant les schémas et espaces algébriques. On ne donnera pas les preuves qui sont dans la lignée de celle des énoncés que nous avons déjà vus mais qui nous prendraient trop de temps. On renvoie à [Har, Mi, SGA1] pour les détails et pour plus de références.

## 1 L'espace Zariski sous-jacent

Dans cette section on se fixe un espace algébrique  $X$ .

### 1.1 Retour sur les ouverts de Zariski

On rappelle que l'on a montré que pour toute immersion fermée  $Y \hookrightarrow X$  le sous-foncteur  $X - Y$  de  $X$  était un sous-foncteur ouvert et donc définissait un ouvert de Zariski  $X - Y \hookrightarrow X$  (voir exemple 4 du cours 4).

**Proposition 1.1** *Pour toute immersion ouverte  $U \hookrightarrow X$  il existe une immersion fermée  $Y \hookrightarrow X$  telle que  $U = X - Y$ .*

La proposition précédente semble naturelle mais sa démonstration n'est pas immédiate étant donné la définition des immersions ouvertes que nous avons adoptées.

Exo: utiliser la proposition 1.1 pour montrer qu'un ouvert Zariski  $U$  de  $X := \operatorname{Spec} A$  est une réunion (peut-être infinie) d'ouverts de la forme  $X_f := \operatorname{Spec} A_f$  (où  $A_f$  est l'anneau  $A$  localisé en  $f \in A$ ).

### 1.2 L'ensemble des points

On considère l'ensemble  $E(X)$  des paires  $(K, x)$ , où  $K$  est corps et  $x \in X(K)$  est un point de  $X$  à valeurs dans  $K$ . On définit une relation d'équivalence sur  $E(X)$  de la façon suivante:  $(K, x)$  est équivalent à  $(K', x')$  s'il existe un corps  $L$  et des morphismes  $i : K \hookrightarrow L$ ,  $j : K' \hookrightarrow L$  tels que  $i(x) = j(x')$  (comme éléments de  $X(L)$ ). Exo: vérifier que cela définit une relation d'équivalence sur  $E(X)$ .

**Définition 1.2** *On définit l'ensemble des points de  $X$  comme étant l'ensemble quotient  $E(X)/R$  où  $R$  est la relation définie ci-dessus. On le note  $|X|$ .*

Exo: montrer que lorsque  $X = \text{Spec } A$  l'ensemble  $|X|$  est en bijection naturelle avec les idéaux premiers de  $A$ .

La construction  $X \mapsto |X|$  est fonctorielle (covariante) en  $X$ , et définit naturellement un foncteur de la catégorie des espaces algébriques vers celle des ensembles.

Exo: Montrer que si  $|X| = \emptyset$  alors  $X = \emptyset$  (on montrera que si  $\{U_i \rightarrow X\}$  est un atlas alors l'application induite

$$\coprod_i |U_i| \rightarrow |X|$$

est surjective, puis on traitera la cas où  $X$  est un schéma affine).

### 1.3 L'espace localement annelé $(|X|, \mathcal{O}_X)$

On définit une topologie sur l'ensemble  $|X|$  de la façon suivante: un sous-ensemble  $U \subset |X|$  est un ouvert s'il existe un sous-foncteur ouvert  $V \subset X$  tel que le  $U = |V|$  (comme sous-ensembles de  $|X|$ ). En d'autres termes,  $U$  est l'ensemble des points de  $X$  représenté par des paires  $(K, x)$  avec  $x \in V(K) \subset X(K)$ .

Exo: vérifier que ceci définit une topologie sur  $|X|$ . Lorsque  $X = \text{Spec } A$  montrer que les ouverts de la forme  $X_f := \text{Spec } A_f$  forment une base pour cette topologie.

**Définition 1.3** L'ensemble  $|X|$  muni de la topologie définie ci-dessus est appelé l'espace topologique de Zariski sous-jacent à  $X$ . Il est simplement noté  $|X|$ .

Remarque: la proposition 1.1 montre que les fermés dans  $|X|$  sont de la forme  $|Y| \subset |X|$  pour  $Y \rightarrow X$  une immersion fermée.

On suppose maintenant que  $X$  est un schéma. On remarque alors qu'une base de la topologie sur  $|X|$  est donné par les ouverts de la forme  $|U| \subset |X|$ , où  $U \hookrightarrow X$  est une immersion ouverte avec  $U$  un schéma affine (Exo: le vérifier, on notera que ceci est faux pour  $X$  est espace algébrique qui n'est pas un schéma). On définit alors un faisceau d'anneaux commutatifs  $\mathcal{O}_X$  sur  $|X|$  en posant

$$\mathcal{O}_X(U) := A$$

où  $A \in \text{Comm}$  est tel que  $U \simeq \text{Spec } A$ . Ceci définit le faisceau  $\mathcal{O}_X$  sur les ouverts d'une base de la topologie sur  $|X|$  et donc par extension sur  $|X|$  tout entier.

**Définition 1.4** L'espace  $|X|$  muni du faisceau  $\mathcal{O}_X$  est appelé l'espace localement annelé sous-jacent au schéma  $X$ .

On notera que la définition précédente n'est valable que lorsque  $X$  est un schéma. Lorsque  $X = \text{Spec } A$  on peut montrer que l'espace annelé  $(|X|, \mathcal{O}_X)$  est isomorphe à l'espace  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  tel que défini dans [Har] par exemple.

## 2 Le petit topos étale

On renvient au cas général où  $X$  est un espace algébrique. La définition 1.4 n'ayant plus de sens nous allons chercher un palliatif à l'espace annelé  $(|X|, \mathcal{O}_X)$ .

### 2.1 Le topos localement annelé $(X_{et}, \mathcal{O}_X)$

On note  $Et/X$  la catégorie des morphismes étales  $U \longrightarrow X$  avec  $U$  un schéma affine (et morphismes qui commutent avec la projection sur  $X$ ). C'est une sous-catégorie pleine de  $Sh(Aff)/X$  des faisceaux sur  $X$ , et elle hérite d'une topologie de Grothendieck induite par celle de  $Sh(Aff)$ . En clair, une famille de morphismes

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\quad} & V \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

est couvrante dans  $Et/X$  si la famille de morphismes de schémas  $\{U_i \longrightarrow V\}$  est un recouvrement étale.

**Définition 2.1** *Le site  $Et/X$  est appelé le petit site étale de  $X$ . Son topos associé,  $Sh(Et/X)$ , est appelé le petit topos étale de  $X$ . Il est aussi noté  $X_{et}$ .*

On dispose sur  $Et/X$  d'un faisceau d'anneaux commutatifs, noté  $\mathcal{O}_X$ , qui à un objet  $U = Spec A \longrightarrow X$  associe l'anneau  $A$  (Exo: vérifier que cela définit bien un faisceau d'anneaux sur  $Et/X$ ). On obtient ainsi un topos annelé  $(X_{et}, \mathcal{O}_X)$ , qui est un palliatif à l'espace annelé  $(|X|, \mathcal{O}_X)$  lorsque  $X$  est un espace algébrique général. Il faut noter cependant que lorsque  $X$  est un schéma  $(|X|, \mathcal{O}_X)$  et  $(X_{et}, \mathcal{O}_X)$  ne sont pas des objets équivalents.

L'exemple suivant montre que le topos  $X_{et}$  est un général pas équivalent au topos d'un espace topologique (et donc non équivalent au topos des faisceaux sur  $|X|$ ).

On considère  $X = Spec k$ , où  $k$  est un corps. On note  $k^{sep}/k$  sa clôture séparable et  $G := Aut(k^{sep}/k)$  son groupe de Galois. Le groupe  $G$  est un groupe topologique pour la topologie de Krull, pour laquelle les sous-groupes ouverts sont de la forme  $Aut(k^{sep}/k') \subset G$  pour  $k'$  une extension séparable finie de  $k$ . Alors, on peut montrer que le topos  $Sh(Et/X)$  est équivalent à la catégorie des  $G$ -ensembles continus, c'est à dire des ensembles  $E$  munis d'une action de  $G$  tel que le morphisme  $G \times E \longrightarrow E$  soit continu (ou de manière équivalente tel que le stabilisateur de tout point  $x \in E$  soit un sous-groupe ouvert dans  $G$ ). Par exemple, lorsque  $k = \mathbb{R}$ , on trouve que  $Sh(Et/X)$  est équivalente à la catégorie des ensembles munis d'une action de  $\mathbb{Z}/2$  (i.e. d'une involution). Ceci montre que les topos  $Sh(Et/X)$  et  $Sh(|X|)$  ne sont pas équivalents déjà lorsque  $X$  est le spectre d'un corps, car on a toujours  $|X| = *$  et donc  $Sh(|X|) \simeq Ens$  (et on peut voir que  $Ens$  est équivalente à la catégorie des  $G$ -ensembles continus que si  $G$  est trivial).

## 3 Faisceaux quasi-cohérents

On vient de voir la définition du topos annelé  $(X_{et}, \mathcal{O}_X)$ . On peut donc considérer la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules sur  $Et/X$ , que l'on notera  $\mathcal{O} - Mod(X_{et})$ . De même, lorsque  $X$  est un schéma

on dispose de la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules sur  $|X|$ , que l'on note  $\mathcal{O} - \text{Mod}(X)$ . Par restriction du site  $Et/X$  au site de l'espace  $|X|$ , on trouve un foncteur de restriction

$$\mathcal{O} - \text{Mod}(X_{et}) \longrightarrow \mathcal{O} - \text{Mod}(X)$$

(Exo: faire les détails). Ce foncteur n'est pas une équivalence en général. Il existe cependant des sous-catégories sur lesquelles il induit une équivalence.

Rappelons, qu'un objet  $M \in \mathcal{O} - \text{Mod}(X_{et})$ , est la donnée pour tout objet  $U \longrightarrow X$ , d'un  $\mathcal{O}_X(U)$ -module  $M(U)$ , et pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

d'un morphisme  $M(U) \longrightarrow M(V)$  qui est  $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaire et fonctoriel en  $f$ .

**Définition 3.1** Un objet  $M \in \mathcal{O} - \text{Mod}(X_{et})$  est appelé quasi-cohérent, si pour tout morphismes dans  $Et/X$

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \xrightarrow{f} & \text{Spec } A \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

le morphisme induit

$$M(\text{Spec } A) \otimes_A B \longrightarrow M(\text{Spec } B)$$

est un isomorphisme.

La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{O} - \text{Mod}(X_{et})$  formée des objets quasi-cohérents sera notée  $QCoh(X)$ .

Exo: montrer que pour tout anneau commutatif  $A$  la catégorie  $QCoh(X)$  est naturellement équivalente à la catégorie  $A - \text{Mod}$  des  $A$ -modules.

**Proposition 3.2** Le foncteur de restriction

$$\mathcal{O} - \text{Mod}(X_{et}) \longrightarrow \mathcal{O} - \text{Mod}(X)$$

induit une équivalence entre  $QCoh(X)$  et son image essentielle dans  $\mathcal{O} - \text{Mod}(X)$ .

## 4 Propriétés de morphismes

### 4.1 Propriétés de finitudes

**Définition 4.1** 1. Un espace algébrique  $X$  est quasi-compact s'il existe un atlas  $\{U_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$  avec  $I$  fini.

2. Un morphisme d'espaces algébriques  $f : X \longrightarrow Y$  est quasi-compact si pour tout schéma affine  $Z$  et tout morphisme  $Z \longrightarrow Y$  l'espace algébrique  $X \times_Y Z$  est quasi-compact.
3. Un morphisme d'espaces algébriques  $f : X \longrightarrow Y$  est localement de présentation finie si pour tout schéma affine  $Z$  et tout morphisme  $Z \longrightarrow Y$ , il existe un atlas  $\{U_i \longrightarrow X \times_Y Z\}$  tel que chaque morphisme induit  $U_i \longrightarrow Z$  soit un morphisme de présentation finie (de schémas affines).
4. Un morphisme d'espaces algébriques  $f : X \longrightarrow Y$  est de présentation finie s'il est localement de présentation finie et quasi-compact.
5. Un espace algébrique  $X$  est localement noethérien s'il existe un atlas  $\{U_i \longrightarrow X\}$  avec  $U_i = \text{Spec } A_i$  et chaque  $A_i$  un anneau noethérien.
6. Un espace algébrique  $X$  est noethérien s'il est localement noethérien et quasi-compact.

Exo: montrer que les classes de morphismes définies ci-dessus sont stables par changement de bases et composition. Montrer aussi que si  $f : X \longrightarrow Y$  est localement de présentation finie et si  $Y$  est localement noethérien alors  $X$  est aussi localement noethérien.

Une propriété importante d'un espace algébrique  $X$  noethérien est que son espace topologique sous-jacent  $|X|$  est noethérien (i.e. que toute chaîne décroissante de fermés est stationnaire). Exo: vérifier cela. En particulier, on en déduit que tout fermé de  $|X|$  est une réunion finie de fermés irréductibles (un fermé est irréductible s'il n'est pas réunion non triviale de deux fermés). Ainsi,  $|X|$  est lui-même une réunion finie de fermés irréductibles, que l'on appelle les *composantes irréductibles* de  $X$ .

## 4.2 Morphismes séparés et propres

**Définition 4.2** 1. Un morphisme d'espaces algébriques  $f : X \longrightarrow Y$  est séparé si le morphisme diagonal  $X \longrightarrow X \times_Y X$  est une immersion fermée.

2. Un morphisme d'espaces algébriques  $f : X \longrightarrow Y$  est propre s'il est de présentation finie, séparé et si pour tout schéma affine  $Z$  et tout morphisme  $Z \longrightarrow Y$ , le morphisme induit

$$|X \times_Y Z| \longrightarrow |Z|$$

est un morphisme fermé d'espaces topologiques.

Exo: vérifier que les morphismes propres et séparés sont stables par changement de bases et composition.

**Proposition 4.3** Le morphisme  $\mathbb{P}^n \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  est propre.

La proposition précédente permet de construire des morphismes propres. En effet, tout morphisme  $X \longrightarrow Y$  qui se factorise en  $X \xrightarrow{j} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p} Y$ , où  $j$  est une immersion fermée (de présentation finie) et  $p$  la projection naturelle est un morphisme propre. De tels morphismes sont appelés *projectifs*.

### 4.3 Morphismes plats, lisses et étales

**Proposition 4.4** *Un morphisme localement de présentation  $f : X \longrightarrow Y$  entre espaces algébriques est lisse (resp. étale) si et seulement s'il est plat et si pour tout corps  $k$  et tout morphisme  $\text{Spec } k \longrightarrow Y$  le morphisme induit  $X \times_Y \text{Spec } k \longrightarrow \text{Spec } k$  est lisse (resp. étale).*

On notera aussi le fait complémentaire suivant.

**Proposition 4.5** *Soit  $k$  un corps. Un morphisme  $k \longrightarrow A$  est étale si et seulement si  $A$  est isomorphe, en tant que  $k$ -algèbre, à un produit fini de corps  $\prod k_i$ , où  $k_i/k$  est une extension finie séparable de  $k$ .*

### 4.4 Critères de recouvrement

Le critère suivant est bien utile pour construire des atlas. Nous l'avons déjà utilisé pour montrer que  $\mathbb{P}^n$  est un schéma.

**Proposition 4.6** *Soit  $\{f_i : X_i \longrightarrow Y\}$  une famille de morphismes localement de présentation finie entre espaces algébriques. Supposons que chaque  $f_i$  soit une immersion ouverte (resp. un morphisme lisse). Alors, pour que le morphisme induit*

$$\coprod_i f_i : \coprod_i X_i \longrightarrow Y$$

*soit un épimorphisme de faisceaux (pour la topologie étale) il faut et il suffit que pour tout corps  $k$  (resp. pour tout corps séparablement clos  $k$ ), l'application induite*

$$\coprod_i X_i(k) \longrightarrow Y(k)$$

*soit surjective.*

## 5 Variétés algébriques sur un corps

Pour cette section on note  $k$  un corps.

**Définition 5.1** *Une variété algébrique sur  $k$  est un schéma  $X$  muni d'un morphisme  $X \longrightarrow \text{Spec } k$  qui est de présentation finie.*

Pour tout schéma  $X$ , il existe un sous-schéma fermé  $X_{\text{red}} \hookrightarrow X$ , appelé le *réduit* de  $X$ . C'est le plus petit sous-schéma fermé  $Y$  de  $X$  tel que  $X - Y = \emptyset$ . Lorsque  $X = \text{Spec } A$  on a  $X_{\text{red}} := \text{Spec } A_{\text{red}}$ , où  $A_{\text{red}} = A/\text{rad}(A)$ , où  $\text{rad}(A)$  est l'idéal des éléments nilpotents dans  $A$ .

Supposons maintenant que  $X$  soit une variété algébrique sur  $k$ . On considère  $X_{\text{red}}$  qui est encore une variété algébrique. Le schéma  $X_{\text{red}}$  est noethérien, et donc est une réunion finie de composantes irréductibles  $X_{\text{red}} = \cup Z_i$ . Chaque  $Z_i$  étant irréductible, on voit que tout ouvert de Zariski non vide de  $Z_i$  est dense. De plus, si  $\text{Spec } A_i \hookrightarrow Z_i$  est un tel ouvert de Zariski, l'anneau  $A_i$  est intègre (on utilise ici que  $Z_i$  est réduit et irréductible). On considère son corps de fraction

$$K(Z_i) := \text{Frac}(A_i)$$

que l'on voit être indépendant du choix de l'ouvert  $\text{Spec } A_i \hookrightarrow Z_i$ .

**Définition 5.2** Soit  $X$  une variété algébrique et gardons les notations ci-dessus. L'entier

$$d_i := \text{DimTr}_k K(Z_i)$$

est appelé la dimension de  $X$  le long de la composante  $Z_i$ .

On rappelle que  $\text{DimTr}_k K(Z_i)$  désigne le degré de transcendance de l'extension de corps  $K(Z_i)/k$ .

Exo: montrer que  $\mathbb{P}^n$  est irréductible et que sa dimension est  $n$ .

## Références

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math. **52**, Springer-Verlag 1977.

[Mi] J.S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton university press (1980).

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math., **224**, Springer.