Cours 4: Schémas et espaces algébriques II

Rappelons que la catégorie Aff opposée à celle des anneaux commutatifs est munie de la topologie étale *ét*. On note simplement $Sh(Aff)$ la catégorie des faisceaux sur $(Aff, \text{ét})$. Dans le cours précédent nous avons défini trois sous-catégories pleines

$$\{Schémas\ \ affines\} \subset \{Schémas\} \subset \{Espaces\ \ algébriques\} \subset Sh(Aff).$$

Dans ce cours nous donnerons quelques exemples de schémas affines, de schémas et d'espaces algébriques. Nous donnerons aussi des exemples de faisceaux qui ne sont pas des espaces algébriques, bien que de nature géométrique en un certain sens.

1 Quelques propriétés de morphismes

On rappelle les notions de morphismes lisses et étales entre schémas affines données dans le cours 3. La définition suivante donne quelques notions de morphismes entre schémas et espaces algébriques. Nous en verrons d'autres dans les cours suivants sur les champs algébriques.

Définition 1.1
1. *Un morphisme $F \longrightarrow G$ dans $Sh(Aff)$ est* représentable par un schéma *(resp. par un espace algébrique, resp. par un schéma affine) si pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \longrightarrow G$ le faisceau $F \times_G X$ est un schéma (resp. un espace algébrique, resp. un schéma affine). Un morphisme représentable par un schéma affine sera aussi appelé un* morphisme affine.

2. *Un morphisme $F \longrightarrow G$ dans $Sh(Aff)$ est* lisse *(resp. étale) s'il est représentable par un espace algébrique et si de plus pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \longrightarrow G$ il existe un atlas $\{U_i\}$ de $F \times_G X$ tel que les morphismes composés $U_i \longrightarrow X$ soient des morphismes lisses (resp. étales) entre schémas affines (au sens du cours 3).*

3. *Un morphisme $F \longrightarrow G$ dans $Sh(Aff)$ est une* immersion ouverte *si c'est un monomorphisme étale.*

4. *Un morphisme $F \longrightarrow G$ dans $Sh(Aff)$ est une* immersion fermée*, si c'est un morphisme affine et si de plus pour tout schéma affine $X = Spec\, A$ et tout morphisme $X \longrightarrow G$, le morphisme de schémas affines*

$$F \times_G X \simeq Spec\, B \longrightarrow Spec\, A$$

correspond à un morphisme surjectif d'anneaux $A \longrightarrow B$.

On peut vérifier que les notions précédentes sont stables par changement de bases et composition (Exo. On pourra utiliser la proposition 1.2 (1) ci-dessous pour montrer que les morphismes représentables sont stables par composition). On peut aussi voir que la notion de morphisme étale ci-dessus est compatible avec celle définie dans le cours 3 (Exo. On pourra s'inspirer du lemme 3.2 (4) du cours 2 qui traite le cas des morphismes lisses).

Proposition 1.2 *1. Soit X un schéma (resp. un espace algébrique) et $F \longrightarrow X$ un morphisme dans $Sh(Aff)$. Supposons qu'il existe un atlas ouvert (resp. un atlas) $\{U_i\}$ de X tel que pour tout i le faisceau $U_i \times_X F$ soit un schéma (resp. un espace algébrique). Alors F est un schéma (resp. un espace algébrique).*

2. Les sous-catégories de $Sh(Aff)$ formées des schémas affines, des schémas et des espaces algébrique sont toutes trois stables par limites finies et sommes arbitraires.

3. Soit $F \longrightarrow G$ un morphisme représentable par un schéma (resp. par un espace algébrique, resp. par un schéma affine). Si G est un schéma (resp. par un espace algébrique, resp. par un schéma affine) alors F aussi.

Preuve: Exercice. □

2 Exemples de schémas

1. **La droite affine**: On considère le foncteur

$$\begin{array}{ccc} Aff^{op} = Comm & \longrightarrow & Ens \\ A & \mapsto & A, \end{array}$$

qui envoit un schéma affine $X = Spec\, A$ sur l'ensemble sous-jacent à l'anneau A (encore noté A). Ce foncteur est représentable par le schéma affine

$$\mathbb{A}^1 := Spec\, \mathbb{Z}[T]$$

appelé la *droite affine*. En effet, pour tout anneau commutatif A on dispose de bijection fonctorielle en A

$$A \simeq Hom_{Aff}(Spec\, A, \mathbb{A}^1) = Hom_{Comm}(\mathbb{Z}[T], A).$$

Explicitement, à un élément $a \in A$ on associe l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[T] \longrightarrow A$ qui envoit T sur a. Inversement, à un morphisme $\mathbb{Z}[T] \longrightarrow A$ on associe l'image de T. Nous utiliserons aussi les notations suivantes (pour $A \in Comm$)

$$\mathbb{A}^n := (\mathbb{A}^1)^n \simeq Spec\, \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$$

$$\mathbb{A}^n_A := \mathbb{A}^n \times Spec\, A \simeq Spec\, A[T_1, \ldots, T_n].$$

Le schéma $\mathbb{A}^n_A$ sera appelé *l'espace affine de dimension n au-dessus de A*. Si l'on note $X := Spec\, A$ on utilisera aussi la notation suivante

$$\mathbb{A}^n_X := \mathbb{A}^n \times X = \mathbb{A}^n_A.$$

2. **Le groupe multiplicatif**: On considère le foncteur

$$\begin{array}{ccc} Aff^{op} = Comm & \longrightarrow & Ens \\ A & \mapsto & A^{\times}, \end{array}$$

qui envoit un schéma affine $X = Spec\, A$ sur l'ensemble $A^{\times}$ des éléments inversibles de l'anneau A. Ce foncteur est représentable par le schéma affine

$$\mathbb{G}_m := Spec\, \mathbb{Z}[T, T^{-1}],$$

et est appelé le *groupe multiplicatif* (Exo: vérifier que $\mathbb{G}_m$ représente bien le foncteur ci-dessus).

3. **Le groupe linéaire**: On considère le foncteur

$$\begin{array}{ccc} Aff^{op} = Comm & \longrightarrow & Ens \\ A & \mapsto & Gl_n(A), \end{array}$$

qui envoit un schéma affine $X = Spec\, A$ sur l'ensemble $Gl_n(A)$ des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans A. Ce foncteur est représentable par le schéma affine

$$\mathbf{Gl}_n := Spec\, \mathbb{Z}[T_{i,j}][det(T_{i,j})^{-1}]_{1 \leq i,j \leq n},$$

qui est appelé le *groupe linéaire* (de rang n). On a $\mathbf{Gl}_1 = \mathbb{G}_m$.

4. **Ouvert complémentaire**: Soit $A \in Comm$ un anneau commutatif fixé, I un idéal de A, $X := Spec\, A$ et $Y := Spec\, A/I$ un sous-schéma fermé de X. On définit un sous-foncteur U de X de la façon suivante: pour tout $B \in Comm$, $U(B)$ est le sous-ensemble de $X(B)$ formé des morphismes $A \longrightarrow B$, tel que $B \otimes_A A/I = B/IB = 0$. Le foncteur U est représentable par un schéma, que l'on appelle l'ouvert complémentaire de X et que l'on note symboliquement $X - Y$. En effet, soit $\{f_i\}$ une famille de générateur de I. Pour tout i, on considère $U_{f_i} = Spec\, A_{f_i}$, ainsi que le morphisme

$$U_{f_i} \longrightarrow X$$

induit par le morphisme naturel $A \longrightarrow A_{f_i}$. On voit alors que chaque morphisme $U_{f_i} \longrightarrow X$ se factorise par $U \subset X$. On montre de plus que le morphisme total

$$\coprod_i U_{f_i} \longrightarrow U$$

est un atlas ouvert de U. En effet, le fait que $U_i \longrightarrow X$ soit une immersion ouvert implique que le morphisme $U_i \longrightarrow U$ est aussi une immersion ouvert. Il reste donc à montrer que le morphisme

$$\coprod_i U_{f_i} \longrightarrow U$$

est un épimorphisme de faisceaux. Pour cela, soit $B \in Comm$, et $Spec\, B \longrightarrow U$ un morphisme. Il faut trouver une famille couvrante $\{Spec\, B_j \longrightarrow Spec\, B\}$, et pour tout j

un indice i (qui dépend de j) est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Spec\,B_j \arrow[r] \arrow[d] & Spec\,B \arrow[d] \\ U_i \arrow[r] & U. \end{tikzcd}$$

Le morphisme $Spec\,B \longrightarrow U$ correspond à un morphisme d'anneaux $u : A \longrightarrow B$ tel que $IB = B$. On peut donc écrire $1 = \sum_i b_i.u(f_i)$, où les b_i sont dans B et nul sauf pour un nombre fini. On considère alors la famille

$$\{Spec\,B_{u(f_i)} \longrightarrow Spec\,B\}$$

où i parcourt le sous-ensemble des indices i tels que $b_i \neq 0$. On a clairement des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} Spec\,B_i \arrow[r] \arrow[d] & Spec\,B \arrow[d] \\ U_i \arrow[r] & U. \end{tikzcd}$$

Chaque morphisme $Spec\,B_{u(f_i)} \longrightarrow Spec\,B$ est une immersion ouverte, il nous reste donc à voir que le foncteur

$$B - Mod \longrightarrow \prod(B_{u(f_i)} - Mod)$$

est conservatif. Pour cela, soit M un B-module tel que $M \otimes_B B_{u(f_i)} = 0$ pour tout i. Pour $m \subset B$ un idéal maximal, il existe un indice i_0 tel que $u(f_{i_0}) \notin m$. Ainsi, le morphisme de localisation $B \longrightarrow B_m$ se factorise par $B_{u(f_{i_0})}$. On a donc

$$M \otimes_B B_m \simeq (M \otimes_B B_{u(f_{i_0})}) \otimes_{B_{u(f_{i_0})}} B_m = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout idéal maximal m de B on a $M = 0$.

Notons que la preuve ci-dessus montre que $X - Y$ est la réunion des sous-faisceaux $U_{f_i} \subset X$, et en particulier est un sous-faisceau ouvert de X. Ainsi, le morphisme d'inclusion $X - Y \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte.

L'existence du schéma $X - Y$ se généralise lorsque X est un espace algébrique et $Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée: on définit $X - Y$ comme étant le sous-foncteur de X formé des morphismes $Spec\,B \longrightarrow X$ qui sont tels que $Spec\,B \times_X Y = \emptyset$. On vérifie alors, à l'aide du cas où X est un schéma affine, que le morphisme d'inclusion $X - Y \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte et en particulier est représentable. Ceci implique que $X - Y$ est un espace algébrique.

On fera attention que même si X et Y sont affines, le schéma $X - Y$ est un général non affine. Par exemple, $\mathbb{A}^2 - 0$ (qui correspond à $A = \mathbb{Z}[X, Y]$ et $I = (X, Y)$) n'est pas affine. On peut voir ceci de la manière suivante. Pour tout schéma X, on peut considérer l'ensemble $\mathcal{O}(X) := Hom(X, \mathbb{A}^1)$. Le schéma $\mathbb{A}^1$ représentant un faisceau d'anneaux commutatifs, l'ensemble $\mathcal{O}(X)$ hérite d'une structure d'anneaux commutatifs naturelle.

De plus, si $X = Spec\, A$ est affine, alors on a un isomorphisme naturel $A \simeq \mathcal{O}(X)$. On peut écrire $\mathbb{A}^2 - 0$ comme une somme amalgamée dans $Sh(Aff)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m \arrow[r] & \mathbb{A}^2 - 0
\end{tikzcd}$$

(Exo: vérifier cela). En appliquant le foncteur $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ on trouve un diagramme cartésien d'anneaux

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathbb{A}^2 - 0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[X, X^{-1}, Y] \arrow[d] \\
\mathbb{Z}[X, Y, Y^{-1}] \arrow[r] & \mathbb{Z}[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}],
\end{tikzcd}$$

qui implique que $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2 - 0) \simeq \mathbb{Z}[X, Y]$. Ainsi, si $\mathbb{A}^2 - 0$ était affine on aurait $\mathbb{A}^2 - 0 \simeq \mathbb{A}^2$ ce qui n'est pas vrai (on peut par exemple comparer leurs points complexes et utiliser le fait que $\mathbb{C}^2 - 0$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{C}^2$).

5. **Espaces projectifs**: On fixe un entier $n \geq 1$. Pour un anneau commutatif $A \in Comm$, on définit $\mathbb{P}^n(A)$ comme étant l'ensemble des sous-A-modules $L \subset A^{n+1}$ qui vérifient les deux conditions suivantes

   (a) Il existe un sous-A-module $P \subset A^{n+1}$ tel que $A^{n+1} = L \oplus P$.

   (b) Pour tout corps K et tout morphisme $A \longrightarrow K$ on a $dim_K L \otimes_A K = 1$.

   Pour un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $Comm$ on définit une application $\mathbb{P}^n(A) \longrightarrow \mathbb{P}^n(B)$ qui à un sous-A-module $L \subset A^{n+1}$ associe $L \otimes_A B \subset B^{n+1}$ (noter que la condition (a) ci-dessus implique que $L \otimes_A B$ est bien un sous-B-modules de B^{n+1}). Il faut penser à $L \in \mathbb{P}^n(A)$ comme à *une famille de droites dans* $\mathbb{A}^{n+1}$ *parametrées par* $Spec\, A$.

   Nous allons montrer que le foncteur $\mathbb{P}^n$ ainsi défini est un schéma. Pour cela, pour tout entier $1 \leq j \leq n+1$, on considère $U_j(A) \subset \mathbb{P}^n(A)$ le sous-ensemble des $L \subset A^{n+1}$ qui sont tels que la projection sur le j-ème facteur induise un isomorphisme $L \simeq A$. Lorsque A parcourt $Comm$, ceci définit un sous-foncteur $U_j \subset \mathbb{P}^n$.

   Commençons par montrer que pour j fixé le morphisme d'inclusion $U_j \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ est une immersion ouverte. Pour cela, soit $Spec\, A \longrightarrow \mathbb{P}^n$ un morphisme qui correspond à un sous-A-modules $L \subset A^{n+1}$. Le sous-foncteur $V_j := Spec\, A \times_{\mathbb{P}^n} U_j \subset Spec\, A$ se décrit de la façon suivante: un élément de $Spec\, A(B)$ est dans $V_j(B)$ s'il correspond à un morphisme $A \longrightarrow B$ tel que la j-ème projection $L \otimes_A B \longrightarrow B$ soit un isomorphisme. Notons, que comme $L \otimes_A B$ et B sont des B-modules projectifs et de rang 1, le morphisme $p : L \otimes_A B \longrightarrow B$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un morphisme surjectif. En effet, s'il est surjectif, on a $L \otimes_A B \simeq B \oplus Ker(p)$, et la condition (b) ci-dessus implique que $Ker(p) \otimes_B B/m = 0$ pour tout idéal maximal m de B. Le lemme de Nakayam implique donc que $Ker(p) = 0$. Ainsi, $V_j := Spec\, A \times_{\mathbb{P}^n} U_j \subset Spec\, A$ s'identifie au sous-foncteur de $Spec\, A$ formé des morphismes $A \longrightarrow B$ tel que la j-ème projection $L \otimes_A B \longrightarrow B$ soit surjective. Notons $I \subset A$ l'image de la j-ème projection $L \longrightarrow A$. C'est un idéal de A, correspondant à un

sous-schéma fermé de $Spec\, A$, et l'on voit par définition que son ouvert complémentaire est V_j. D'après ce que l'on a vu V_j est un schéma, et de plus $V_j \subset Spec\, A$ est une immersion ouverte. Ceci finit de montrer que le morphisme $U_j \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ est une immersion ouverte.

Il nous reste à montrer que le morphisme total

$$\coprod_j U_j \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

est un épimorphisme de faisceaux. Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.1 *Soit* $\{U_i \longrightarrow F\}$ *une famille finie d'immersions ouvertes dans* $Sh(Aff)$. *Alors, le morphisme*

$$\coprod_i U_i \longrightarrow F$$

est un épimorphisme si et seulement si pour tout corps K *le morphisme induit*

$$\coprod_i U_i(K) \longrightarrow F(K)$$

est surjectif.

Preuve: Montrons d'abord la nécessité. Soit K un corps et $Spec\, K \longrightarrow F$ un morphisme. Il existe alors un atlas ouvert $\{Spec\, K_i \longrightarrow Spec\, K\}$, et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r] & F \\ Spec\, K_i \arrow[u] \arrow[r] & Spec\, K. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Or, comme $K \longrightarrow K_i$ est un épimorphisme dans $Comm$, le morphisme $x \mapsto x \otimes 1$ induit un isomorphisme $K_i \simeq K_i \otimes_K K_i$. Ceci implique que K_i est de dimension 1 comme K-espace vectoriel, et donc que $K \simeq K_i$.

Passons à la suffisance. On commence par utiliser qu'un morphisme $f : F \longrightarrow G$ est un épimorphisme si et seulement si pour tout $X \in Aff$ et tout morphisme $X \longrightarrow G$ le morphisme induit $F \times_G X \longrightarrow X$ est un épimorphisme (Exo: vérifier cela). Ceci ramène le lemme au cas où F est un schéma affine $Spec\, A$. Dans ce cas les U_j sont des schémas (car ouverts de $Spec\, A$), et en choisissant des atlas ouverts on se ramène au cas où chaque U_j est un schéma affine (on utilise ici la nécéssité déjà démontrée). Notons donc

$$\{U_i = Spec\, A_i \longrightarrow F = Spec\, A\}$$

la famille. Soit M un A-module non nul. Le A-module M contient un sous-A-module de la forme A/I, pour I un idéal propre. Soit m un idéal maximal de A contenant I, et notons que l'hypothése implique que le morphisme $A \longrightarrow A/m$ se factorise par $A_i \longrightarrow A/m$ pour un certain indice i. Notons m_i un idéal maximal de A_i qui contient le noyau de $A_i \longrightarrow A/m$. Le morphisme $u : A \longrightarrow A_i$ et donc tel que $u^{-1}(m_i) = m$. Ainsi,

l'idéal IA_i est contenu dans m_i et donc $A_i/IA_i \neq 0$. Comme $A \longrightarrow A_i$ est plat on a un monomorphisme

$$A/I \otimes_A A_i = A/IA_i \hookrightarrow M \otimes_A A_i$$

et ainsi $M \otimes_A A_i \neq 0$. Ceci termine de montrer que $\{U_i = Spec\, A_i \longrightarrow F = Spec\, A\}$ est une famille couvrante. $\square$

D'après le lemme il nous faut montrer que pour tout corps K, le morphisme

$$\coprod_j U_j(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$$

est surjectif. Mais, un point de $\mathbb{P}^n(K)$ correspond à un sous-espace vectoriel $L \subset K^{n+1}$ de dimension 1. Il existe donc un indice j tel que la j-ème projection $L \longrightarrow K$ soit non nulle et donc un isomorphisme.

Ceci termine la preuve que $\mathbb{P}^n$ est un schéma. On remarquera que chaque sous-schéma ouvert $V_j \subset \mathbb{P}^n$ est isomorphe à $\mathbb{A}^n$ (Exo: le vérifier. A un point $L \subset A^{n+1}$ de V_j on fera correspondre l'image de $1 \in A \simeq L$ dans A^n donné par la projection qui oublie le j-ème facteur). On peut aussi voir que $\mathbb{P}^n$ n'est pas affine. En effet, pour $n = 1$ on dispose d'un diagramme cocartésien dans $Sh(Aff)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \simeq \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\ V_2 \simeq \mathbb{A}^1 \arrow[r] & \mathbb{P}^1, \end{tikzcd}$$

qui en appliquant le foncteur $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ donne un diagramme cartésien d'anneaux

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\mathbb{P}^1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[X] \arrow[d, "b"] \\ \mathbb{Z}[Y] \arrow[r, "a"'] & \mathbb{Z}[T, T^{-1}], \end{tikzcd}$$

et où le morphisme a envoie Y sur T et b envoie X sur T^{-1}. On trouve ainsi $\mathcal{O}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Si $\mathbb{P}^1$ était affine il serait ainsi isomorphe à $Spec\, \mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas car par exemple $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z})$ n'est pas réduit à un point.

3 Exemples d'espaces algébriques

Un procédé général de construction d'espaces algébriques est donné par la proposition suivante. Pour cela, on rappelle qu'un schéma un groupes est un object en groupes dans la catégorie des schémas (i.e. un faisceau un groupes sur Aff dont le faisceau en ensembles sous-jacent est un schéma). De même, pour S un schéma, un schéma en groupes sur S est un objet en groupes dans la catégorie des schémas au-dessus de S (il s'agit donc d'un faisceau un groupes sur le site Aff/S dont le faisceau en ensembles sous-jacent est un schéma).

Proposition 3.1 *Soit k un anneau commutatif et $S := Spec\, k$. Soit G un schéma en groupes affine et lisse sur S, qui opère sur un schéma X. On suppose que le morphisme*

$$G \times X \longrightarrow X \times X$$

produit de l'action par le seconde projection est un monomorphisme (i.e. que l'action est sans points fixes). Alors le faisceau quotient X/G est représentable par un espace algébrique.

Preuve: Nous allons montrer que le morphisme naturel

$$X \longrightarrow X/G$$

est représentable affine et lisse. Ceci implique le résultat car un atlas $\{U_i\}$ de X donnera par composition un atlas de X/G.

Soit $Spec\, A \longrightarrow X/G$ un morphisme. Il existe un recouvrement étale $\{A \longrightarrow A_i\}$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & X/G \\ Spec\, A_i \arrow[u] \arrow[r] & Spec\, A. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On a

$$X \times_{X/G} Spec\, A_i \simeq (X \times_{X/G} X) \times_X Spec\, A_i \simeq (G \times X) \times_X Spec\, A_i \simeq G \times Spec\, A_i.$$

Par la proposition 1.2 (1) ceci implique que $X \times_{X/G} Spec\, A$ est un espace algébrique. De plus, on voit que la projection $X \times_{X/G} Spec\, A \longrightarrow Spec\, A$ devient après changement de base aux $Spec\, A_i$ isomorphe à la projection naturelle

$$G \times Spec\, A_i \longrightarrow Spec\, A_i.$$

Ceci montre que le morphisme $X \longrightarrow X/G$ est représentable par un espace algébrique et est lisse. On termine en appliquant le lemme technique suivant dont nous verrons une démonstration plus tard dans le cours sur les champs algébriques. $\square$

Lemme 3.2 *Soit $X = Spec\, A$, et $\{Spec\, A_i \longrightarrow Spec\, A\}$ un recouvrement étale. Soit $F \longrightarrow X$ un morphisme dans $Sh(Aff)$ tel que pour tout i le faisceau $F \times_X Spec\, A_i$ soit un schéma affine. Alors F est représentable par un schéma affine.*

Bien que la proposition 3.1 donne une façon assez simple de construire des exemples d'espaces algébriques, il n'est pas facile de construire explicitement un espace algébrique qui ne soit pas un schéma. On pourra consulter l'exemple 3.4.2 de l'appendice B de [Har] pour un tel exemple.

4 Exemples non représentables

Nous avons vu que le quotient d'un schéma par un schéma en groupes affine et lisse était représentable par un espace algébrique lorsque l'action est sans points fixes. On peut légitimement se poser la question de la représentabilité d'un tel quotient lorsque l'action n'est plus sans points fixes. Il se trouve, comme on peut s'y attendre, qu'un quotient par une action avec points fixes n'est plus représentable en général. Pour s'en convaincre on considère l'exemple très simple suivant.

On prend $X := \mathbb{A}^1$ la droite affine et $G = \mathbb{Z}/2$ qui opère sur $\mathbb{A}^1$ par $x \mapsto -x$. En clair, pour $A \in Comm$, l'action de G sur $\mathbb{A}^1(A) = A$ est $a \mapsto -a$. On prétend alors que le faisceau quotient X/G n'est pas un schéma ni même un espace algébrique. En effet, on pourrait montrer (ce que nous ne ferons pas) que si X/G est un espace algébrique alors il est forcemment un schéma affine. Ce schéma affine vérifie alors

$$X/G \simeq Spec\,\mathcal{O}(X/G).$$

Or, comme $\mathcal{O}(X/G) = Hom(X/G, \mathbb{A}^1)$, la propriété universelle du quotient donne

$$\mathcal{O}(X/G) = \{P \in \mathbb{Z}[T] \,/\, P(T) = P(-T)\} \subset \mathbb{Z}[T].$$

En d'autres termes, le morphisme de schémas affines $X \longrightarrow X/G$ correspond au morphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}[U] \longrightarrow \mathbb{Z}[T]$$

qui envoie U sur T^2. Ainsi, si X/G est un espace algébrique on trouverait que le morphisme

$$X = \mathbb{A}^1 \longrightarrow X/G \simeq \mathbb{A}^1$$

induit par $x \mapsto x^2$ possède des sections localement pour la topologie étale.

Pour voir que cela n'est pas le cas on procède comme suit. Pour $x : Spec\,\mathbb{Z} \longrightarrow X$ un point de X, on définit

$$T_xX := Hom_x(Spec\,\mathbb{Z}[\epsilon], X),$$

où le membre de droite désigne le sous-ensemble des morphismes $Spec\,\mathbb{Z}[\epsilon] \longrightarrow X$ qui composés avec $Spec\,\mathbb{Z} \longrightarrow Spec\,\mathbb{Z}[\epsilon]$ sont égaux au morphisme x. L'ensemble T_xX s'appelle le tangent de X au point x (nous en reparlerons plus tard). On peut vérifier facilement que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme étale alors le morphisme induit $T_xX \longrightarrow T_{f(y)}Y$ est bijectif (Exo). Ceci implique en particulier que notre morphisme

$$X = \mathbb{A}^1 \longrightarrow X/G \simeq \mathbb{A}^1$$

qui possède des sections localement pour la topologie étale est tel que le morphisme induit

$$T_0\mathbb{A}^1 \longrightarrow T_0\mathbb{A}^1$$

est surjectif. Or, on peut expliciter ce morphisme comme étant le morphisme nul entre $T_0\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{Z}$ (Exo). Ce qui mène à une contradiction.

Références

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math. **52**, Springer-Verlag 1977.